DERIVACE A JEJICH POUŽITÍ

doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

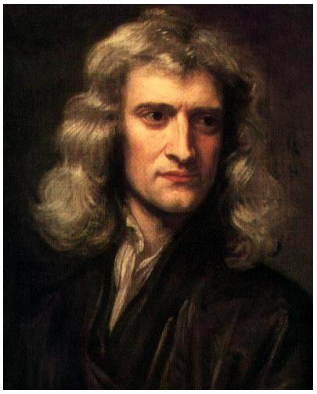
Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

DERIVACE A JEJICH POUŽITÍ

M. ZELENÝ

Jedním z důležitých pojmů moderní matematiky je pojem derivace. Objev tohoto pojmu, který je spojen se jmény Isaaca Newtona (1643–1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716)[1], má pro moderní matematiku a její aplikace zásadní význam. V tomto textu se pokusíme tento pojem přiblížit a ukázat jeho použití. Text má popularizační povahu a nejedná se o rigorózní výklad. Tento by totiž vyžadoval řadu dalších matematických pojmů a vět. Přesný výklad lze nalézt například v publikacích [2], [3] nebo také v [1], která byla využita při přípravě tohoto textu.

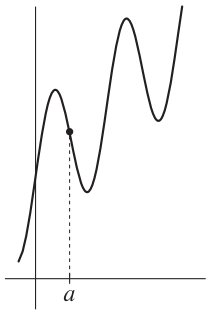


OBRÁZEK 1. I. Newton

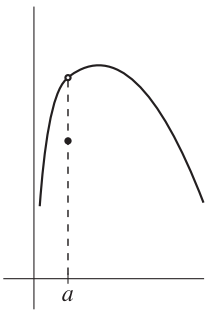
OBRÁZEK 2. G. W. Leibniz

1. DEFINICE DERIVACE A JEJÍ GEOMETRICKÝ VÝZNAM

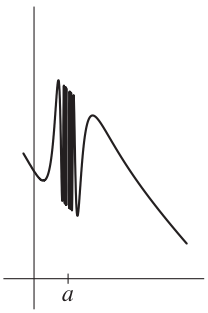
Na následujícím obrázku vidíme, že pokud se přibližují hodnoty proměnné x k a, blíží se $f(x)$ k funkční hodnotě $f(a)$. V takovém případě říkáme, že funkce f je **v bodě** a **spojitá**. Tuto vlastnost nemá každá funkce, jak ukazují další dva obrázky.



OBRÁZEK 3.



OBRÁZEK 4.



OBRÁZEK 5.

[1] O historii tohoto objevu se lze více dočíst v zajímavé knize [4].

O funkci definované na otevřeném intervalu řekneme, že je **spojitá**, jestliže je spojitá v každém bodě svého definičního oboru. Funkce sinus, kosinus, exponenciální funkce, polynomy, logaritmus – všechny tyto funkce jsou spojité. Také platí, že spojitost se zachovává aritmetickými operacemi a skládáním. Spojité funkce jsou důležitým systémem funkcí a v našem výkladu budeme tento pojem potřebovat. Nyní ale přejděme k hlavnímu předmětu našeho zájmu – k pojmu derivace.

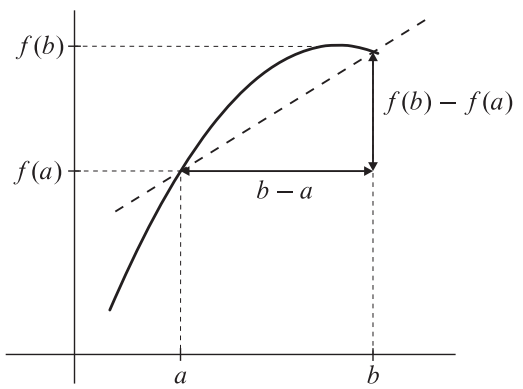
Uvažujme funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ [2] s hodnotami opět v $\mathbb{R}$. Zvolme pevně bod $a \in \mathbb{R}$. Nyní zvolme libovolně bod $b \in \mathbb{R}$ různý od a. Body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ veďme přímku p. Přímka p má následující analytické vyjádření

