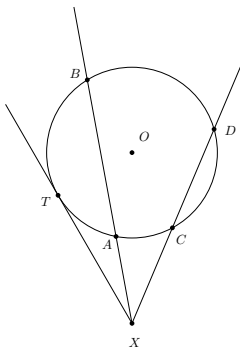
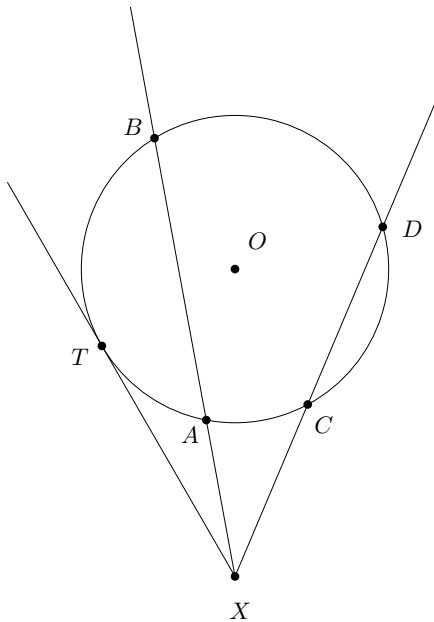


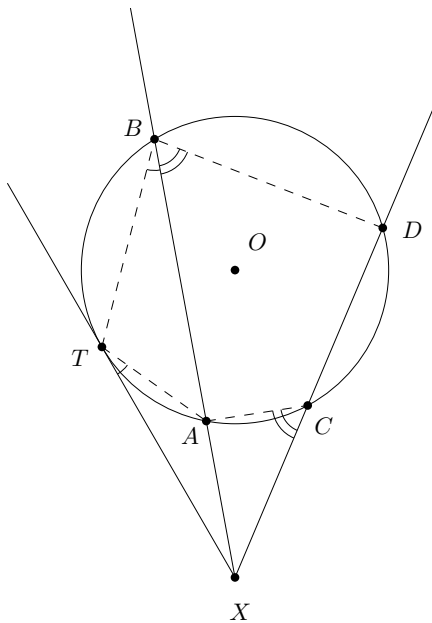
Mocnost

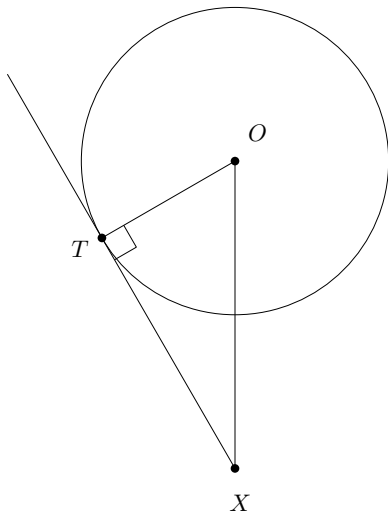
12. 3. 2021

Nechť k je kružnice a X bod mimo ní. Nechť p je pohyblivá přímka skrze X , která protíná k v A a B . Jak se chová součin $|XA| \cdot |XB|$?







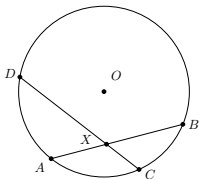


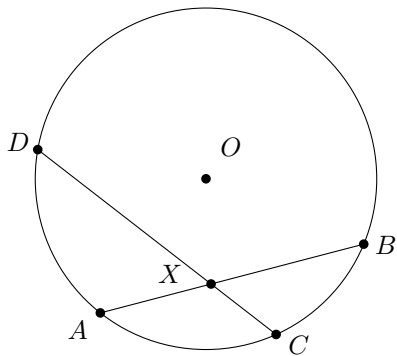
Tvrzení

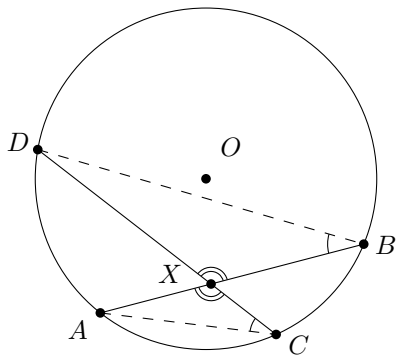
Nechť k je kružnice se středem O a poloměrem R a X bod ležící vně ní. Dvě různé přímky skrze X protínají k ve dvou dvojicích různých bodů A, B a C, D . Dále nechť T je bod dotyku tečny z X ke kružnici k s kružnicí k . Potom

