Přednáška k MO – geometrie trojúhelníka

Martin Raška

19. března 2021

Stejnolehlost

Stejnolehlost je zobrazení dané středem S a koeficientem $k > 0$. Bod X zobrazí na bod X' na polopřímce SX takový, že $|SX'| = k \cdot |SX|$.

Stejnolehlost

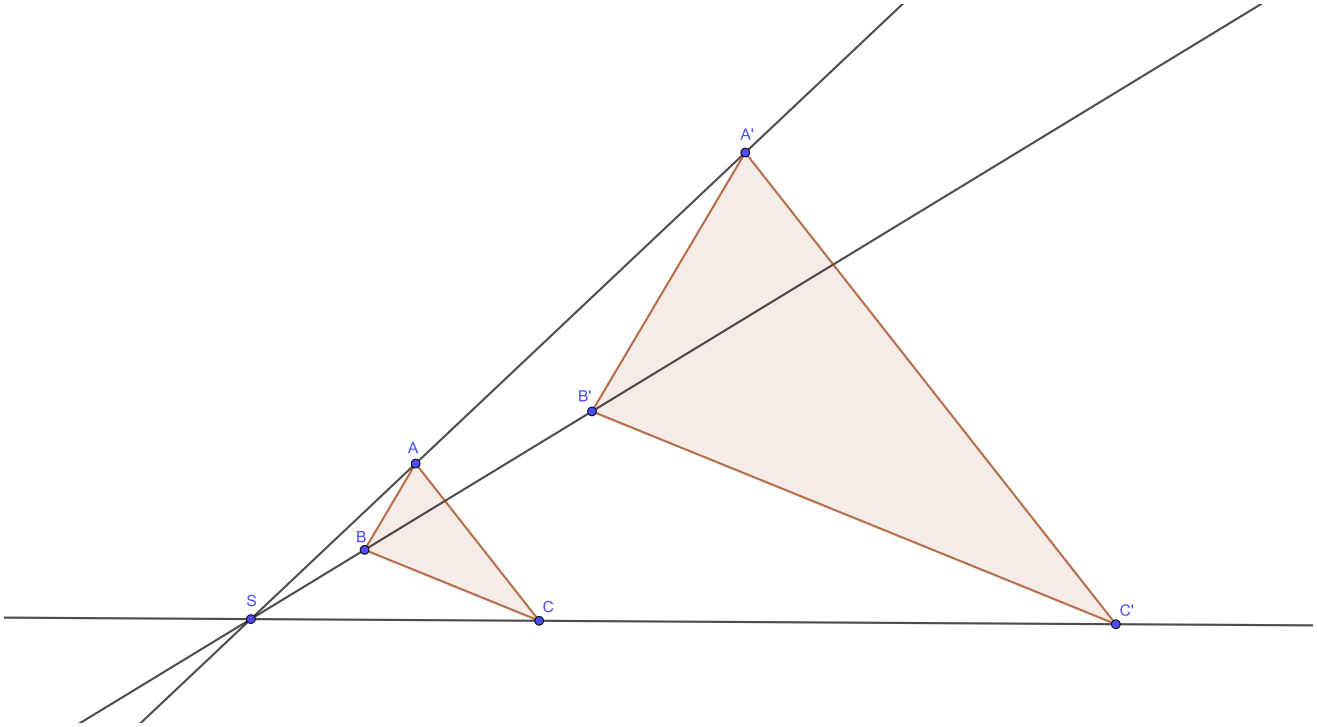
Tvrzení

Stejnolehlost zobrazuje útvary na podobné útvary. Speciálně se při stejnolehlosti zobrazí trojúhelník na podobný trojúhelník.

Stejnolehlost

Tvrzení

Stejnolehlost zobrazuje útvary na podobné útvary. Speciálně se při stejnolehlosti zobrazí trojúhelník na podobný trojúhelník.



