Úloha 1.

Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvoumístná čísla.)

Úloha 1.

Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvoumístná čísla.)

- Chtěli bychom vědět vlastnosti součtů dvoumístných čísel

Úloha 1.

Z číslic 0 až 9 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, EF, GH, IJ, přičemž každou číslici použijeme právě jednou. Zjistěte, kolika různých hodnot může nabývat součet $AB + CD + EF + GH + IJ$ a které hodnoty to jsou. (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvoumístná čísla.)

- Chtěli bychom vědět vlastnosti součtů dvoumístných čísel
- Podívejme se první na dvě

Úloha N1.

Ze dvou různých číslic A, B vytvoříme dvoumístná čísla AB a BA. Dokažte, že jejich rozdíl je dělitelný 9.

Úloha N1.

Ze dvou různých číslic A, B vytvoříme dvoumístná čísla AB a BA. Dokažte, že jejich rozdíl je dělitelný 9.

$AB = 10A + B$ a $BA = 10B + A$

Úloha N1.

Ze dvou různých číslic A, B vytvoříme dvoumístná čísla AB a BA. Dokažte, že jejich rozdíl je dělitelný 9.

$AB = 10A + B$ a $BA = 10B + A$

$$AB - BA = 10A + B - 10B - A = 9A - 9B = 9(A - B)$$

Úloha N2.

Situaci ze soutěžní úlohy „zmenšíme“. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, přičemž každou číslici použijeme právě jednou.

a) Najděte nejmenší možnou a největší možnou hodnotu $AB + CD$.

b) Zjistěte nejmenší možný kladný rozdíl dvou takto vytvořených čísel $AB + CD$.

Úloha N2.

Situaci ze soutěžní úlohy „zmenšíme“. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, přičemž každou číslici použijeme právě jednou.

a) Najděte nejmenší možnou a největší možnou hodnotu $AB + CD$.

b) Zjistěte nejmenší možný kladný rozdíl dvou takto vytvořených čísel $AB + CD$.

Rozmysleme si, jak vypadá výraz

$AB + CD$

Úloha N2.

Situaci ze soutěžní úlohy „zmenšíme“. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, přičemž každou číslici použijeme právě jednou.

a) Najděte nejmenší možnou a největší možnou hodnotu $AB + CD$.

b) Zjistěte nejmenší možný kladný rozdíl dvou takto vytvořených čísel $AB + CD$.

Rozmysleme si, jak vypadá výraz

$AB + CD = 10A + B + 10C + D = 10(A + C) + (B + D)$.

Úloha N2.

Situaci ze soutěžní úlohy „zmenšíme“. Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvoříme dvoumístná čísla AB, CD, přičemž každou číslici použijeme právě jednou.
a) Najděte nejmenší možnou a největší možnou hodnotu $AB + CD$.
b) Zjistěte nejmenší možný kladný rozdíl dvou takto vytvořených čísel $AB + CD$.

Rozmysleme si, jak vypadá výraz
$AB + CD = 10A + B + 10C + D = 10(A + C) + (B + D)$.

Takže chceme, aby pro minimum byly na místě desítek cifry 1, 2 a pro maximum 3, 4. (Tedy maximum 73 a minimum 37).

Půjde dosáhnout všech čísel?

Půjde dosáhnout všech čísel? Co ta minulá návodná?

Půjde dosáhnout všech čísel? Co ta minulá návodná?

Vidíme, že výraz $10(A+C)+(B+D)$ má stejný zbytek po dělení 9 jako $A+B+C+D$ (v našem případě 1, protože $1+2+3+4=10$).

Půjde dosáhnout všech čísel? Co ta minulá návodná?

Vidíme, že výraz $10(A + C) + (B + D)$ má stejný zbytek po dělení 9 jako $A + B + C + D$ (v našem případě 1, protože $1 + 2 + 3 + 4 = 10$).

To znamená, že rozdíl je vždy dělitelný devíti.

Půjde dosáhnout všech čísel? Co ta minulá návodná?

Vidíme, že výraz $10(A+C)+(B+D)$ má stejný zbytek po dělení 9 jako $A+B+C+D$ (v našem případě 1, protože $1+2+3+4=10$).

To znamená, že rozdíl je vždy dělitelný devíti.

Teď už stačí jen najít příklad, kdy je rozdíl opravdu 9.

Půjde dosáhnout všech čísel? Co ta minulá návodná?

Vidíme, že výraz $10(A+C)+(B+D)$ má stejný zbytek po dělení 9 jako $A+B+C+D$ (v našem případě 1, protože $1+2+3+4=10$).

To znamená, že rozdíl je vždy dělitelný devíti.

Teď už stačí jen najít příklad, kdy je rozdíl opravdu 9.

Takže třeba $(12+43)-(12+34)=9$.

Půjde dosáhnout všech čísel? Co ta minulá návodná?

Vidíme, že výraz $10(A + C) + (B + D)$ má stejný zbytek po dělení 9 jako $A + B + C + D$ (v našem případě 1, protože $1 + 2 + 3 + 4 = 10$).

To znamená, že rozdíl je vždy dělitelný devíti.

Teď už stačí jen najít příklad, kdy je rozdíl opravdu 9.

Takže třeba $(12 + 43) - (12 + 34) = 9$.

Samozřejmě můžeme jich najít spoustu dalších.

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Stačilo by nám najít třeba minimum a maximum?

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Stačilo by nám najít třeba minimum a maximum?

No to teda ne, třeba čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12 mají minimum součtu 12 a maximum 30, ale rozhodně nenabývají žádného lichého čísla v tomto rozmezí, třeba 13.