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

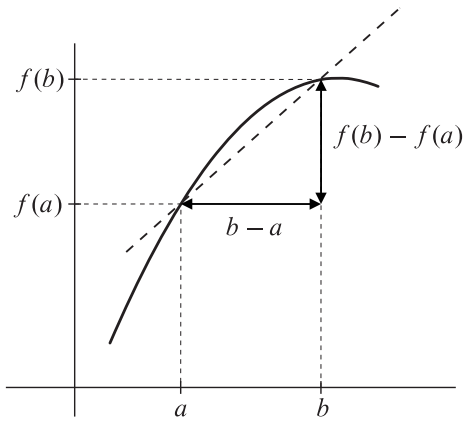
Směrnice přímky p je rovna $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Přímka p i její směrnice obecně závisí na volbě bodu b. Na následujících obrázcích je několik takových voleb znázorněno. Vidíme, že s přibližujícím se b k bodu a se odpovídající přímky v jistém smyslu přibližují k tečně ke grafu funkce v bodě $[a, f(a)]$ a podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ se blíží ke směrnici tečny. Směrnici tečny pak nazýváme derivací funkce f v bodě a a značíme ji $f'(a)$. Zpravidla se používá následující zápis

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Symbol $\lim_{b \to a}$ značí, že hodnotu $f'(a)$ obdržíme tak, že sledujeme chování daného výrazu pro b jdoucí k a.

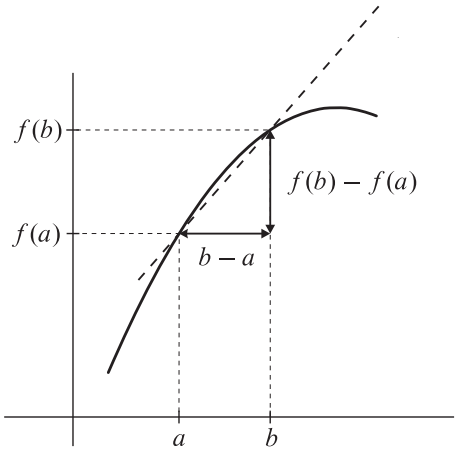


OBRÁZEK 6.

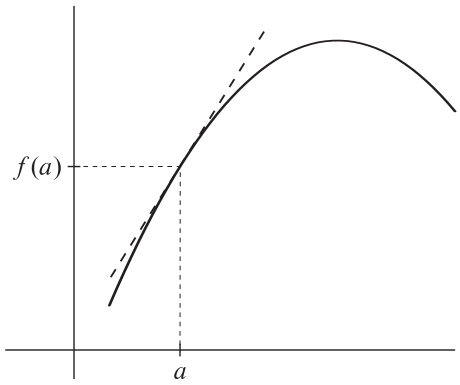


OBRÁZEK 7.

[2] Symbol $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel.

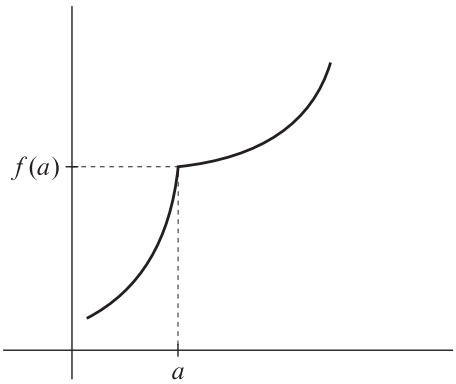


OBRÁZEK 8.

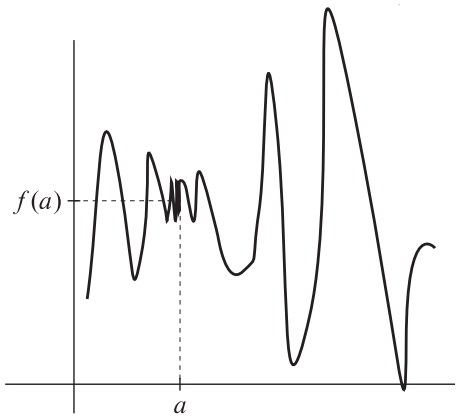


OBRÁZEK 9.