Věta obvodovém úhlu

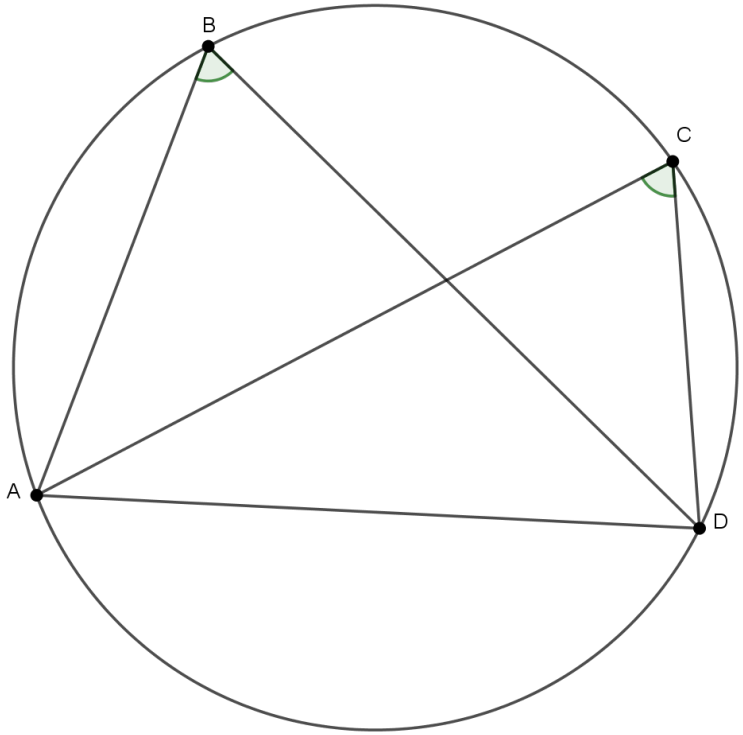
Tvrzení

Čtyři body A, B, C, D leží (v tomto pořadí) na jedné kružnici právě tehdy když $|\measuredangle ABD| = |\measuredangle ACD|$.

Věta obvodovém úhlu

Tvrzení

Čtyři body A, B, C, D leží (v tomto pořadí) na jedné kružnici právě tehdy když $|\measuredangle ABD| = |\measuredangle ACD|$.



Věta obvodovém úhlu

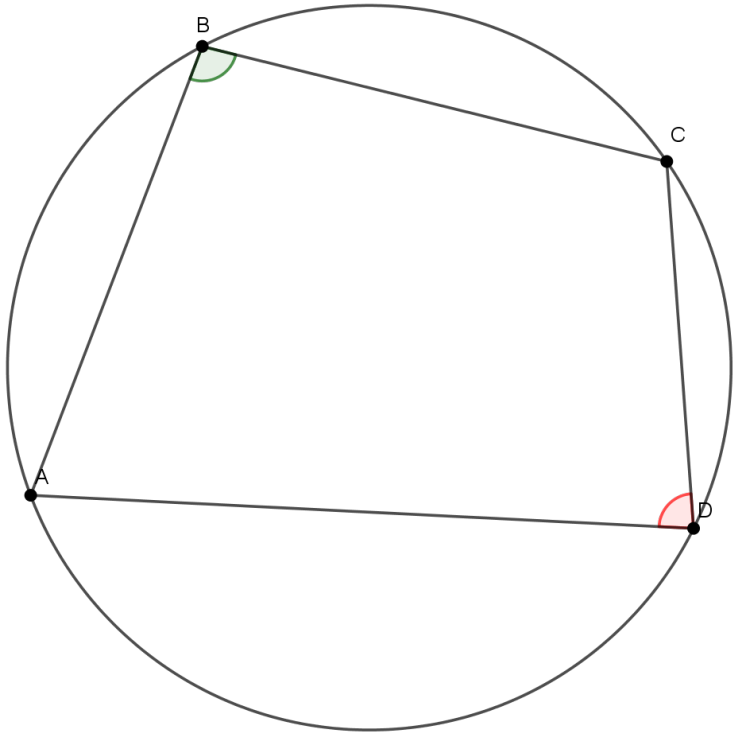
Tvrzení

Čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový právě tehdy když $|\measuredangle ABC| = 180^\circ - |\measuredangle ADC|$.

Věta obvodovém úhlu

Tvrzení

Čtyřúhelník ABCD je tětivový právě tehdy když $|\measuredangle ABC| = 180^\circ - |\measuredangle ADC|$.