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Stačilo by nám najít třeba minimum a maximum?

No to teda ne, třeba čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12 mají minimum součtu 12 a maximum 30, ale rozhodně nenabývají žádného lichého čísla v tomto rozmezí, třeba 13.

Takže oproti minulé úloze chceme ještě ukázat jak čísla konstruovat jedno po jednom (samozřejmě můžeme provést jiný důkaz, ale my nyní zkusíme tento).

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Vidíme, že $1 + 2 + 3 = 6$. Nyní můžeme u trojice $(1, 2, 3)$ zvyšovat poslední prvek od 3 do 6. Tím dostaneme číslo od 6 do 9.

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Vidíme, že $1 + 2 + 3 = 6$. Nyní můžeme u trojice $(1, 2, 3)$ zvyšovat poslední prvek od 3 do 6. Tím dostaneme číslo od 6 do 9.

Nyní můžeme to stejné udělat pro 2 a zvyšovat ji od 2 do 5.

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Vidíme, že $1 + 2 + 3 = 6$. Nyní můžeme u trojice $(1, 2, 3)$ zvyšovat poslední prvek od 3 do 6. Tím dostaneme číslo od 6 do 9.

Nyní můžeme to stejné udělat pro 2 a zvyšovat ji od 2 do 5.

A to stejné pro 1 od 1 do 3.

Úloha N3.

Z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 vybereme tři různá. Zdůvodněte, že jejich součet může nabývat kteréhokoliv celočíselné hodnoty od 6 do 15.

Vidíme, že $1 + 2 + 3 = 6$. Nyní můžeme u trojice $(1, 2, 3)$ zvyšovat poslední prvek od 3 do 6. Tím dostaneme číslo od 6 do 9.

Nyní můžeme to stejné udělat pro 2 a zvyšovat ji od 2 do 5.

A to stejné pro 1 od 1 do 3. Každá trojice nám dává o jedna vetší součet než ta minulá. Každá obsahuje různá čísla a minimum je 6 a maximum 15.

$(1, 2, 3) \to (1, 2, 4) \to (1, 2, 5) \to (1, 2, 6) \to (1, 3, 6) \to (1, 4, 6) \to (1, 5, 6) \to (2, 5, 6) \to (3, 5, 6) \to (4, 5, 6)$

Úloha D1.

Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách?

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3\overline{abc} + 6$$

Úloha D1.

Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách?

$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3\overline{abc} + 6$

Každá číslice na levé straně je dvakrát na místě jednotek, desítek i stovek. $222a + 222b + 222c = 300a + 30b + 3c + 6$

Úloha D1.

Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách?

$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3\overline{abc} + 6$

Každá číslice na levé straně je dvakrát na místě jednotek, desítek i stovek. $222a + 222b + 222c = 300a + 30b + 3c + 6$
$192b + 219c = 78a + 6$, $64b + 73c = 26a + 2$

Vidíme, že c je sudá číslice, tedy ≥ 2, navíc každá cifra každá cifra je nenulová, takže je ≥ 1. Potom po spodním odhadu levé strany poslední rovnosti dostáváme.

Úloha D1.

Honza má tři kartičky, na každé je jiná nenulová číslice. Součet všech trojmístných čísel, která lze z těchto kartiček sestavit, je číslo o 6 větší než trojnásobek jednoho z nich. Jaké číslice jsou na kartičkách?

$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3\overline{abc} + 6$

Každá číslice na levé straně je dvakrát na místě jednotek, desítek i stovek. $222a + 222b + 222c = 300a + 30b + 3c + 6$
$192b + 219c = 78a + 6$, $64b + 73c = 26a + 2$

Vidíme, že c je sudá číslice, tedy ≥ 2, navíc každá cifra každá cifra je nenulová, takže je ≥ 1. Potom po spodním odhadu levé strany poslední rovnosti dostáváme. $210 \leq 64b + 73c = 26a + 2$, což znamená, že $a \geq 8$. Pro $a = 8$ nám dává ale u nerovnosti rovnost, takže máme trojici $8, 1, 2$. Pro $a = 9$ máme $64b + 73c = 236$. Pokud se nyní znovu podíváme na tuto rovnost po dělení 4. Dostaneme, že $4 \mid c$, ale zároveň $c < 4$. Což je spor.

Úloha D2.

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

Úloha D2.

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

Dokážeme pokud vyškrtneme první čtyři cifry. A pak už řekneme, že je to jasný.

Úloha D2.

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

Dokážeme pokud vyškrtneme první čtyři cifry. A pak už řekneme, že je to jasný.

$N = 10^4 A + B$, kde ze zadání víme, že $10^4 A + B = 2019B$, tedy $5000A = 1009B$.

Úloha D2.

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

Dokážeme pokud vyškrtneme první čtyři cifry. A pak už řekneme, že je to jasný.

$N = 10^4 A + B$, kde ze zadání víme, že $10^4 A + B = 2019B$, tedy $5000A = 1009B$.

5000 a 2019 jsou nesoudělné, takže nutně $B = 5000$ a $A = 1009 \implies N = 10095000$.
Co když ale nechám první cifru ?

Úloha D2.

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

Tak to už bude podíl moc malý.

Úloha D2.

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

Tak to už bude podíl moc malý.

$N = 10^7 c + \cdots$ je původní číslo a $10^3 c + \cdots$ je číslo, které nám vzniklo. Toto číslo je určitě menší než $10^3(c+1)$. Poměr je tedy nanejvýš

Úloha D2.

Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší.

Tak to už bude podíl moc malý.