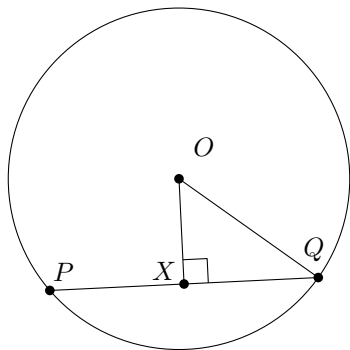
$$|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD| = |XT|^2 = |XO|^2 - R^2.$$

Co když X leží uvnitř kružnice?









Tvrzení

Nechť k je kružnice se středem O a poloměrem r a X bod ležící uvnitř ní. Dvě různé přímky skrze X protínají k ve dvou dvojicích různých bodů A, B a C, D . Potom

$$|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD| = R^2 - |XO|^2.$$

Definice

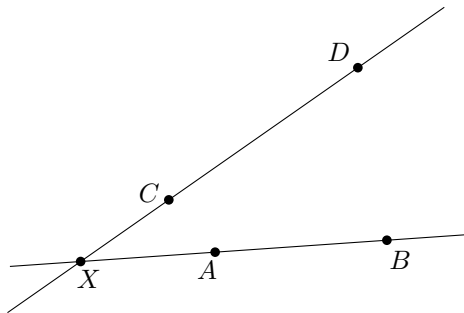
Nechť k je kružnice se středem O a poloměrem r . Pak jako *mocnost* bodu X ke kružnici k nazveme veličinu $|OX|^2 - R^2$.

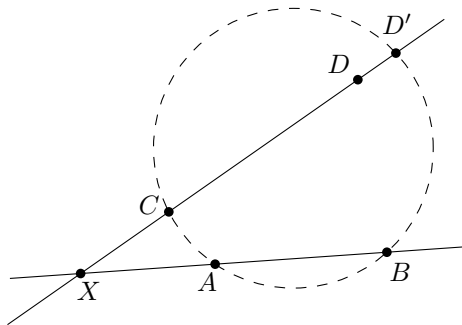
Definice

Nechť X , Y , Z jsou tři různé body ležící na jedné přímce. Pak jako $XY \cdot XZ$ označíme $|XY| \cdot |XZ|$ pokud Z leží na polopřímce XY a jako $-|XY| \cdot |XZ|$ pokud X leží mezi Y a Z .

Věta

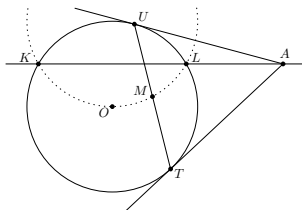
Nechť A, B, C, D, X jsou různé body v rovině takové, že X, A a B leží na jedné přímce a X, C a D leží na jedné přímce. Pak A, B, C, D leží na jedné kružnici právě tehdy, když $XA \cdot XB = XC \cdot XD$, a v tom případě je tato hodnota rovna mocnosti X ke kružnici opsané A, B, C, D . Pokud T je bod v rovině, pak $XT^2 = XA \cdot XB$ právě tehdy když XT je tečna ke kružnici opsané ABT .