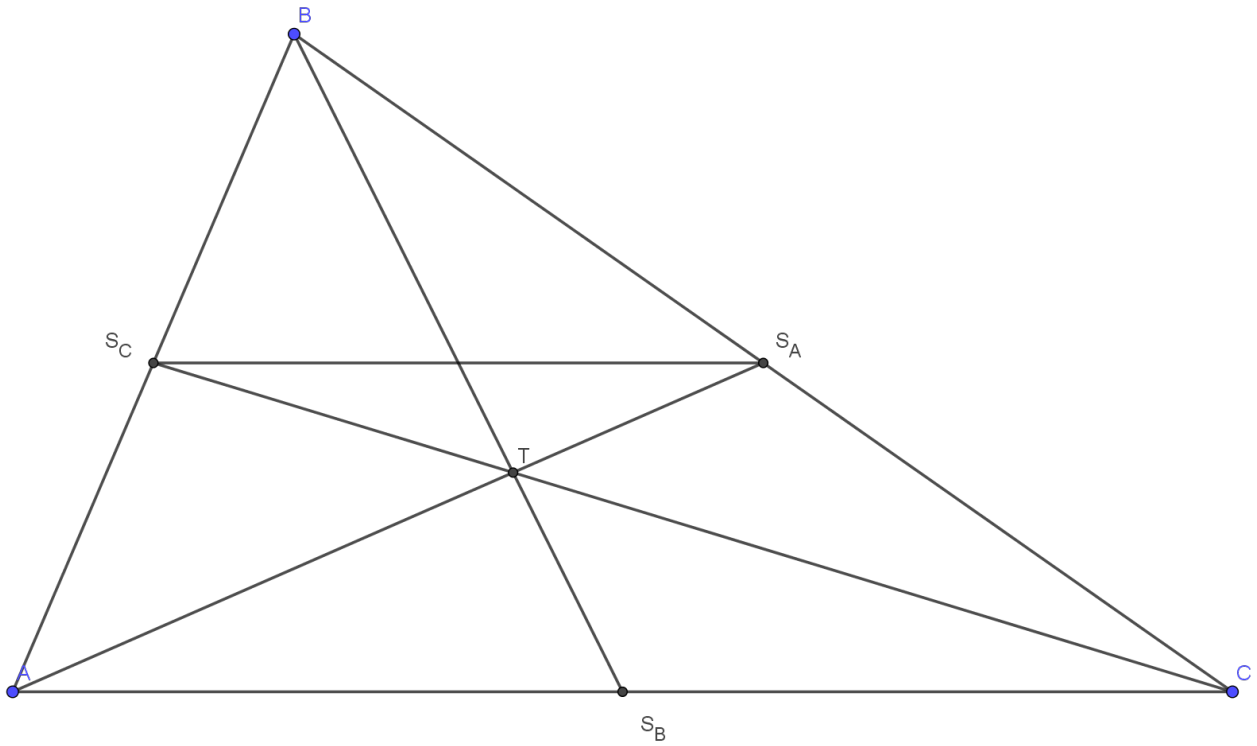


Spojnici středu strany s protějším vrcholem nazveme *těžnicí*.

Spojnici středu strany s protějším vrcholem nazveme *těžnicí*.

Tvrzení

Všechny tři těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě, který nazýváme těžiště. Navíc těžiště dělí každou těžnici v poměru $1 : 2$.

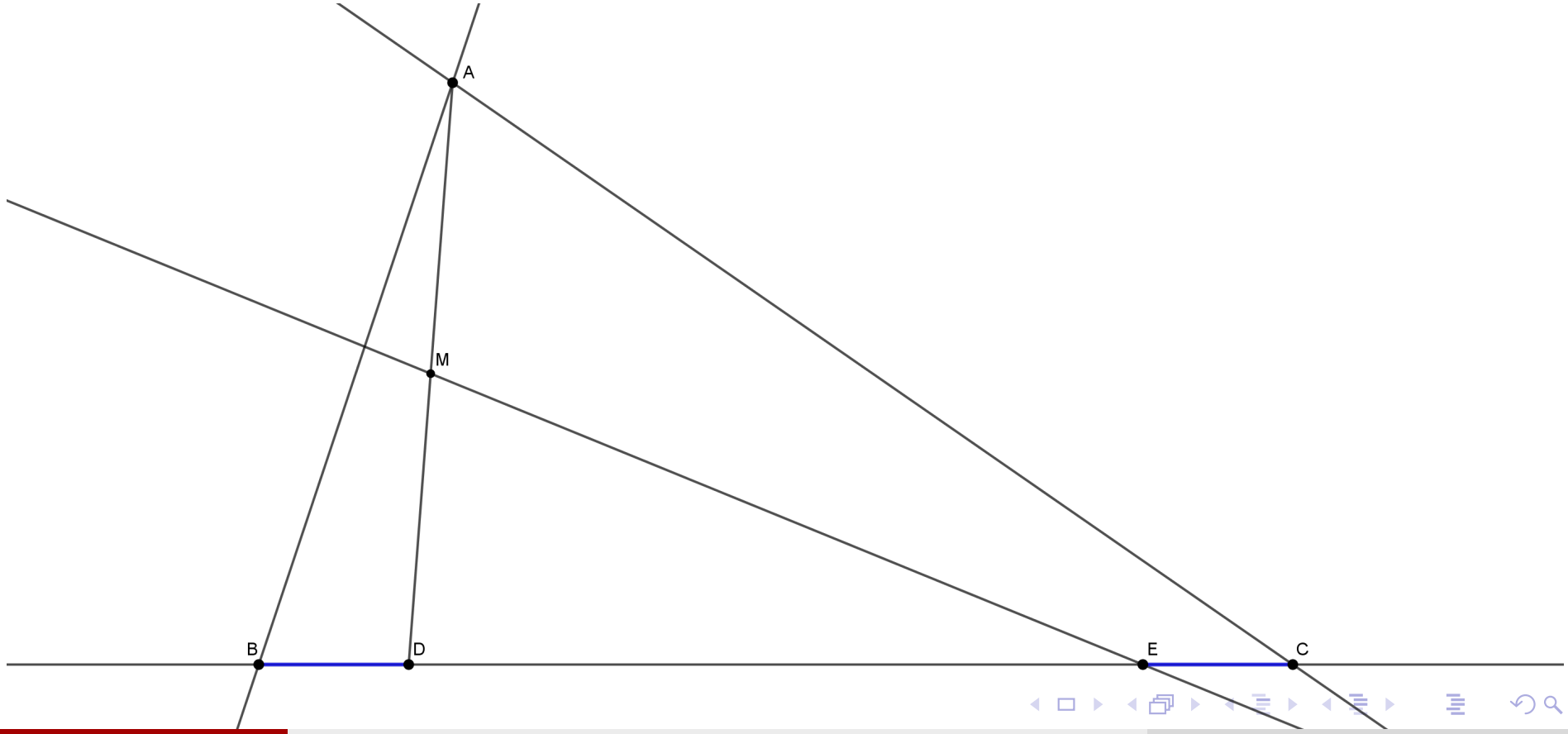


Úloha

Na straně BC trojúhelníka ABC se pohybují body D a E tak,že $|BD| = |CE|$. Označíme-li M střed úsečky AD, dokažte, že přímka ME prochází pevným bodem (nezávislým na poloze bodů D, E).

