Motivace

Úloha 1.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + z = 2, \tag{1}$$

$$y^2 + z^2 + x = 2, \tag{2}$$

$$z^2 + x^2 + y = 2. \tag{3}$$

Úvod

Co bychom tak mohli s soustava dělat?

1. Dosadit
2. Sečíst nebo odečíst
3. Upravit na čtverce
4. Rozložit na součin
5. Odhadnout to nějakou známou nerovností - (K)AG(H), CS
6. Představit si, co se tam tak děje geometricky (analytika)
7. Podívat se, co se děje v extrémních bodech
8. Udělat nějakou hezkou/divnou substituci

Známe nerovnosti - (K)AG(H)

Ukažme, že pro kladná a, b, platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} & \geq & \frac{a+b}{2} & \geq & \sqrt{ab} & \geq & \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

Známe nerovnosti - (K)AG(H)

Ukažme, že pro kladná a, b, platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} & \geq & \frac{a+b}{2} & \geq & \sqrt{ab} & \geq & \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

Je možné rozšířit analogicky rozšířit na více prvků (viz další slide).
Pojďme to tedy vyřešit pro AG (analogicky pro ostatní).

Známe nerovnosti - (K)AG(H)

Ukažme, že pro kladná a, b, platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} & \geq & \frac{a+b}{2} & \geq & \sqrt{ab} & \geq & \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

Je možné rozšířit analogicky rozšířit na více prvků (viz další slide).
Pojďme to tedy vyřešit pro AG (analogicky pro ostatní).

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \\ a+b &\geq 2\sqrt{ab} \\ (a+b)^2 &\geq 4ab \\ a^2+2ab+b^2 &\geq 4ab \\ a^2+b^2 &\geq 2ab \\ (a-b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Úvodní příklady

Úloha 2.
Pro kladná a, b ukažte, že $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Úvodní příklady

Úloha 2.

Pro kladná a, b ukažte, že $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab \cdots$$

Úvodní příklady

Úloha 3.

Pro kladná a, b, c ukažte, že $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Úvodní příklady

Úloha 3.

Pro kladná a, b, c ukažte, že $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca \\
2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca \\
(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Bonus

Úloha (KAGH nerovnost)

Můžeme nějak uspořádat tyto výrazy? $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, $\frac{a+b+c}{3}$, $\sqrt[3]{abc}$, $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$.

Ukažme, že pro kladná a, b, c platí

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} & \geq & \frac{a+b+c}{3} & \geq & \sqrt[3]{abc} & \geq & \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \\ = K & & = A & & = G & & = H \end{array}$$

a rovnost nastává, právě když $a = b = c$.

Dokážeme postupně.

Bonus

AG nerovnost. Pro dvě proměnné:

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0,\\ a+b-2\sqrt{ab} &\geq 0,\\ \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

Pro čtyři proměnné:

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq$$
$$\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Pro tři proměnné, nechť $m = \frac{a+b+c}{3}$:

$$m = \frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+m}{4} \geq \sqrt[4]{abcm},$$
$$m = \sqrt[3]{m^3} = \sqrt[3]{\frac{m^4}{m}} \geq \sqrt[3]{\frac{abcm}{m}} = \sqrt[3]{abc}.$$

Bonus

GH nerovnost. Aplikujeme AG na $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}},$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

KA nerovnost. Ekvivalentně (máme nezáporné výrazy) upravíme:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} &\geq \frac{a+b+c}{3}, \\
3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2 = \\
&= (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca), \\
a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

To je ale jen součet AG pro (a^2, b^2), (b^2, c^2), (c^2, a^2).

Známe nerovnosti - CS

Pro každé dvě n-tice $a_1, \ldots, a_n \in$ a $b_1, \ldots, b_n \in$ platí

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $a_1 = \lambda b_1, \ldots, a_n = \lambda b_n$.

Známe nerovnosti - CS

Úloha 4.

Pro kladná reálná a_i dokažte

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Známe nerovnosti - CS

Úloha 5.

Pro kladná reálná a_i dokažte

$$n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + \cdots + a_n)^2$$

Známe nerovnosti - CS

Úloha 5.