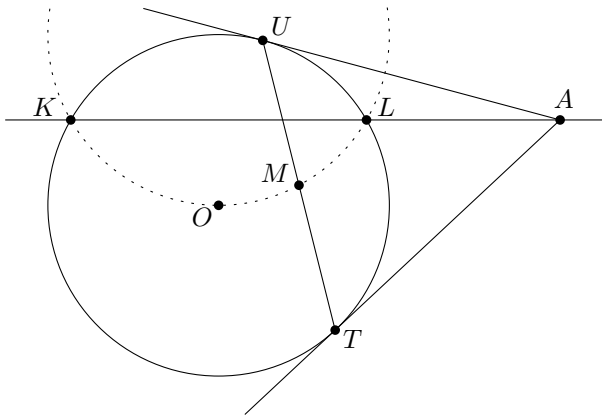


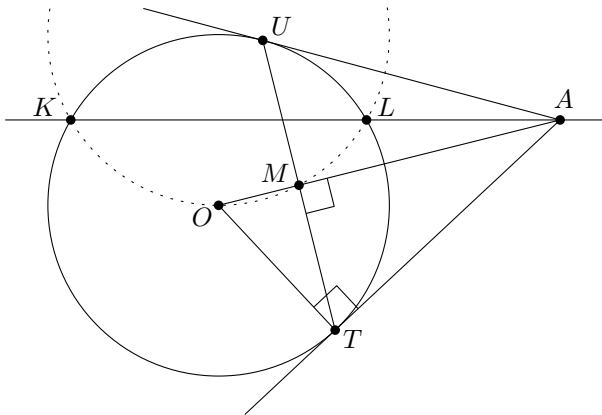


Příklad

Na kružnici k se středem O leží dva různé body K a L . Na polopřímce opačné k LK leží bod A . Necht' se tečny z A ke k dotýkají k v bodech T a U . Označme jako M střed úsečky TU . Ukažte, že pak body O , M , K a L leží na jedné kružnici.

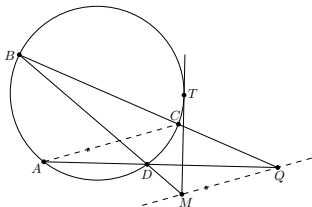


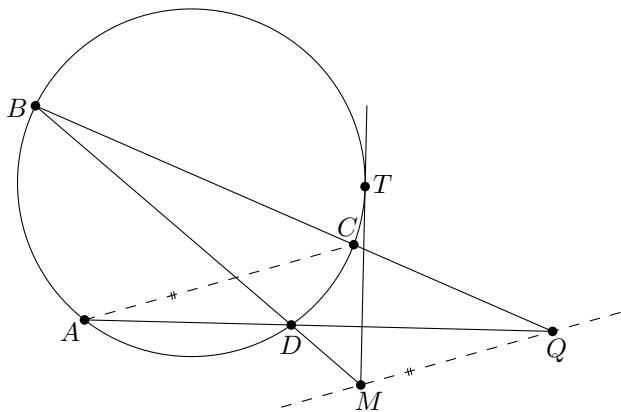




Příklad

Necht' $ABCD$ je tetivový čtyřúhelník. Označme jako Q průsečík přímk AD a BC . Necht' M je půsečík přímky BD s rovnoběžkou s AC procházející Q . Nakonec necht' T je bod dotyku tečny z M ke kružnici opsané $ABCD$. Ukažte, že $|MT| = |MQ|$.





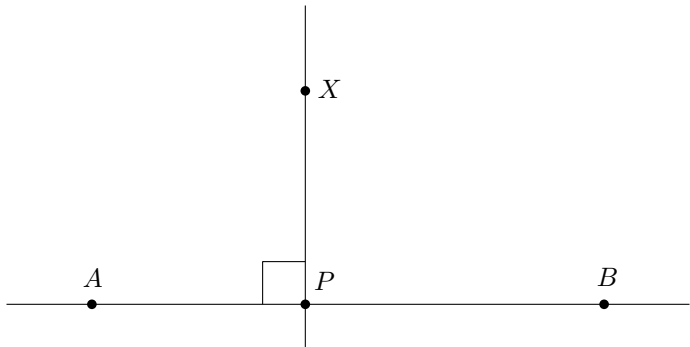


Definice

Nechť k a ℓ jsou dvě kružnice. Potom jako jejich *chordálu* označíme množinu těch bodů X , které mají stejnou mocnost ke k jako k ℓ .