Úloha

Na straně BC trojúhelníka ABC se pohybují body D a E tak,že $|BD| = |CE|$. Označíme-li M střed úsečky AD, dokažte, že přímka ME prochází pevným bodem (nezávislým na poloze bodů D, E).



Střední příčky

Střední příčky

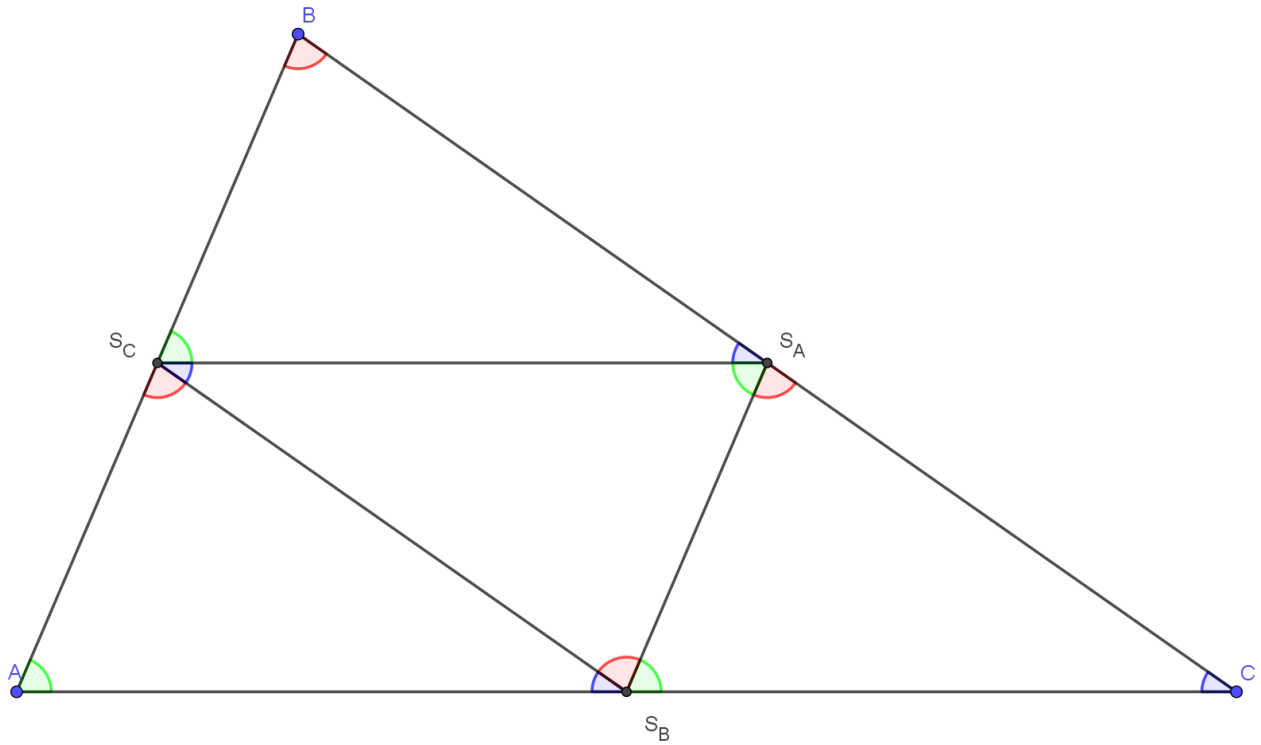
Tvrzení

Střední příčky dělí trojúhelník na 4 shodné trojúhelníky.

Střední příčky

Tvrzení

Střední příčky dělí trojúhelník na 4 shodné trojúhelníky.