Situace nemusí být vždy tak přehledná jako v právě uvedeném příkladu. Funkce totiž nemusí v bodě a tečnu vůbec mít. Podívejte se na následující dva obrázky, kde taková situace nastává.

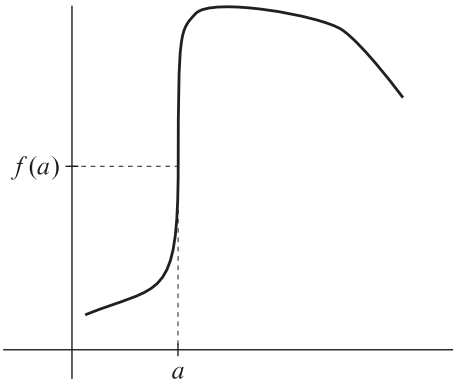


OBRÁZEK 10.



OBRÁZEK 11.

Další obrázek ukazuje případ, kdy derivace v bodě a není rovna reálnému číslu, ale je rovna $+\infty$. Derivace může být rovna i $-\infty$. Je-li derivace $+\infty$ nebo $-\infty$, pak hovoříme o **nevlastních** derivacích. Derivace je **vlastní**, pokud je rovna reálnému číslu. V další části textu se budeme pro jednoduchost zabývat pouze funkcemi, které mají vlastní derivaci v každém bodě svého definičního oboru.



OBRÁZEK 12.

2. POČETNÍ PRAVIDLA PRO DERIVACE

2.1. **Derivace elementárních funkcí.** Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Uvažujme konstantní funkci $f(x) = \alpha$. Zvolíme-li libovolně body $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, potom obdržíme

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\alpha - \alpha}{b - a} = 0.$$

Odtud dostáváme, že derivace funkce f je v bodě a rovna 0, tj. $f'(a) = 0$.

Uvažujme nyní komplikovanější funkci, konkrétně $f(x) = \alpha x + \beta$. Podobně jako v předchozím případě počítejme

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(\alpha b + \beta) - (\alpha a + \beta)}{b - a} = \frac{\alpha(b - a)}{b - a} = \alpha.$$

Zde opět derivační podíl $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nezávisí na b, takže můžeme snadno uzavřít, že $f'(a) = \alpha$.

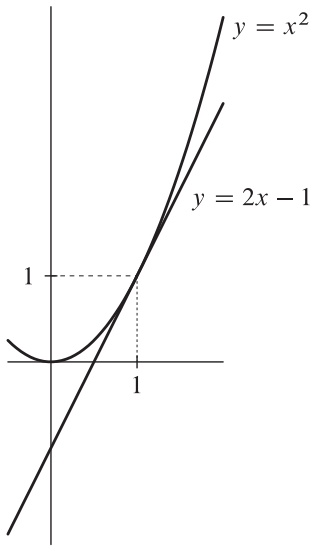
Ukažme si ještě jedno odvození výpočtu derivace funkce a to pro funkci $f(x) = x^2$. Pro $b \neq a$ je příslušný podíl roven

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a.$$

Pokud se nyní hodnota b přibližuje k hodnotě a, bude se hodnota $a + b$ blížit k $2a$. Máme tedy $f'(x) = 2x$. Derivace funkce f je tedy například v bodě 1 rovna 2. Rovnice tečny v bodě $[a, f(a)]$ má obecně tvar

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

V našem případě má tečna ke grafu funkce f v bodě $[1, 1]$ rovnici $y = 2(x-1)+1$, tj. $y = 2x-1$. Na obrázku je graf funkce f a graf právě vypočtené tečny.



OBRÁZEK 13.