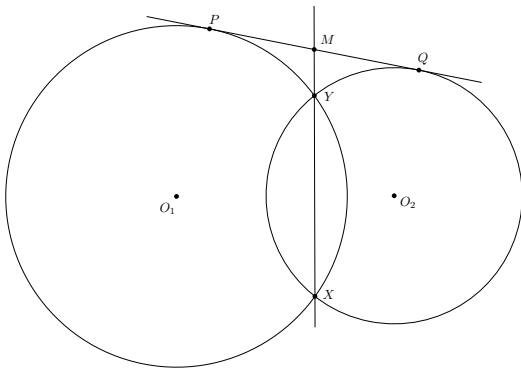
Věta

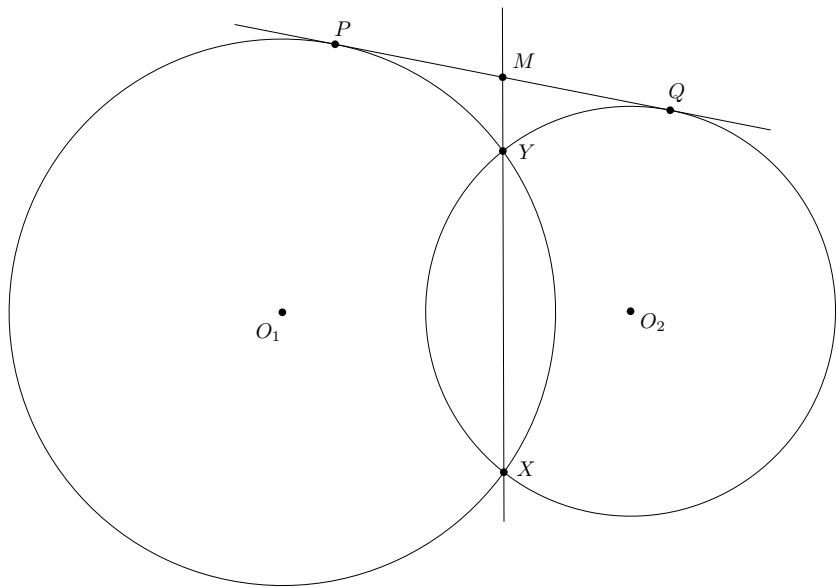
Nechť k a ℓ jsou dvě kružnice s různými středy. Potom chordála k a ℓ je přímka kolmá na spojnici středů k a ℓ .



Tvrzení

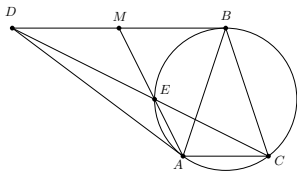
Kružnice k a ℓ se protínají ve dvou bodech X a Y . Společná tečna k a ℓ se jich dotýká v bodech P a Q . Potom přímka XY pólí úsečku PQ .

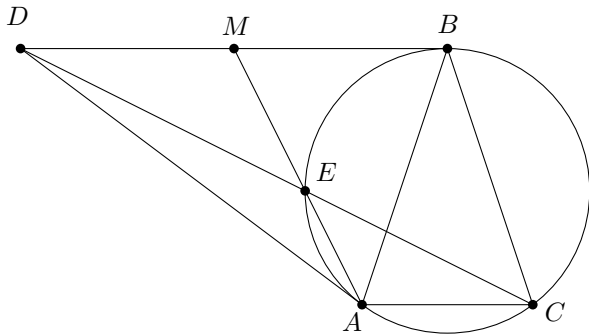


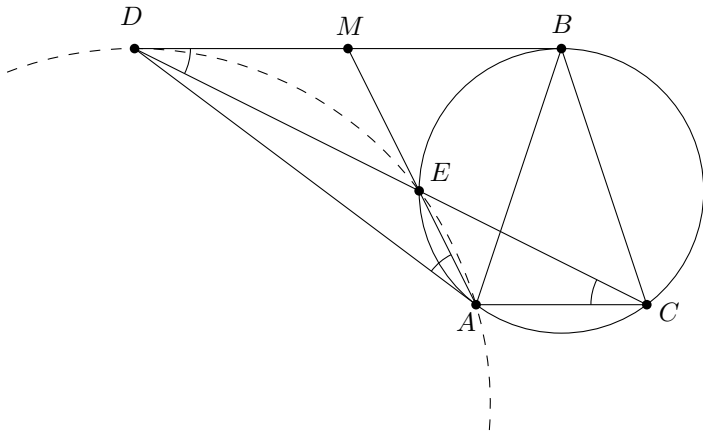


Příklad

Nechť ABC je trojúhelník s $|AB| = |BC|$. Označme jako D průsečík tečen v A a v B ke kružnici opsané ABC . Průsečík přímky DC s touto kružnicí označme jako E . Ukažte, že přímka AE půlí úsečku BD .