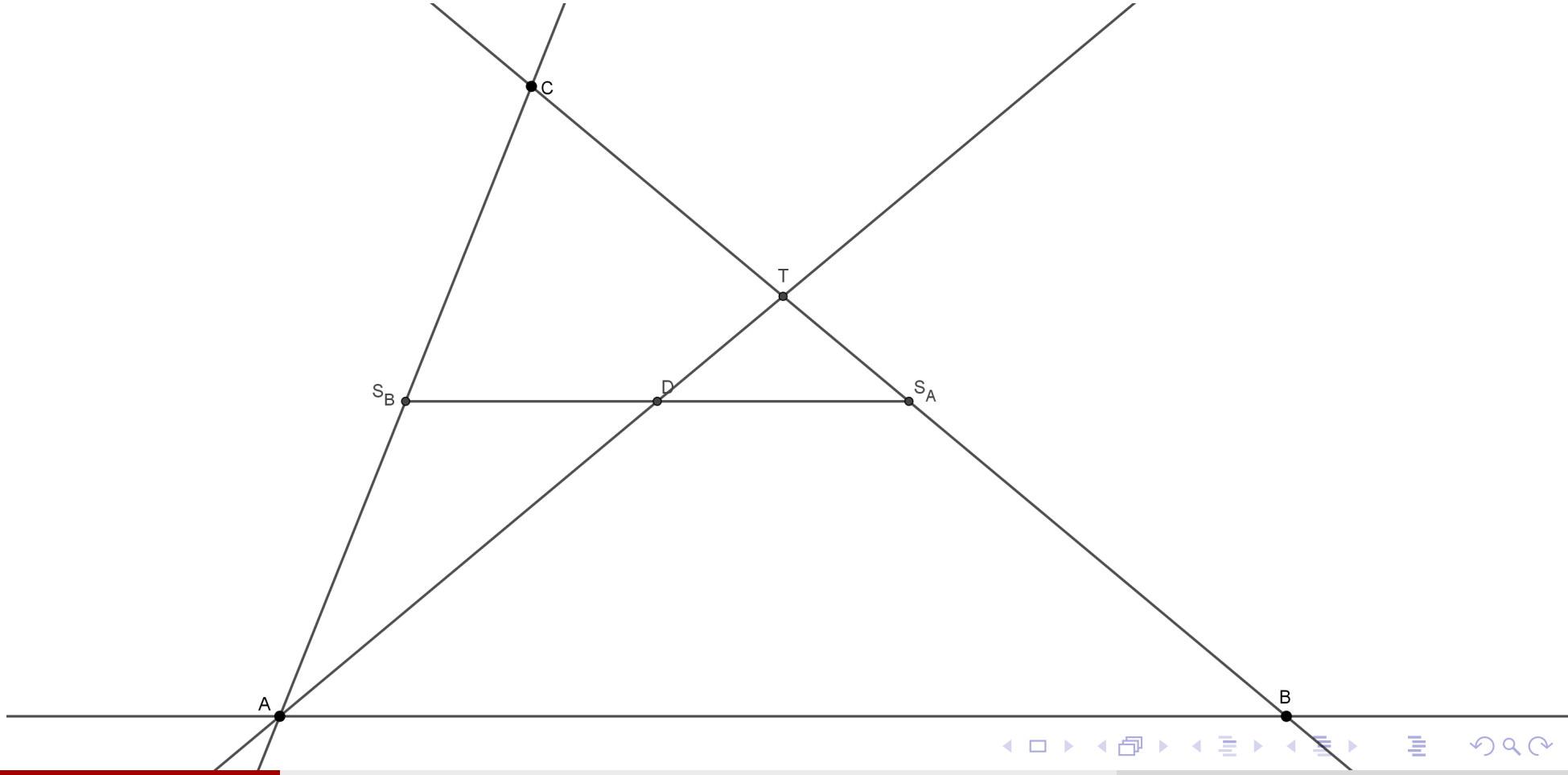


Úloha

V trojúhelníku ABC mějme na straně BC bod T takový, že $|BT| = 2|CT|$. Ukažte, že přímka AT půlí úsečku S_AS_B.

Úloha

V trojúhelníku ABC mějme na straně BC bod T takový, že $|BT| = 2|CT|$. Ukažte, že přímka AT půlí úsečku S_AS_B.