$N = 10^7 c + \cdots$ je původní číslo a $10^3 c + \cdots$ je číslo, které nám vzniklo. Toto číslo je určitě menší než $10^3(c+1)$. Poměr je tedy nanejvýš

$$\frac{N}{10^3(c+1)} \geq \frac{10^7 c}{10^3(c+1)} \geq 5000$$

$$\begin{aligned} \frac{10^7 c}{10^3(c+1)} &\geq 5000 \\ 10^7 c &\geq 5000 \cdot 10^3(c+1) \\ 2c &\geq c+1 \\ c &\geq 1 \end{aligned}$$

Úloha 2.

Jaká je největší možná hodnota výrazu $xy - x^3y - xy^3$, jsou-li x, y kladná reálná čísla? Pro která x, y se tato hodnota dosahuje?

Úloha N1.

Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla u, v platí nerovnost $\sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u+v)$, přitom rovnost v ní nastane, právě když $u = v$.

Úloha N1.

Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla u, v platí nerovnost $\sqrt{uv} \le \frac{1}{2}(u+v)$, přitom rovnost v ní nastane, právě když $u = v$.

$$\begin{aligned} \sqrt{uv} &\le \frac{1}{2}(u+v) \\ 4uv &\le (u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 \\ 0 &\le (u-v)^2 \end{aligned}$$

Úloha N1.

Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla u, v platí nerovnost $\sqrt{uv} \leq \frac{1}{2}(u+v)$, přitom rovnost v ní nastane, právě když $u = v$.

$$\begin{aligned}\sqrt{uv} &\leq \frac{1}{2}(u+v)\\ 4uv &\leq (u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2\\ 0 &\leq (u-v)^2\end{aligned}$$

Rovnost $u = v$. (Alternativně $u^2 + v^2 \geq 2uv$)

Úloha N2.

Najděte největší hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Ve všech výrazech písmena označují libovolná reálná čísla.

Úloha N2.

Najděte největší hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Ve všech výrazech písmena označují libovolná reálná čísla.

a) $\frac{1}{4}$ $t(1-t) = t - t^2 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$

Úloha N2.

Najděte největší hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Ve všech výrazech písmena označují libovolná reálná čísla.

a) $\frac{1}{4}$ $t(1-t) = t - t^2 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$

b) $t = uv$

Úloha N2.

Najděte největší hodnotu výrazu a) $t(1-t)$, b) $uv(1-uv)$, c) $(u^2+v^2)(1-u^2-v^2)$. Ve všech výrazech písmena označují libovolná reálná čísla.

a) $\frac{1}{4}$ $t(1-t) = t - t^2 = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2$

b) $t = uv$

c) $t = u^2 + v^2$

Úloha D1.

Pro reálná čísla a, b určete největší možnou hodnotu výrazu.

$$\frac{ab}{a^2 + b^2}$$

Úloha D1.

Pro reálná čísla a, b určete největší možnou hodnotu výrazu.

$$\frac{ab}{a^2 + b^2}$$

Co první návodná úloha?

Úloha D1.

Pro reálná čísla a, b určete největší možnou hodnotu výrazu.

$$\frac{ab}{a^2 + b^2}$$

Co první návodná úloha?

$2ab \leq a^2 + b^2$

Úloha D1.

Pro reálná čísla a, b určete největší možnou hodnotu výrazu.

$$\frac{ab}{a^2+b^2}$$

Co první návodná úloha?

$2ab \leq a^2 + b^2$

$$\frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{\frac{a^2+b^2}{2}}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$$

Úloha D1.

Pro reálná čísla a, b určete největší možnou hodnotu výrazu.

$$\frac{ab}{a^2+b^2}$$

Co první návodná úloha?

$2ab \leq a^2 + b^2$

$$\frac{ab}{a^2+b^2} \leq \frac{\frac{a^2+b^2}{2}}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}$$

Rovnost při $a = b$.

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(i) Dosadit a odhadnout

(ii) (Upravit) a odhadnout

(iii) Tipnout a odhadnout

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(i) Dosadit $b = 2 - a$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(i) Dosadit $b = 2 - a$

$$V = \frac{a^2 + (2-a)^2}{a(2-a) + 1} = \frac{2a^2 - 4a + 4}{-a^2 + 2a + 1} =$$

$$= -2 + \frac{6}{-a^2 + 2a + 1} = -2 + \frac{6}{-(a-1)^2 + 2}$$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(i) Dosadit $b = 2 - a$

$$V = \frac{a^2 + (2-a)^2}{a(2-a) + 1} = \frac{2a^2 - 4a + 4}{-a^2 + 2a + 1} =$$
$$= -2 + \frac{6}{-a^2 + 2a + 1} = -2 + \frac{6}{-(a-1)^2 + 2}$$

$0 \leq a \leq 2$, tedy $-1 \leq a - 1 \leq 1$ a $0 \leq (a-1)^2 \leq 1$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(i) Dosadit $b = 2 - a$

$$V = \frac{a^2 + (2-a)^2}{a(2-a)+1} = \frac{2a^2 - 4a + 4}{-a^2 + 2a + 1} =$$
$$= -2 + \frac{6}{-a^2 + 2a + 1} = -2 + \frac{6}{-(a-1)^2 + 2}$$

$0 \leq a \leq 2$, tedy $-1 \leq a - 1 \leq 1$ a $0 \leq (a-1)^2 \leq 1$
Minimum je $-2 + \frac{6}{2}$ a maximum $-2 + \frac{6}{1}$.

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

Co se dá odhadnout?

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

Co se dá odhadnout? $a + b$?

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

Co se dá odhadnout? $a + b$? ab? $0 \leq ab$.