Pro kladná reálná a_i dokažte

$$n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + \cdots + a_n)^2$$

$$(1^2 + \cdots + 1^2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \geq (a_1 + \cdots + a_n)^2$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y, \tag{4}$$

$$y^2 + 1 = 2x. \tag{5}$$

Úvod

Co bychom tak mohli s soustava dělat?

1. Dosadit
2. Sečíst nebo odečíst
3. Upravit na čtverce
4. Rozložit na součin
5. Odhadnout to nějakou známou nerovností - (K)AG(H), CS
6. Představit si, co se tam tak děje geometricky (analytika)
7. Podívat se, co se děje v extrémních bodech
8. Udělat nějakou hezkou/divnou substituci

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 2y, \\
y^2 + 1 &= 2x.
\end{aligned}
$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

$$\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2 + 1 = 2x$$

$$x^4 + 2x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$(x-1)^2(x^2+2x+5) = 0$$

$$(x; y) = (1; 1)$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2y - 2x \\ (x-y)(x+y) &= 2(y-x) \\ (x-y)(x+y) + 2(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y+2) &= 0 \end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2y - 2x \\ (x-y)(x+y) &= 2(y-x) \\ (x-y)(x+y) + 2(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y+2) &= 0 \end{aligned}$$

1) $x = y$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2y - 2x \\ (x-y)(x+y) &= 2(y-x) \\ (x-y)(x+y) + 2(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y+2) &= 0 \end{aligned}$$

1) $x = y$ a 2) $x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x - 2$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2y - 2x \\ (x - y)(x + y) &= 2(y - x) \\ (x - y)(x + y) + 2(x - y) &= 0 \\ (x - y)(x + y + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2y - 2x \\ (x-y)(x+y) &= 2(y-x) \\ (x-y)(x+y) + 2(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y+2) &= 0 \end{aligned}$$

1) $x = y$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2y - 2x \\ (x-y)(x+y) &= 2(y-x) \\ (x-y)(x+y) + 2(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y+2) &= 0 \end{aligned}$$

1) $x = y$ a 2) $x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x - 2$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 2y, \\ y^2 + 1 &= 2x. \end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

$$\begin{aligned}(x^2+1)+(y^2+1) &= 2y+2x\\ (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) &= 0\\ (x-1)^2+(y-1)^2 &= 0\end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

$$\begin{aligned}(x^2+1)+(y^2+1) &= 2y+2x\\ (x^2-2x+1)+(y^2-2y+1) &= 0\\ (x-1)^2+(y-1)^2 &= 0\end{aligned}$$

$x = y = 1$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 2y, \\
y^2 + 1 &= 2x.
\end{aligned}
$$

Kladná čísla?

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 2y, \\
y^2 + 1 &= 2x.
\end{aligned}
$$

Kladná čísla? AG?

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Kladná čísla? AG?

$$2x \leq x^2 + 1 = 2y,$$
$$2y \leq y^2 + 1 = 2x.$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Kladná čísla? AG?

$$2x \leq x^2 + 1 = 2y,$$
$$2y \leq y^2 + 1 = 2x.$$

$$x \geq y \geq x$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Kladná čísla? AG?

$$2x \leq x^2 + 1 = 2y,$$
$$2y \leq y^2 + 1 = 2x.$$

$$x \geq y \geq x$$

$$x = y$$

Soustavy

Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Soustavy

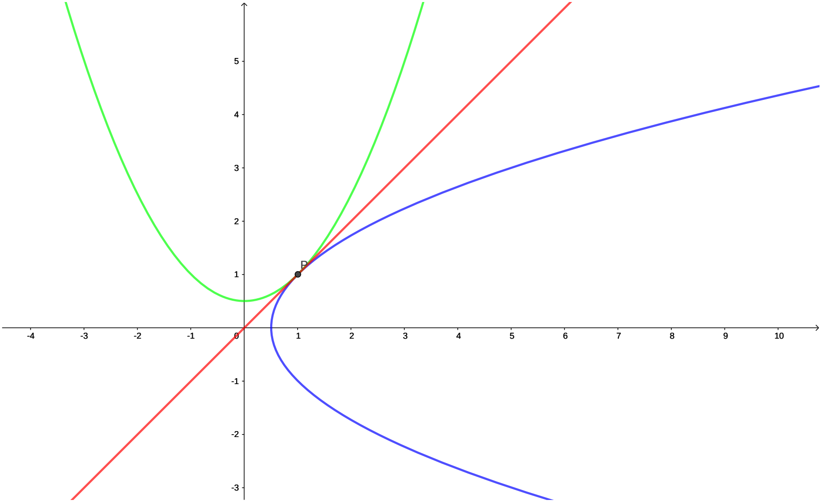
Úloha 6.