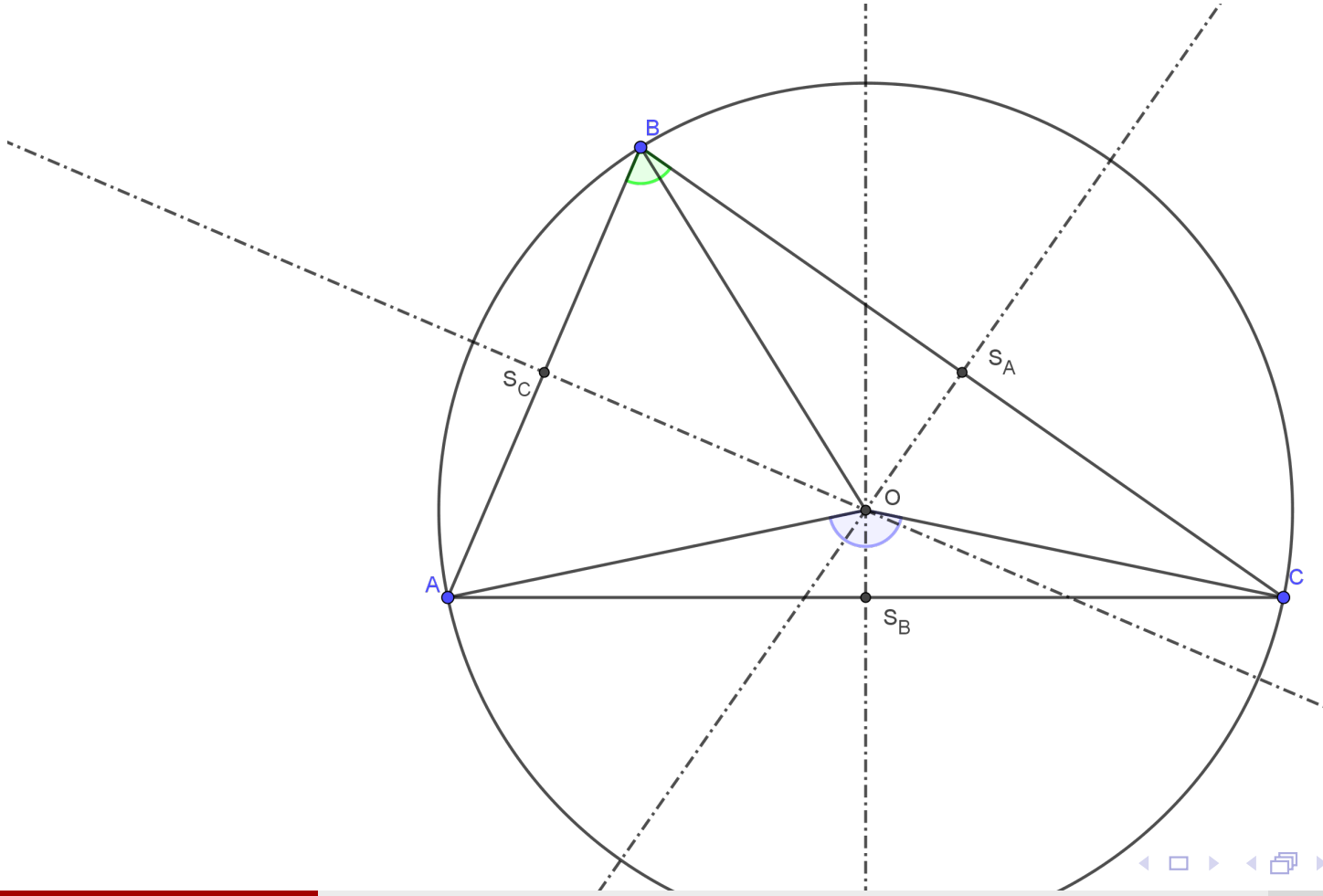


Tvrzení

Osy stran trújhelníka se protínají v jednom bodě. Ten typicky značíme O a je středem kružnice opsané trojúhelníka ABC.

Tvrzení

Osy stran trójhelníka se protínají v jednom bodě. Ten typicky značíme O a je středem kružnice opsané trojúhelníka ABC.