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

Co se dá odhadnout? $a + b$? ab? $0 \leq ab$. $2 = a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a+b=2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

(ii)

Co se dá odhadnout? $a+b$? ab? $0 \leq ab$. $2=a+b \geq 2\sqrt{ab}$. $ab \leq 1$. První co můžu zkusit, je tupý odhad.

$$V=\frac{a^2+b^2}{ab+1} \geq \frac{2ab}{ab+1} \geq 2+\frac{-2}{ab+1} \geq 2+\frac{-2}{1+1}=1$$

Úloha D2. ((ii) pokracovani)

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

Úloha D2. ((ii) pokracovani)

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

$0 \leq ab \leq 1$. Jak odhadnout $a^2 + b^2$?

Úloha D2. ((ii) pokracovani)

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

$0 \leq ab \leq 1$. Jak odhadnout $a^2 + b^2$? pomocí ab to moc nejde

Úloha D2. ((ii) pokracovani)

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

$0 \leq ab \leq 1$. Jak odhadnout $a^2 + b^2$? pomocí ab to moc nejde
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2ab$.

Úloha D2. ((ii) pokracovani)

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

$0 \leq ab \leq 1$. Jak odhadnout $a^2 + b^2$? pomocí ab to moc nejde $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2ab$.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{4 - 2ab}{ab + 1} = -2 + \frac{6}{ab + 1} \leq -2 + \frac{6}{0 + 1} = 4$$

Úloha D2. ((ii) pokracovani)

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

(ii)

$0 \leq ab \leq 1$. Jak odhadnout $a^2 + b^2$? pomocí ab to moc nejde
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2ab$.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{4 - 2ab}{ab + 1} = -2 + \frac{6}{ab + 1} \leq -2 + \frac{6}{0 + 1} = 4$$

Co kdybych měl větší výrazy?
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ba^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

w

(iii)

Dosadím třeba krajní hodnoty $a = b = 1 \implies V = 1$ a $a = 0$ a $b = 2 \implies V = 4$.

Úloha D2.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a + b = 2$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

w

(iii)

Dosadím třeba krajní hodnoty $a = b = 1 \implies V = 1$ a $a = 0$ a $b = 2 \implies V = 4$.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} &\geq 1 \\ a^2 + b^2 &\geq ab + 1 \\ 4 - 2ab &\geq ab + 1 \\ 3 &\geq 3ab \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} &\leq 4 \\ a^2 + b^2 &\leq 4ab + 4 \\ 4 - 2ab &\leq 4ab + 4 \\ 0 &\leq 6ab \end{aligned}$$

Úloha D3.

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Úloha D3.

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Pořád používáme to AGčko, tak co to zkusit i tady?

Úloha D3.

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Pořád používáme to AGčko, tak co to zkusit i tady?

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &\geq 2ab \\
b^2 + c^2 &\geq 2bc \\
c^2 + a^2 &\geq 2ca \\
2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca \\
a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca
\end{aligned}
$$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

Tak co kdybychom se zase podívali, jestli neumíme odhadnout nějaké výrazy typu $a + b$, ab, atd..

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

Tak co kdybychom se zase podívali, jestli neumíme odhadnout nějaké výrazy typu $a + b$, ab, atd.. jak na ab?

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

Tak co kdybychom se zase podívali, jestli neumíme odhadnout nějaké výrazy typu $a + b$, ab, atd.. jak na ab?

$1 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, takže $ab \leq \frac{1}{2}$.

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

Tak co kdybychom se zase podívali, jestli neumíme odhadnout nějaké výrazy typu $a + b$, ab, atd.. jak na ab?

$1 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, takže $ab \leq \frac{1}{2}$.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1 + 2ab \implies (a + b)^2 \leq 1 + 2ab \leq 2$, takže $a + b \leq \sqrt{2}$.

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

Tak co kdybychom se zase podívali, jestli neumíme odhadnout nějaké výrazy typu $a + b$, ab, atd.. jak na ab?

$1 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, takže $ab \leq \frac{1}{2}$.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1 + 2ab \implies (a + b)^2 \leq 1 + 2ab \leq 2$, takže $a + b \leq \sqrt{2}$.

Triviálně taky $ab \geq 0$, takže i $a + b \geq 1$.

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

Tak co kdybychom se zase podívali, jestli neumíme odhadnout nějaké výrazy typu $a + b$, ab, atd.. jak na ab?

$1 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, takže $ab \leq \frac{1}{2}$.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 1 + 2ab \implies (a + b)^2 \leq 1 + 2ab \leq 2$, takže $a + b \leq \sqrt{2}$.

Triviálně taky $ab \geq 0$, takže i $a + b \geq 1$.

Ještě nás tam děsí to $a^4 + b^4$, co s ním?

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$(a^4 + b^4) = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$(a^4 + b^4) = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + ab + 1}{a + b} = \\ = \frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b}$$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \geq \frac{2 + 0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \leq \frac{2 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{5}{2}$$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \geq \frac{2 + 0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \leq \frac{2 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{5}{2}$$

Může ale nastat rovnost?

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

Může ale nastat rovnost?

$$ab(1 - 2ab) = \frac{1}{2}$$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

Může ale nastat rovnost?

$$ab(1 - 2ab) = \frac{1}{2}$$

Nepřipomíná to nějaký návodný příklad?