Takto by bylo možné pokračovat i v případě dalších funkcí, výpočty by ale byly již složitější. Zde jsou uvedeny derivace některých důležitých funkcí:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha, & f'(x) &= 0,\\
f(x) &= x, & f'(x) &= 1,\\
f(x) &= e^x, & f'(x) &= e^x,\\
f(x) &= \ln x & f'(x) &= 1/x,\\
f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x,\\
f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\sin x,\\
f(x) &= x^n, n \in \mathbb{N}, & f'(x) &= nx^{n-1},\\
f(x) &= x^p, p \in \mathbb{R}, x > 0, & f'(x) &= px^{p-1}.
\end{aligned}
$$

Zajímavý je výsledek, který říká, že derivace funkce e^x je opět e^x. Tento fakt neznamená nic jiného než, že směrnice tečny ke grafu exponenciální funkce v bodě $[x, e^x]$ je rovna e^x.

2.2. **Aritmetika derivací a derivace složené funkce.** Pro výpočet derivace funkce jsou užitečná následující pravidla, která nám umožňují vypočítat derivaci součtu, součinu a podílu funkcí.

Tvrzení 1. *Předpokládejme, že v bodě $x \in \mathbb{R}$ mají funkce f a g vlastní derivace. Potom platí:*

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x),\\
(fg)'(x) &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x),\\
(f/g)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \text{ pokud } g(x) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Odvození těchto vztahů, zde provádět nebudeme. Ukažme si na konkrétních příkladech, jak uvedené vztahy aplikovat při výpočtu.

Příklad 2. Zderivujte funkci $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Řešení. Počítejme podle věty o derivaci součtu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_n x^n)' + (a_{n-1}x^{n-1})' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)' \\ &= n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 + 0. \end{aligned}$$

□

Příklad 3. Zderivujte funkci $f(x) = e^x \sin x + \frac{x}{1+x^2}$.

Řešení. Počítejme

$$\begin{aligned} \left(e^x \sin x + \frac{x}{1+x^2}\right)' &= (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' + \frac{(x)'(1+x^2) - x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x + \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= e^x(\sin x + \cos x) + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Postupně jsme použili právě uvedená pravidla pro derivování a také vztahy uvedené v předchozím paragrafu. □

Dalším užitečným vzorcem je vztah, který ukazuje jak počítat derivaci složené funkce.

Tvrzení 4 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$. Nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a $y_0 = g(x_0)$. Potom*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Výše uvedené výsledky umožňují počítat derivaci pro funkce z poměrně rozsáhlé třídy funkcí.

Příklad 5. Zderivujte funkci $h(x) = e^{\sin x}$.

Řešení. Funkce h je složením funkcí $f(y) = e^y$ a $g(x) = \sin x$. Derivace těchto funkcí mají tvar $f'(y) = e^y$ a $g'(x) = \cos x$. Podle předchozí věty potom platí

$$h'(x) = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot \cos x.$$

□

Příklad 6. Zderivujte funkci $h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $h(x) = x^x$.

Řešení. Funkci h nemůžeme derivovat ani jako polynom (exponent není konstantní), ani jako funkci exponenciálního typu (základ není konstantní). Je ale možné postupovat následovně.

$$h'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1).$$

□

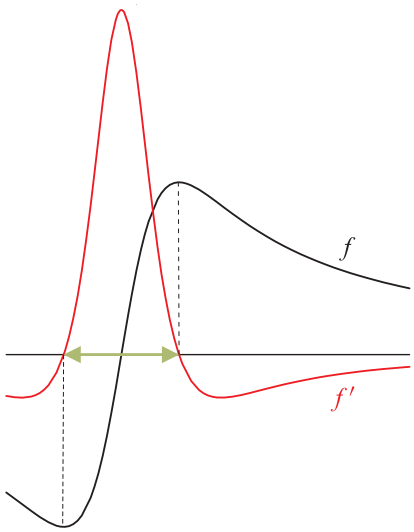
3. Použití derivací

3.1. **Hledání extrémů funkcí.** Jednou z důležitých úloh, ve kterých se derivace používají, je hledání extrémů funkcí. Následující tvrzení ukazuje jaký je vztah mezi znaménkem derivace a monotónií funkce.