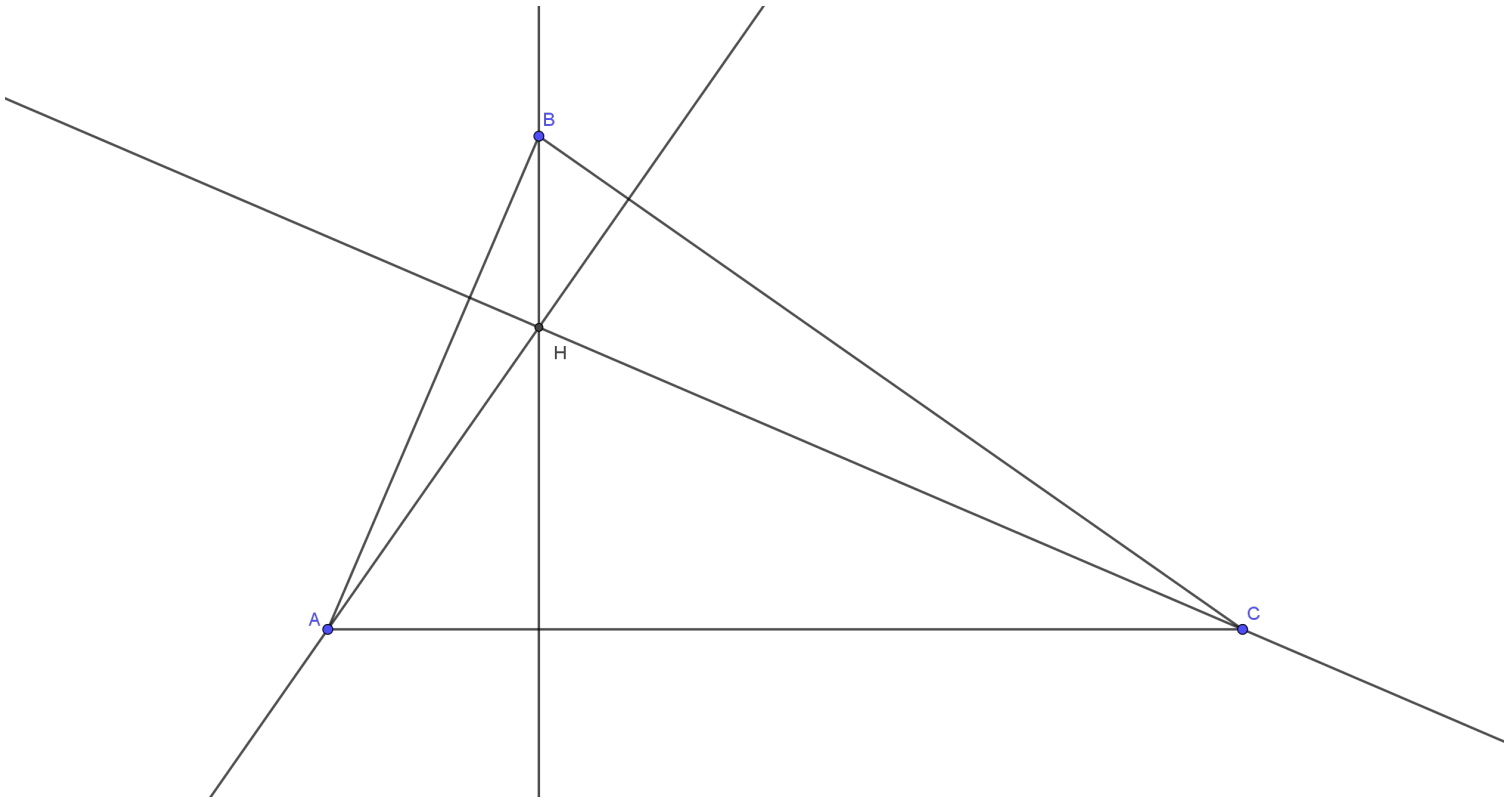


Tvrzení

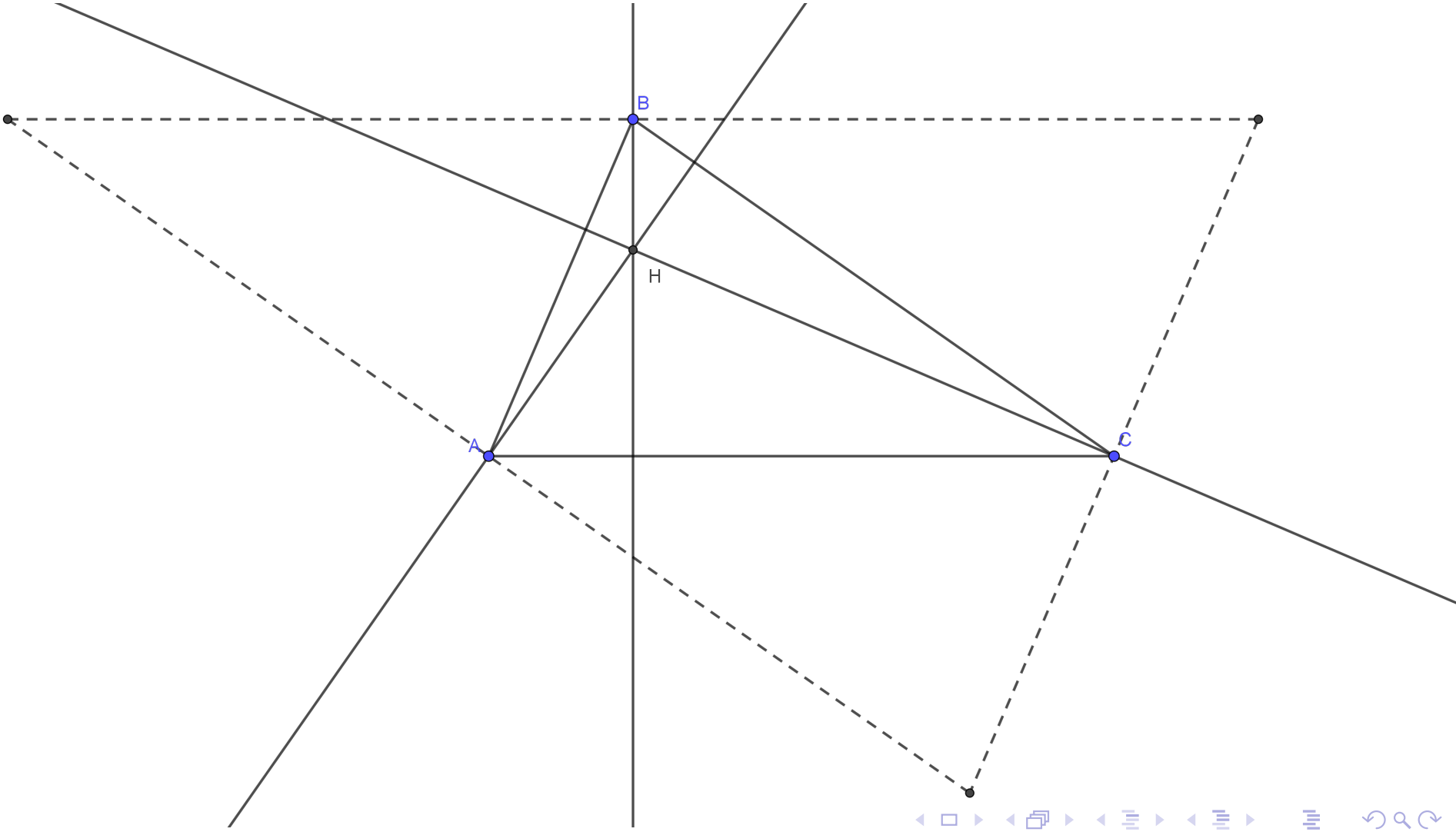
Výšky se v trojúhelníku protínají v jednom bodě. Ten typicky značíme H a nazývá se ortocentrem trojúhelníka ABC.