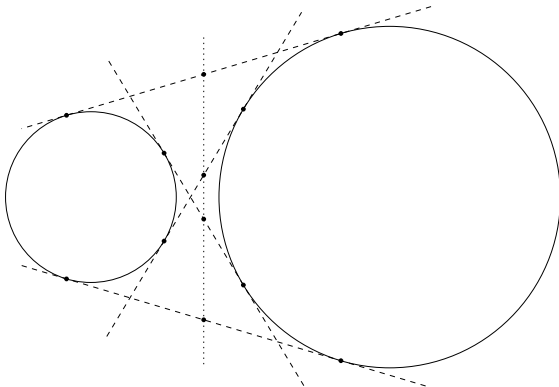


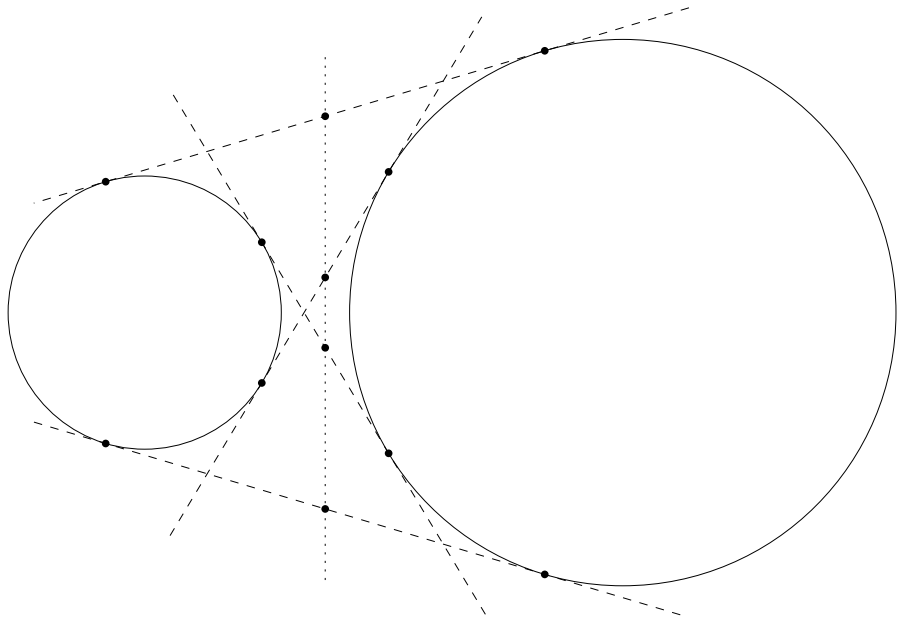




Příklad

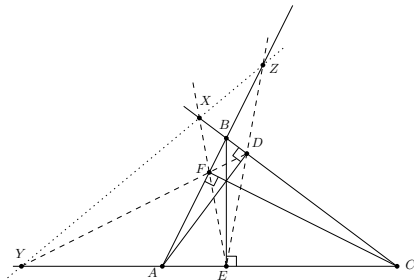
Nechť k a ℓ jsou dvě kružnice ležící vně sebe. Potom středy všech společných tečen k a ℓ leží na jedné přímce.

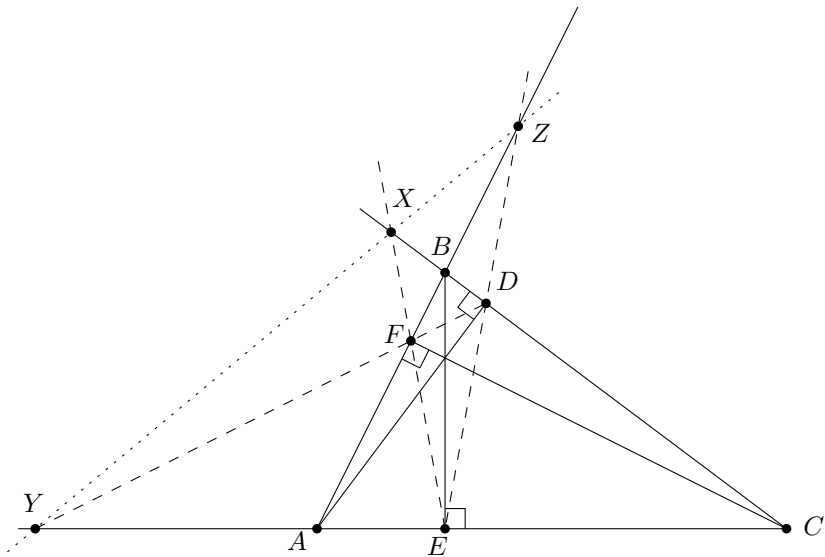




Příklad

Nechť ABC je různostranný ostroúhlý trojúhelník. Paty výšek z A , B a C označme jako D , E a F . Průsečík EF s BC , resp. FD s CA , resp. DE s AB , označíme jako X , resp. Y , resp. Z . Ukažte, že X , Y a Z leží na jedné přímce. (Na co je tato přímka kolmá?)