V oboru reálných čísel řešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$
$$y^2 + 1 = 2x.$$

Obrazkém?

Paraboly



Soustavy

Úloha 7.

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 3 = z, \tag{6}$$

$$y^2 - 3z + 4 = x, \tag{7}$$

$$z^2 - 3x + 5 = y. \tag{8}$$

Soustavy

Úloha 7.

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 3 = z, \tag{6}$$

$$y^2 - 3z + 4 = x, \tag{7}$$

$$z^2 - 3x + 5 = y. \tag{8}$$

Rozdíl?

Soustavy

Úloha 7.

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 3 = z, \tag{6}$$

$$y^2 - 3z + 4 = x, \tag{7}$$

$$z^2 - 3x + 5 = y. \tag{8}$$

Rozdíl? Součet?

Soustavy

Úloha 7.

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 3 = z, \tag{6}$$
$$y^2 - 3z + 4 = x, \tag{7}$$
$$z^2 - 3x + 5 = y. \tag{8}$$

Rozdíl? Součet?

$$\begin{aligned}(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) &= 0\\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 &= 0\end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 8.

V oboru nezáporných reálných čísel vyřešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
a + b &= c^2, \\
b + c &= d^2, \\
c + d &= e^2, \\
d + e &= a^2, \\
e + a &= b^2.
\end{aligned}
$$

Soustavy

Úloha 8.

V oboru nezáporných reálných čísel vyřešte (cyklickou) soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
a + b &= c^2,\\
b + c &= d^2,\\
c + d &= e^2,\\
d + e &= a^2,\\
e + a &= b^2.
\end{aligned}
$$

Co ten extremální princip?

Soustavy

Označme $K = \max\{a, b, c, d, e\}$ a analogicky $L = \min\{a, b, c, d, e\}$.

Soustavy

Označme $K = \max\{a, b, c, d, e\}$ a analogicky $L = \min\{a, b, c, d, e\}$.

$$K^2 = x_i + x_{i+1} \leq K + K = 2K \quad L^2 = x_j + x_{j+1} \geq L + L = 2L$$

Soustavy

Označme $K = \max\{a, b, c, d, e\}$ a analogicky
$L = \min\{a, b, c, d, e\}$.

$$K^2 = x_i + x_{i+1} \leq K + K = 2K \quad L^2 = x_j + x_{j+1} \geq L + L = 2L$$

$$K(K-2) \leq 0 \quad L(L-2) \geq 0$$

Soustavy

Označme $K = \max\{a, b, c, d, e\}$ a analogicky $L = \min\{a, b, c, d, e\}$.

$$K^2 = x_i + x_{i+1} \leq K + K = 2K \quad L^2 = x_j + x_{j+1} \geq L + L = 2L$$

$$K(K-2) \leq 0 \quad L(L-2) \geq 0$$

Co když je jedno nula?

Soustavy

Označme $K = \max\{a, b, c, d, e\}$ a analogicky $L = \min\{a, b, c, d, e\}$.

$$K^2 = x_i + x_{i+1} \leq K + K = 2K \quad L^2 = x_j + x_{j+1} \geq L + L = 2L$$

$$K(K-2) \leq 0 \quad L(L-2) \geq 0$$

Co když je jedno nula?

$$K \leq 2 \quad L \geq 2$$

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{9}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{10}$$

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{9}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{10}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$$

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{11}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{12}$$

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{11}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{12}$$

Co geometrie?