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

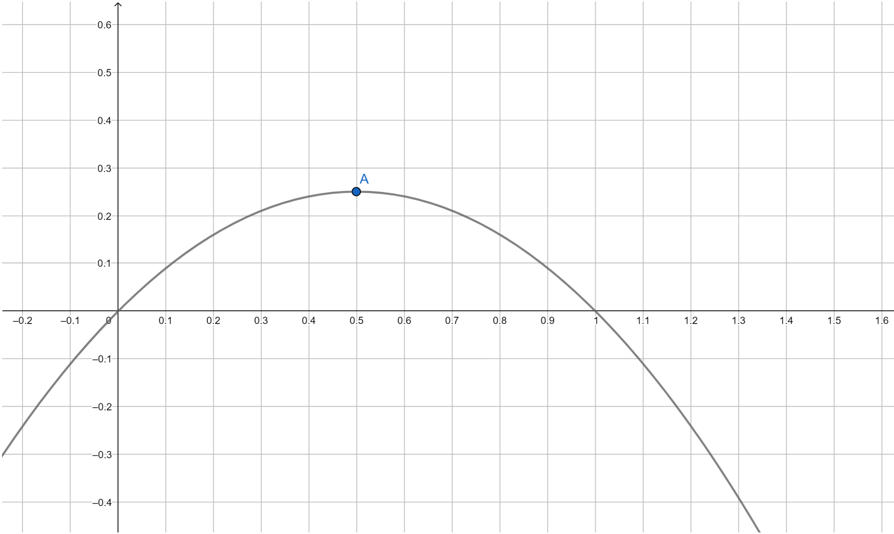
$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

Může ale nastat rovnost?

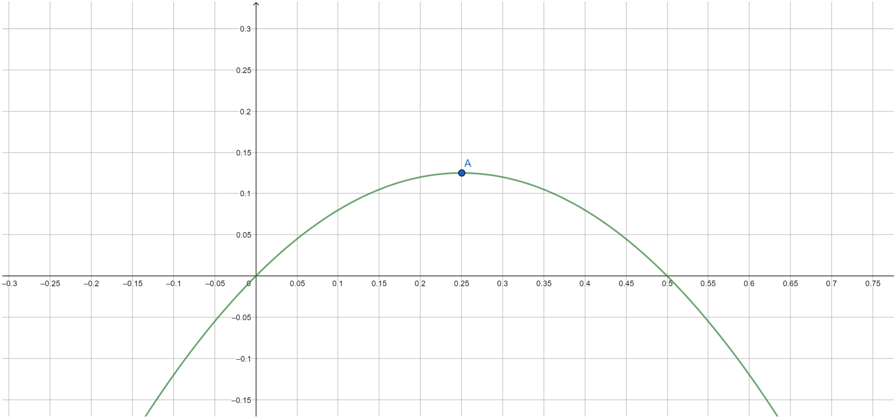
$$ab(1 - 2ab) = \frac{1}{2}$$

Nepřipomíná to nějaký návodný příklad? Třeba druhý?
$ab(1 - 2ab) = t(1 - 2t) = t - 2t^2 = \frac{1}{8} - (\frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2}t)^2 \leq \frac{1}{8}$

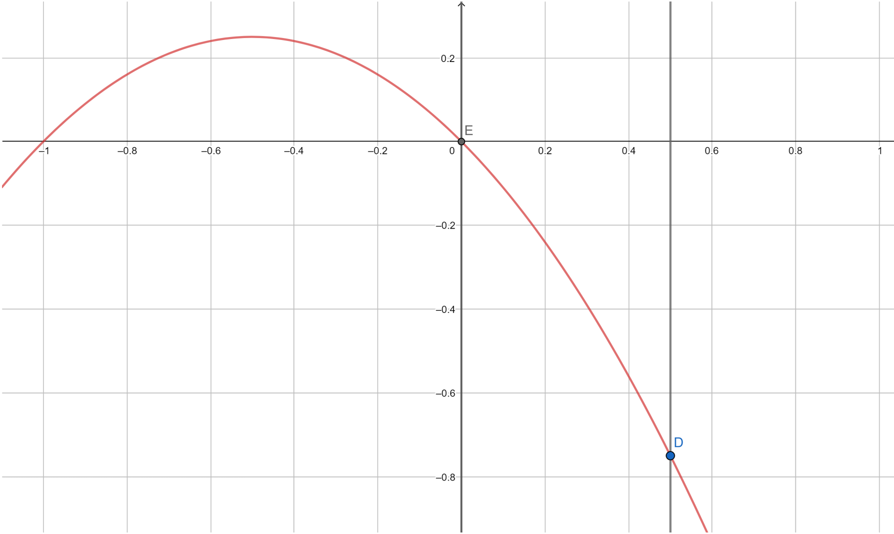
$t(1-t)$


A
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
–0.1
–0.2
–0.3
–0.4
–0.2
–0.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6

$t(1 - 2t)$


A
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
−0.05
−0.1
−0.15
−0.3 −0.25 −0.2 −0.15 −0.1 −0.05 0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75

$t(-1-t)$



Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \leq \frac{2 + \frac{1}{8}}{1} = \frac{17}{8}$$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \leq \frac{2 + \frac{1}{8}}{1} = \frac{17}{8}$$

Může ale nastat rovnost?

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \leq \frac{2 + \frac{1}{8}}{1} = \frac{17}{8}$$

Může ale nastat rovnost? Odhady, které jsme udělali nemohou nastat zároveň a to je problém.

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \leq \frac{2 + \frac{1}{8}}{1} = \frac{17}{8}$$

Může ale nastat rovnost? Odhady, které jsme udělali nemohou nastat zároveň a to je problém.

V případě $a + b$ nastává, když je jedno 1 a druhé 0, naopak u ab to bylo prvně v protichůdných příkladech a podruhé rozhodně ne v $(0, 1)$, nebo $(1, 0)$.