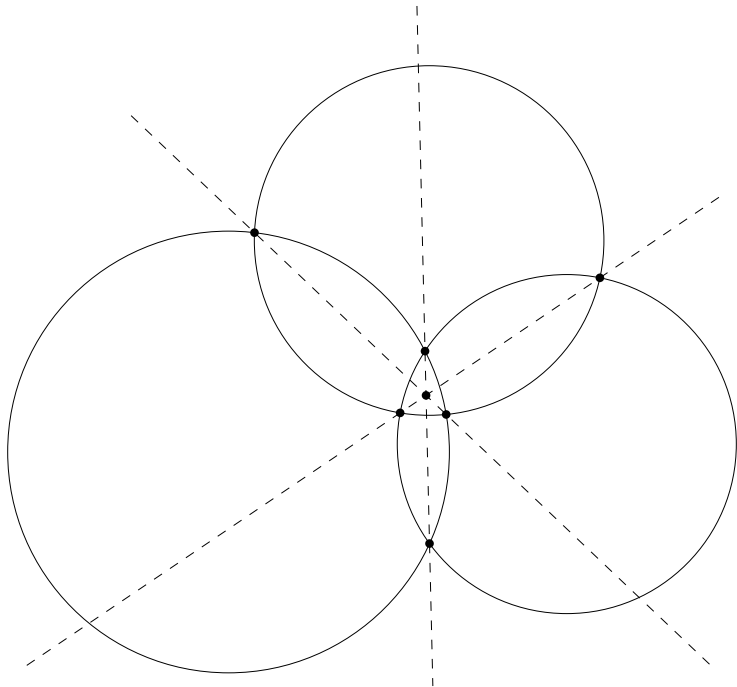






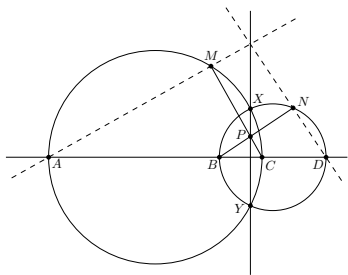
Tvrzení

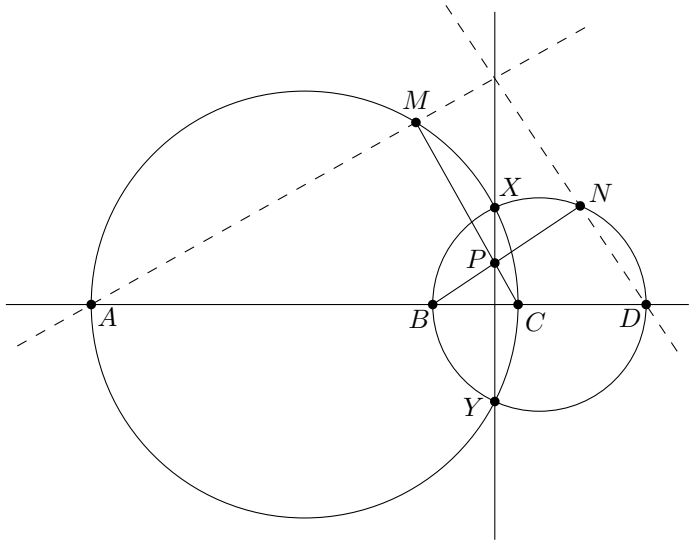
Nechť k , ℓ , m jsou tři kružnice, z nichž žádné dvě nesdílejí střed. Potom jsou buď všechny tři jejich chordály rovnoběžné, nebo prochází všechny jedním bodem.



Příklad

Nechť A, B, C a D jsou čtyři body ležící v tomto pořadí na přímce. Kružnice k a ℓ nad průměry AC a BD se protínají v bodech X a Y . Nechť P je bod na přímce XY . Označme jako M a N průsečík CP a BP s k a ℓ . Ukažte, že AM, DN a XY procházejí jedním bodem.