Tvrzení 7 (znaménko derivace a monotónie)**.** *Nechť f má v každém bodě intervalu (a,b) derivaci.*

- *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak f je rostoucí na (a,b).*
- *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak f je klesající na (a,b).*
- *Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak f je neklesající na (a,b).*
- *Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, pak f je nerostoucí na (a,b).*

Následující obrázek ilustruje předchozí tvrzení. Porovnejte intervaly monotónie funkce f s intervaly, kde derivace nemění znaménko.

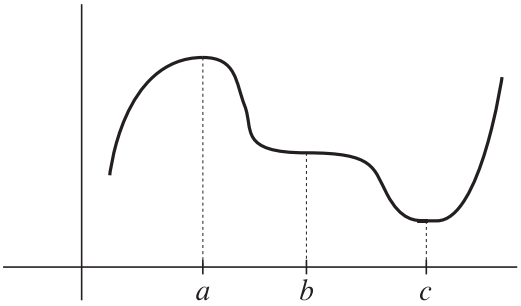


Obrázek 14.

Uveďme ještě jedno tvrzení užitečné při hledání extrémů funkce.

Tvrzení 8 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je bodem lokálního extrému funkce f. Jestliže existuje $f'(x_0)$, pak je $f'(x_0) = 0$.*

Právě uvedenému tvrzení je třeba správně rozumět. Pokud má funkce v nějakém bodě nulovou derivaci, pak to ještě neznamená, že je v tomto bodě lokální extrém funkce. Podívejte se na následující obrázek, kde v bodech a, b, c je derivace nulová, ale pouze v bodech a, c má funkce f lokální extrémy. V bodě b extrém není.



OBRÁZEK 15.

Příklad 9. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$.

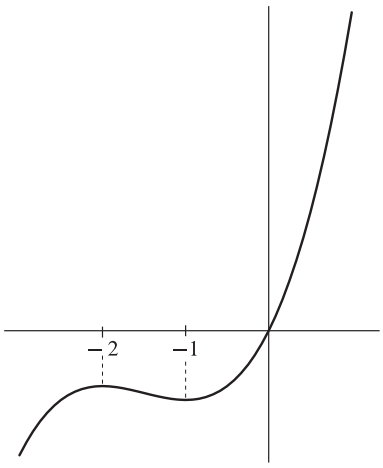
Řešení. Určíme nejprve derivaci uvažované funkce:

$$f'(x) = x^2 + 3x + 2.$$

V dalším kroku vyřešením kvadratické nerovnice určíme, kde je derivace kladná a kde záporná:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty),$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1).$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -2)$, $(-1, \infty)$ a klesající na intervalu $(-2, -1)$. Díky spojitosti funkce f pak dostáváme, že f má v -2 a -1 lokální extrémy. Žádné další extrémy funkce nemá.



OBRÁZEK 16.

□

Derivace mohou být použity i k důkazu některých nerovností, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 10. Nechť $a, b \in (0, \infty)$, $p, q \in (1, \infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Potom platí

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Nechť $b > 0$. Definujme pomocnou funkci $\varphi\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb.$$

Pro derivaci funkce φ platí

$$\varphi'(x) = x^{p-1} - b, \qquad x > 0.$$

Podívejme se nyní na znaménko derivace funkce φ. Zde platí

$$\begin{aligned} \varphi'(x) < 0 &\Leftrightarrow x \in (0, b^{1/(p-1)}), \\ \varphi'(x) > 0 &\Leftrightarrow x \in (b^{1/(p-1)}, \infty), \\ \varphi'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = b^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

To tedy znamená, že funkce φ je na intervalu $(0, b^{1/(p-1)})$ klesající a na intervalu $(b^{1/(p-1)}, \infty)$ rostoucí. Odtud a ze spojitosti funkce φ vyplývá, že φ nabývá v bodě $x = b^{1/(p-1)}$ svého minima. Dále platí $\varphi(b^{1/(p-1)}) = 0$. Odtud tedy plyne, že $\varphi(x) \geq 0$ pro každé $x \in (0, \infty)$, což dokazuje naši nerovnost. □

3.2. **Malthusův populační model.** Pro Newtona byly v jeho výzkumu hlavní motivací fyzikální problémy. Existuje obrovské množství fyzikálních úloh, které pracují s pojmem derivace. Fyzika ale není jedinou disciplínou, která ve svých modelech používá derivace. Podobně je tomu například v chemii nebo ekonomii. My si na závěr ukážeme dva modely z biologie.