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2 + ab(1 - 2ab)}{a + b} \leq \frac{2 + \frac{1}{8}}{1} = \frac{17}{8}$$

Může ale nastat rovnost? Odhady, které jsme udělali nemohou nastat zároveň a to je problém.

V případě $a + b$ nastává, když je jedno 1 a druhé 0, naopak u ab to bylo prvně v protichůdných příkladech a podruhé rozhodně ne v $(0, 1)$, nebo $(1, 0)$. Chceme tedy vždy odhadovat členy, jejichž nerovnosti nemají různé řešení rovnosti. Protože rovnost je zásadní.

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b} = \frac{(a+b)(a^3+b^3) - a^3b - b^3a + ab + 1}{a+b}$$
$$= \frac{(a+b)(a^3+b^3) - ab(a^2+b^2) + ab + 1}{a+b} = a^3 + b^3 + \frac{1}{a+b}$$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b} = \frac{(a+b)(a^3 + b^3) - a^3 b - b^3 a + ab + 1}{a + b}$$
$$= \frac{(a+b)(a^3 + b^3) - ab(a^2 + b^2) + ab + 1}{a + b} = a^3 + b^3 + \frac{1}{a + b}$$

Co s těmi třetími mocninami?

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b} = \frac{(a+b)(a^3 + b^3) - a^3 b - b^3 a + ab + 1}{a + b}$$
$$= \frac{(a+b)(a^3 + b^3) - ab(a^2 + b^2) + ab + 1}{a + b} = a^3 + b^3 + \frac{1}{a + b}$$

Co s těmi třetími mocninami?

$a \leq 1 \implies a^2 \leq a \implies a^3 \leq a^2 \leq a$

Úloha D4.

Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší a největší možnou hodnotu výrazu.

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}$$

$1 \leq a + b \leq \sqrt{2}$ a $0 \leq ab \leq \frac{1}{2}$

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b} = \frac{(a+b)(a^3 + b^3) - a^3 b - b^3 a + ab + 1}{a + b}$$
$$= \frac{(a+b)(a^3 + b^3) - ab(a^2 + b^2) + ab + 1}{a + b} = a^3 + b^3 + \frac{1}{a + b}$$

Co s těmi třetími mocninami?

$a \leq 1 \implies a^2 \leq a \implies a^3 \leq a^2 \leq a$ a $a^3 + b^3 \leq a^2 + b^2 \leq a + b$

Úloha (KAGH nerovnost)

Můžeme nějak uspořádat tyto výrazy? $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Úloha (KAGH nerovnost)

Můžeme nějak uspořádat tyto výrazy? $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Ukažme, že pro kladná a, b, c platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} & \geq & \frac{a+b+c}{3} & \geq & \sqrt[3]{abc} & \geq & \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

a rovnost nastává, právě když $a = b = c$.

Úloha (KAGH nerovnost)

Můžeme nějak uspořádat tyto výrazy? $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Ukažme, že pro kladná a, b, c platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} & \geq & \frac{a+b+c}{3} & \geq & \sqrt[3]{abc} & \geq & \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\ =K & & =A & & =G & & =H \end{array}$$

a rovnost nastává, právě když $a = b = c$.

Dokážeme postupně.

AG nerovnost.

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0,\\
a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0,\\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}
$$

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0,\\
a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0,\\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}
$$

Pro čtyři proměnné:

$$
\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq
$$

$$
\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.
$$

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0, \\
a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0, \\
\frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.
\end{aligned}
$$

Pro čtyři proměnné:

$$
\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq
$$

$$
\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.
$$

Pro tři proměnné, nechť $m = \frac{a+b+c}{3}$:

$$
m = \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+m}{4} \geq \sqrt[4]{abcm},
$$

$$
m = \sqrt[3]{m^3} = \sqrt[3]{\frac{m^4}{m}} = \sqrt[3]{\frac{abcm}{m}} = \sqrt[3]{abc}.
$$

GH nerovnost.

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

KA nerovnost.

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$
$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

KA nerovnost. Ekvivalentně (máme nezáporné výrazy) upravíme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{a+b+c}{3}, \\
3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 = \\
&= (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca), \\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$
$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

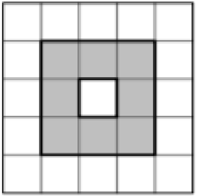
KA nerovnost. Ekvivalentně (máme nezáporné výrazy) upravíme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{a+b+c}{3}, \\
3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 = \\
&= (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca), \\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

To je ale jen součet AG pro (a^2, b^2), (b^2, c^2), (c^2, a^2).

Úloha 6.

Na plánu o rozměrech 12×12 čtverečků se nachází loď tvořená osmi políčky podél obvodu čtverce 3×3 (na obrázku je vyznačena šedou barvou). Na kolik nejméně políček je potřeba vystřelit, abychom s jistotou zasáhli loď alespoň jednou?

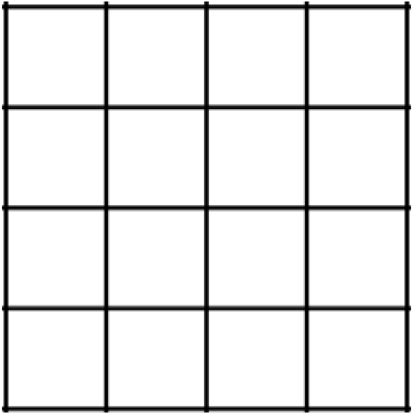


Úloha N1.