Soustavy

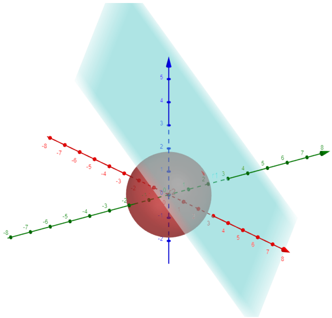
Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{11}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{12}$$

Co geometrie?



Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{13}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{14}$$

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{13}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{14}$$

Co nerovnosti?

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{13}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{14}$$

Co nerovnosti? Co CS?

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{13}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{14}$$

Co nerovnosti? Co CS?

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x + y + z)^2$$

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{13}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{14}$$

Co nerovnosti? Co CS?

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x + y + z)^2$$

Co z toho plyne?

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{13}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{14}$$

Co nerovnosti? Co CS?

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x + y + z)^2$$

Co z toho plyne? $x = \lambda \cdot 1$, $y = \lambda \cdot 1$, $z = \lambda \cdot 1$

Soustavy

Úloha 9.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 3, \tag{13}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3. \tag{14}$$

Co nerovnosti? Co CS?

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x + y + z)^2$$

Co z toho plyne? $x = \lambda \cdot 1$, $y = \lambda \cdot 1$, $z = \lambda \cdot 1$
$x = y = z = 1$.

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\
y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\
z^4 + x^2 + 4 &= 5xy.
\end{aligned}
$$

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

Co nerovnosti?

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\
y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\
z^4 + x^2 + 4 &= 5xy.
\end{aligned}
$$

Co nerovnosti? Co AG?

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz,$$
$$y^4 + z^2 + 4 = 5zx,$$
$$z^4 + x^2 + 4 = 5xy.$$

Co nerovnosti? Co AG?

$$x^4 + 4 \geq 2\sqrt{x^4 \cdot 4} = 4x^2$$

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

Co nerovnosti? Co AG?

$$x^4 + 4 \geq 2\sqrt{x^4 \cdot 4} = 4x^2$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 \leq x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ 4y^2 + z^2 \leq y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ 4z^2 + x^2 \leq z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\
y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\
z^4 + x^2 + 4 &= 5xy.
\end{aligned}
$$

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 \le x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ 4y^2 + z^2 \le y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ 4z^2 + x^2 \le z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 10.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 \leq x^4 + y^2 + 4 &= 5yz, \\ 4y^2 + z^2 \leq y^4 + z^2 + 4 &= 5zx, \\ 4z^2 + x^2 \leq z^4 + x^2 + 4 &= 5xy. \end{aligned}$$

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 \leq 5xy + 5yz + 5zx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq xy + yz + zx$$

Soustavy

Úloha 11.

Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &= 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &= 16 \end{aligned}$$

Soustavy

Úloha 11.

Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

Co ten CS jako minule?

Soustavy

Úloha 11.

Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

Co ten CS jako minule?

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2$$

Soustavy

Úloha 11.

Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

Co ten CS jako minule?

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2$$

$$4(16 - e^2) \geq (8 - e)^2 \qquad e(5e - 16) \leq 0$$

Soustavy

Úloha 11.

Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$a+b+c+d+e=8$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$$

Co ten CS jako minule?

$$(1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a+b+c+d)^2$$

$$4(16-e^2) \geq (8-e)^2 \qquad e(5e-16) \leq 0$$

$0 \leq e \leq \frac{16}{5}$,

Soustavy

Úloha 11.

Nechť a, b, c, d, e jsou reálná čísla, která vyhovují rovnicím

$$a + b + c + d + e = 8$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

Co ten CS jako minule?

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2$$

$$4(16 - e^2) \geq (8 - e)^2 \qquad e(5e - 16) \leq 0$$

$0 \leq e \leq \frac{16}{5}$, $(a, b, c, d, e) = (\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{16}{5})$

Soustavy

Úloha 12.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$(x+y)^3 = z, \tag{15}$$

$$(y+z)^3 = x, \tag{16}$$

$$(z+x)^3 = y. \tag{17}$$

Soustavy

Úloha 13.

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + z = 2, \tag{18}$$

$$y^2 + z^2 + x = 2, \tag{19}$$

$$z^2 + x^2 + y = 2. \tag{20}$$

Zdroje

- Cauchy-Schwarzova nerovnost
- Zdolávání nerovností
- Soustavy rovnic a dělitelnost