Uvažujme nějakou izolovanou populaci, nechť $p(t)$ je počet jedinců této populace v čase t. Slovem izolovaná míníme, že nedochází ke stěhování z a do vnějšího světa. Takovou populací může být například kultura bakterií ve zkumavce. Předpokládejme, že přírůstek populace v krátkém čase je přímo úměrný velikosti populace (tj. počet bakterií, které se rozdělí je přímo úměrný jejich celkovému počtu, eventuálně počet narozených dětí je přímo úměrný počtu obyvatel). To znamená, že existuje konstanta $a > 0$, že přírůstek Δp za krátký časový úsek Δt je přibližně roven $a \cdot p \cdot \Delta t$. Pokud $\Delta t \to 0$, pak $\frac{\Delta p}{\Delta t} \to p'$. Tato přibližná úvaha vede na rovnici

$$p' = a \cdot p. \tag{1}$$

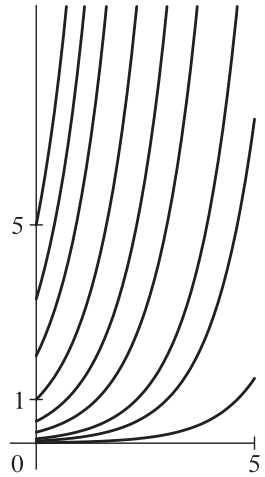
Zde jde o tzv. diferenciální rovnici. Hledáme funkci p, která by vyhovovala rovnici (1). Výklad metody, jak nalézt všechna řešení takové rovnice, již přesahuje rámec tohoto textu. Uveďme tedy bez odvození, že řešení mají tvar

$$p(t) = p(0) \cdot e^{at}. \tag{2}$$

Není ovšem obtížné ověřit, že funkce tvaru (2) opravdu řeší (1). Počítejme

$$p'(t) = p(0)ae^{at} = ap(t).$$

Protože jde o populaci, má smysl jen případ, kdy $p(0) > 0$, a navíc nás zajímá vývoj především do budoucna, tj. pro $t \geq 0$. Některá řešení (pro $a = 1$ a různé hodnoty $p(0)$) jsou znázorněna na obrázku.



OBRÁZEK 17. Malthusův populační model

Samozřejmě, že se můžeme dívat i do minulosti, tj. ptát se, jak velká byla populace před hodinou či před deseti lety. I to se můžeme dovědět z našeho řešení.

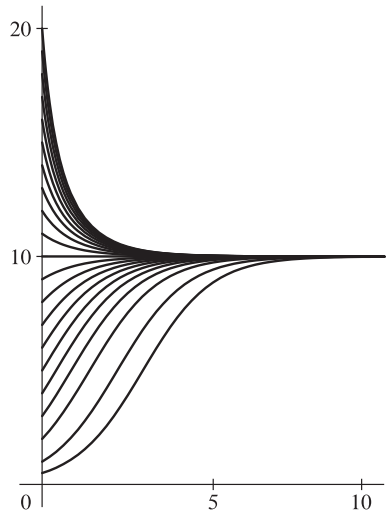
3.3. **Logistický populační model.** Ukazuje se, že Malthusův model dobře popisuje skutečnost, pokud populace není příliš velká (či přesněji příliš hustá). V hustých populacích se objevuje další faktor – konkurence. Tato skutečnost se projeví zpomalením růstu. Proto zahrneme do rovnice další člen, který bude přímo úměrný možnému počtu střetů, tj. p^2. To vede k diferenciální rovnici

$$p' = ap - bp^2, \tag{3}$$

kde a, b jsou kladné parametry. Parametr b bývá obvykle velmi malý vůči a. Tentokrát má řešení populačního modelu tvar