Soutěžní úlohu „zmenšíme“. Vyřešte postupně tři úlohy, ve kterých plán 12×12 nahradíme plánem a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6.

Úloha N1.

Soutěžní úlohu „zmenšíme“. Vyřešte postupně tři úlohy, ve kterých plán 12×12 nahradíme plánem a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6.

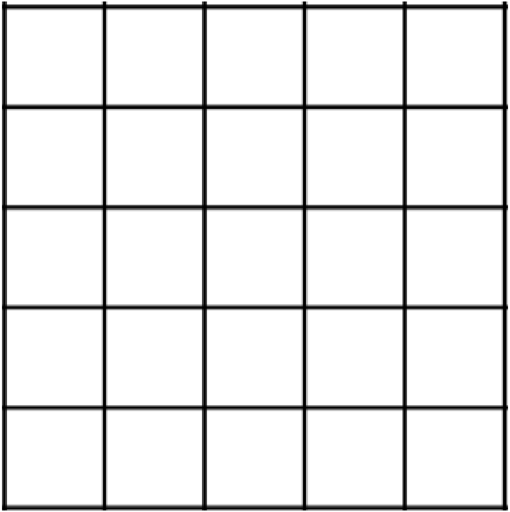


Úloha N1.

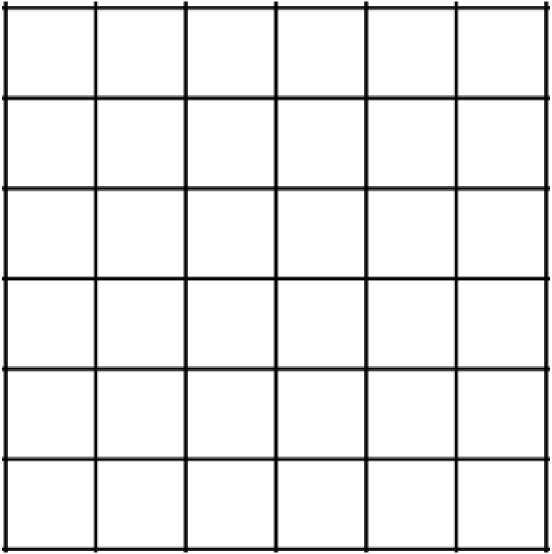
Soutěžní úlohu „zmenšíme“. Vyřešte postupně tři úlohy, ve kterých plán 12×12 nahradíme plánem a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6.

Úloha N1.

Soutěžní úlohu „zmenšíme“. Vyřešte postupně tři úlohy, ve kterých plán 12×12 nahradíme plánem a) 4×4, b) 5×5, c) 6×6.



Úloha N1.

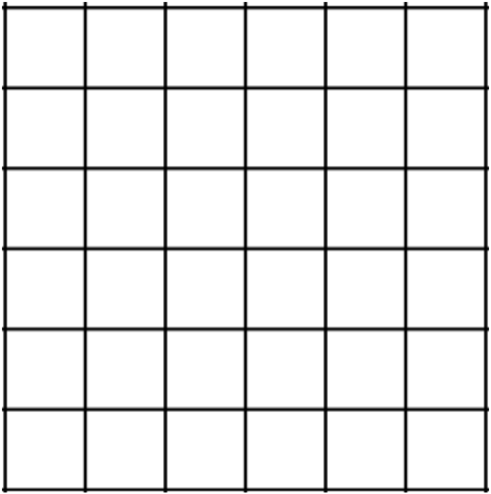


Úloha D1.

Na plánu o rozměrech 6×6 čtverečků se nachází loď tvaru čtverce 2×2. Zdůvodněte, že je potřeba nejméně 9 výstřelů, abychom měli jistotu, že jsme loď zasáhli.

Úloha D1.

Na plánu o rozměrech 6×6 čtverečků se nachází loď tvaru čtverce 2×2. Zdůvodněte, že je potřeba nejméně 9 výstřelů, abychom měli jistotu, že jsme loď zasáhli.

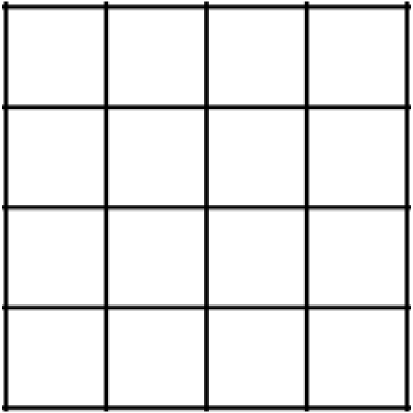


Úloha D2.

Určete, kolik je všech dvojic políček daného čtverce 4×4, jejichž zásahem dosáhneme s jistotou i zásah lodi ze zadání soutěžní úlohy, která je v tomto čtverci jakkoli umístěna.

Úloha D2.

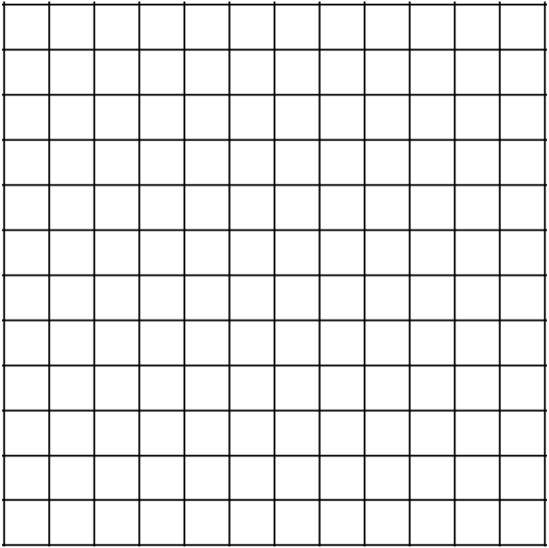
Určete, kolik je všech dvojic políček daného čtverce 4×4, jejichž zásahem dosáhneme s jistotou i zásah lodi ze zadání soutěžní úlohy, která je v tomto čtverci jakkoli umístěna.