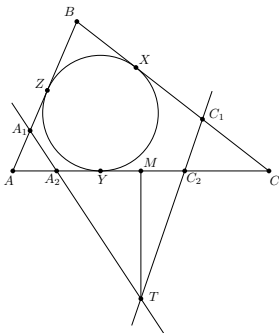


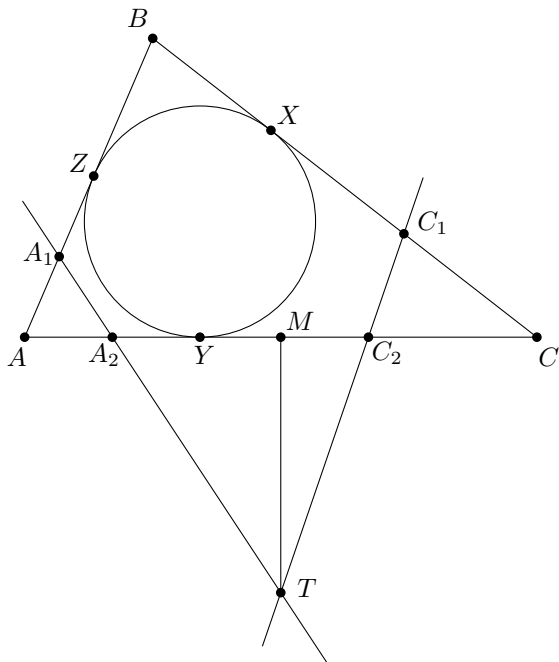




Příklad

Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran BC , CA a AB v bodech X , Y a Z . Označme jako A_1 , A_2 , C_1 , C_2 a M postupně středy úseček AZ , AY , CX , CY a AC . Necht' T je průsečík A_1A_2 a C_1C_2 . Ukažte, že $MT \perp AC$.





Další příklady:

Příklad

V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC , jejichž strana BC je průměrem kružnice k .

Příklad

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Body P, Q leží na stranách AC, AB . Označme K, L, M středy úseček BP, CQ, PQ . Předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku KLM se dotýká přímky PQ . Dokažte, že $|OP| = |OQ|$.

Příklad

Osa úhlu u vrcholu A protne protější stranu BC trojúhelníka ABC v D . Kružnice opsaná ADB protne AC podruhé v E , kružnice opsaná ADC protne AB podruhé v F . Dokažte, že $|BF| = |CE|$.

Další příklady:

Příklad

Kružnice ω protíná strany AB , BC , CD , DE , EA rovnostranného (ne nutně pravidelného) pětiúhelníka $ABCDE$ v bodech A_1 , A_2 , $\dots$, E_1 , E_2 .
Dokažte, že

$$|AA_1| + |BB_1| + \dots + |EE_1| = |A_2B| + |B_2C| + \dots + |E_2A|.$$

Příklad

Uvnitř úhlu AVB je dán bod P . Přímka skrz P protne VA , VB v X , Y .
Zkonstruuje přímku, pro kterou je součin $|PX| \cdot |PY|$ minimální.

Příklad

Je dána přímka p , kružnice k , která ji neprotíná, a bod M . Uvažme všechny kružnice, které se dotýkají p a mají vnější dotyk s k . Označme odpovídající body dotyku P a K . Dokažte, že středy kružnic opsaných všem trojúhelníkům PKM leží na přímce.

Další příklady:

Příklad

Uvažujme ty paraboly určené rovnicí $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, které protínají osy x, y ve třech různých bodech. Ke každé trojici průsečíků uvažme kružnici, která jimi prochází. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem.

Příklad

Nechť ABC je trojúhelník s ostrým úhlem u vrcholu A a označme M střed strany BC . Na AM zvolme bod D a zkonstruujme kružnice k, ℓ procházející bodem D , které se dotýkají přímky BC po řadě v bodech B, C . Přímka AB , resp. AC , protne kružnici k , resp. ℓ , podruhé v bodě P , resp. Q . Ukažte, že tečna ke kružnici k vedená bodem P a tečna ke kružnici ℓ vedená bodem Q se protínají na AM .

Příklad

Je dán trojúhelník ABC a I, O středy jeho vepsané a opsané kružnice. Označme A' průsečík přímky BC a kolmice na AI vedené bodem I . Body B', C' jsou definované podobně. Ukažte, že body A', B', C' leží v přímce, která je kolmá na OI .

Dobré zdroje:

Příspěvek *Mocnost a chordály* od Pepy Tkadlece:

prase.cz/library/MocnostAChordalyJT/MocnostAChordalyJT.pdf

Příspěvek *Mocnost bodu ke kružnici* od Pepy Tkadlece:

iksko.org/files/sbornik3.pdf

Článek *Power of a point* od Yufei Zhao:

yufeizhao.com/olympiad/power_of_a_point.pdf