$$p(t) = \frac{ap(0)}{bp(0) + (a - bp(0))e^{-at}}.$$

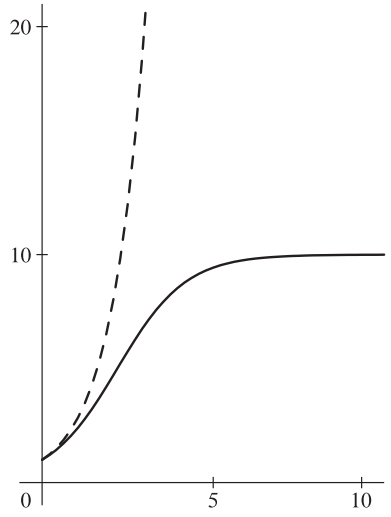
Tento vzorec opět ukazuje vývoj populace v závislosti na počátečním stavu. Některá řešení (pro různé hodnoty $p(0)$ a pro $a = 1$, $b = 1/10$) jsou znázorněna na následujícím obrázku.



OBRÁZEK 18. Logistický populační model

V tomto modelu je chování řešení komplikovanější. Pokud je velikost populace v čase 0 rovna a/b, potom je $p(t) = a/b$ pro všechna $t \geq 0$. V tomto případě se tedy populace nachází v rovnovážném stavu.

Pokud je ale počáteční stav populace menší než a/b, potom populace roste a limitně se blíží k rovnovážné hodnotě. Na obrázku vidíme porovnání Malthusova a logistického modelu. Pro malé (či přesněji nepříliš husté) populace tyto dva modely přibližně souhlasí.



OBRÁZEK 19. Srovnání populačních modelů

Pokud je počáteční velikost populace větší než a/b, potom populace klesá k rovnovážné hodnotě. K těmto závěrům můžeme ale dospět i bez toho, že bychom naši diferenciální rovnici explicitně vyřešili. Lze totiž postupovat také tak, že zkoumáme znaménko derivace. Je-li $p(t) \in (0, a/b)$ pro jisté $t > 0$, pak $ap(t) - bp^2(t) > 0$, a tedy $p'(t) > 0$. Podobně je-li $p(t) > a/b$, pak $ap(t) - bp^2(t) < 0$, a tedy $p'(t) < 0$.

Na závěr tohoto oddílu uveďme pro zajímavost, že v případě prvoka trepky velké (paramecium caudatum), který patří mezi nálevníky, jsou konstanty v logistickém modelu (za jistých podmínek) rovny $a = 2.309$, $b = a/375$. [3]

OBRÁZEK 20. Trepka velká

LITERATURA

[1] V. Hájková, O. John, O. Kalenda, M. Zelený, *Matematika*, Matfyzpress 2006.
[2] V. Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia 1984.
[3] J. Kopáček, *Matematická analýza nejen pro fyziky 1*, Matfyzpress 2004.
[4] M. Mareš, *Příběhy matematiky*, Pistorius & Olšanská 2008.

[3]Fotografii pořídil Giuseppe Vago, http://www.flickr.com/photos/giuseppevago/4937792231/.

Derivace a jejich použití

Domácí úlohy

1. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = x^2 + x^4$.

2. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = e^x \sin x$.

3. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right]$.

4. Nalezněte maximum funkce $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ na intervalu $[-2, 3]$.

5. Napište řešení diferenciální rovnice $y' = y$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 2$.

Řešení

1. $f'(x) = 2x + 4x^3$, $x \in \mathbb{R}$

2. $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

3. $y \mapsto \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $x \in \mathbb{R}$

4. Funkce f je polynom, takže nabývá na intervalu $[-2, 3]$ svého maxima. Po její derivaci platí $f'(x) = x^2 + 3x + 2$. Derivace f je rovna nule v bodech -2 a -1. Oba tyto body patří do intervalu $[-2, 3]$. Maxima se tedy musí nabývat v některém z těchto bodů nebo v krajních bodech intervalu $[-2, 3]$. Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že maxima se nabývá v bodě 3 a $f(3) = \frac{59}{2}$.

5. Řešením je funkce $y(x) = 2e^x$. (Tvar řešení rovnice $y' = y$ byl uveden v přednášce.)