Úloha D3.

Dokažte, že podmínku soutěžní úlohy je nemožné splnit tak, že celý plán 12×12 rozdělíme na 9 čtverců 4×4 a pak v každém z nich vystřelíme na dvě políčka, a to na stejných dvou místech ve všech 9 čtvercích.

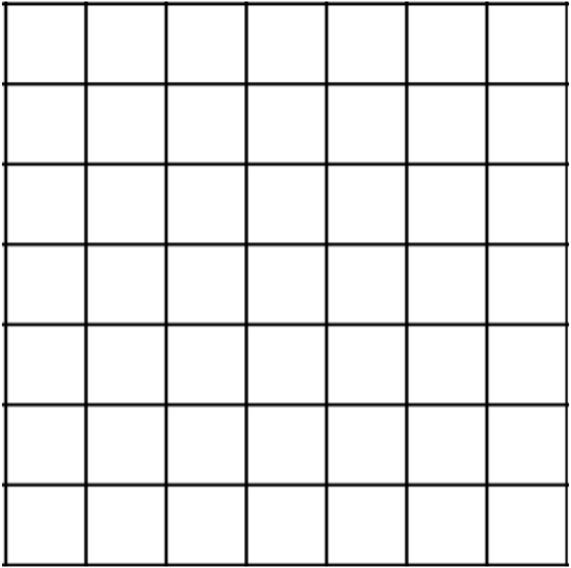
Úloha D3.



Úloha D4.

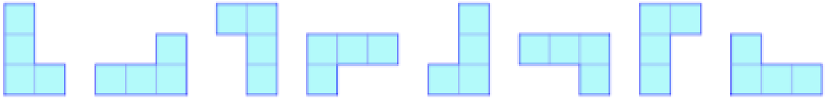
Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.

Úloha D4.



Úloha D5.

Na desce 5×5 hrajeme
hru lodě. Ze čtyř polí desky je vytvořena jedna loď některého z tvarů

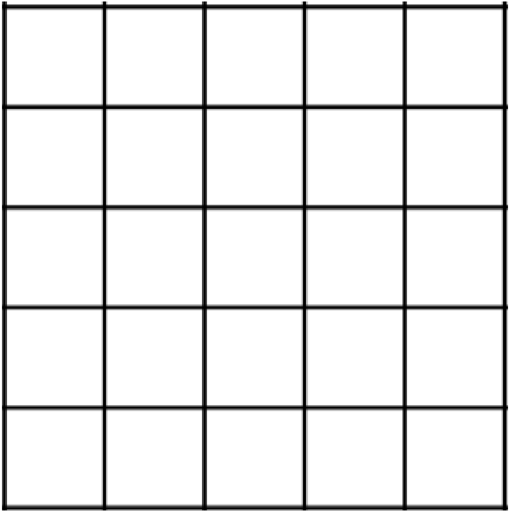


Můžeme se zeptat na libovolné pole desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí.

a) Navrhněte osm polí, na něž se stačí otázat, abychom měli jistotu zásahu lodě.

b) Zdůvodněte, že sedm otázek obecně takovou jistotu nedává.

Úloha D5.

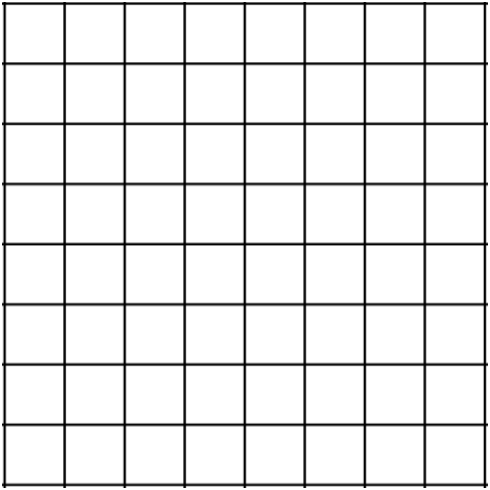


Úloha

Mějme šachovnici 8×8. Dokážeme jej pokrýt dominy 2×1? A co kdyby byly dva rohy na jedné straně?

Úloha

Mějme šachovnici 8×8. Dokážeme jej pokrýt dominy 2×1? A co kdyby byly dva rohy na jedné straně?

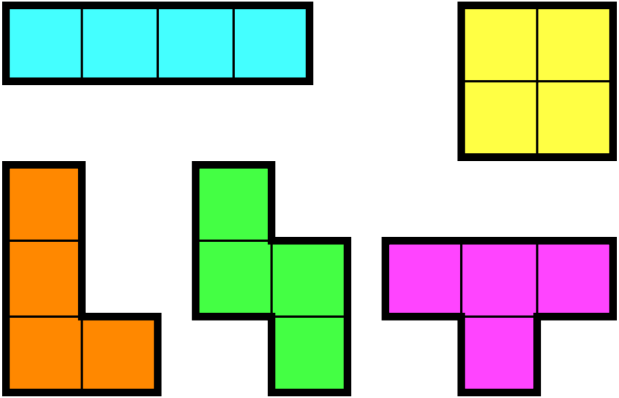


Úloha

Je možno z pěti tetramin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Úloha

Je možno z pěti tetramin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?



Úloha

Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?

Úloha

Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?