Tvrzení

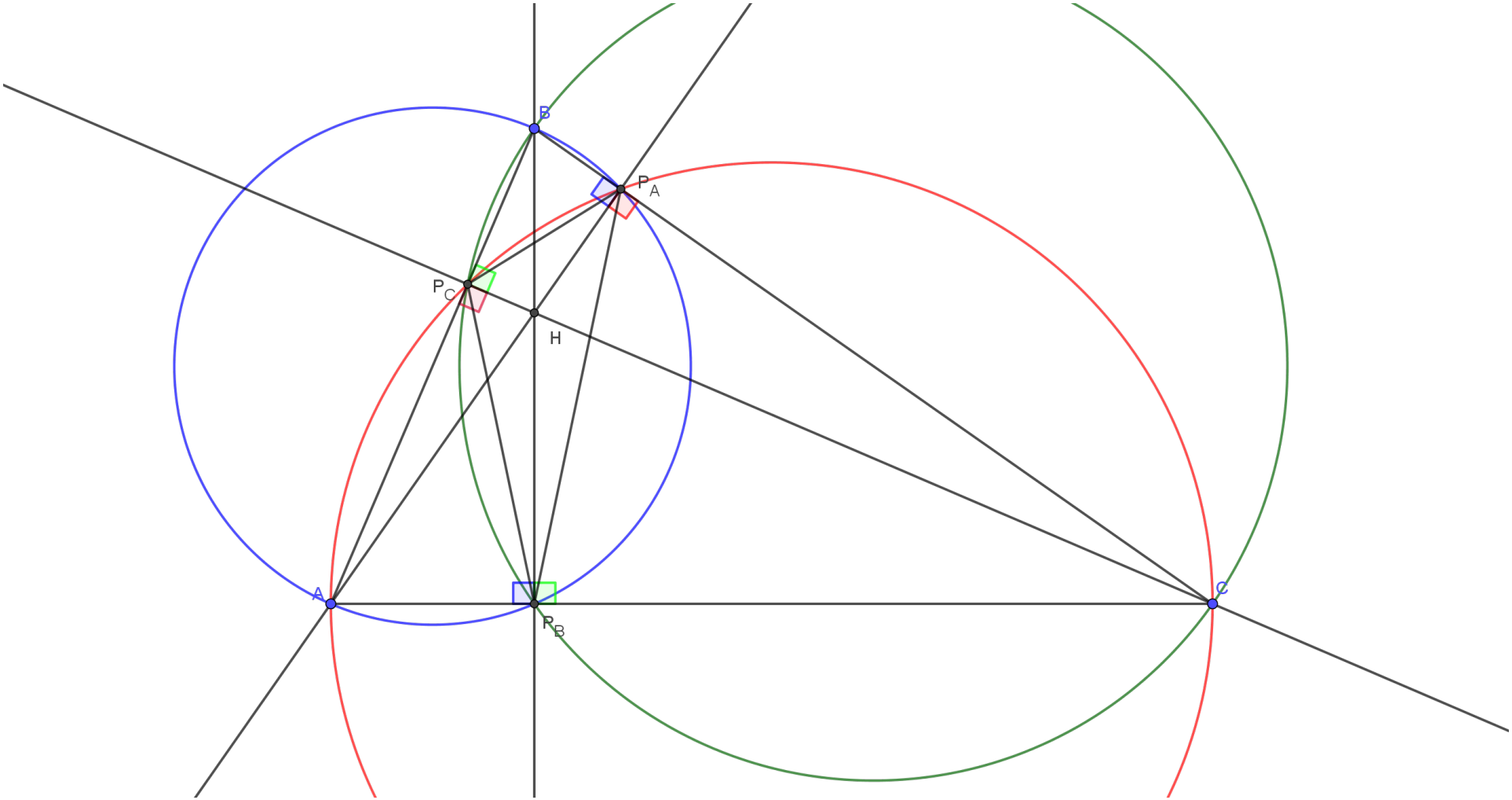
Výšky se v trojúhelníku protínají v jednom bodě. Ten typicky značíme H a nazývá se ortocentrem trojúhelníka ABC.



Důkaz:



Paty výšek

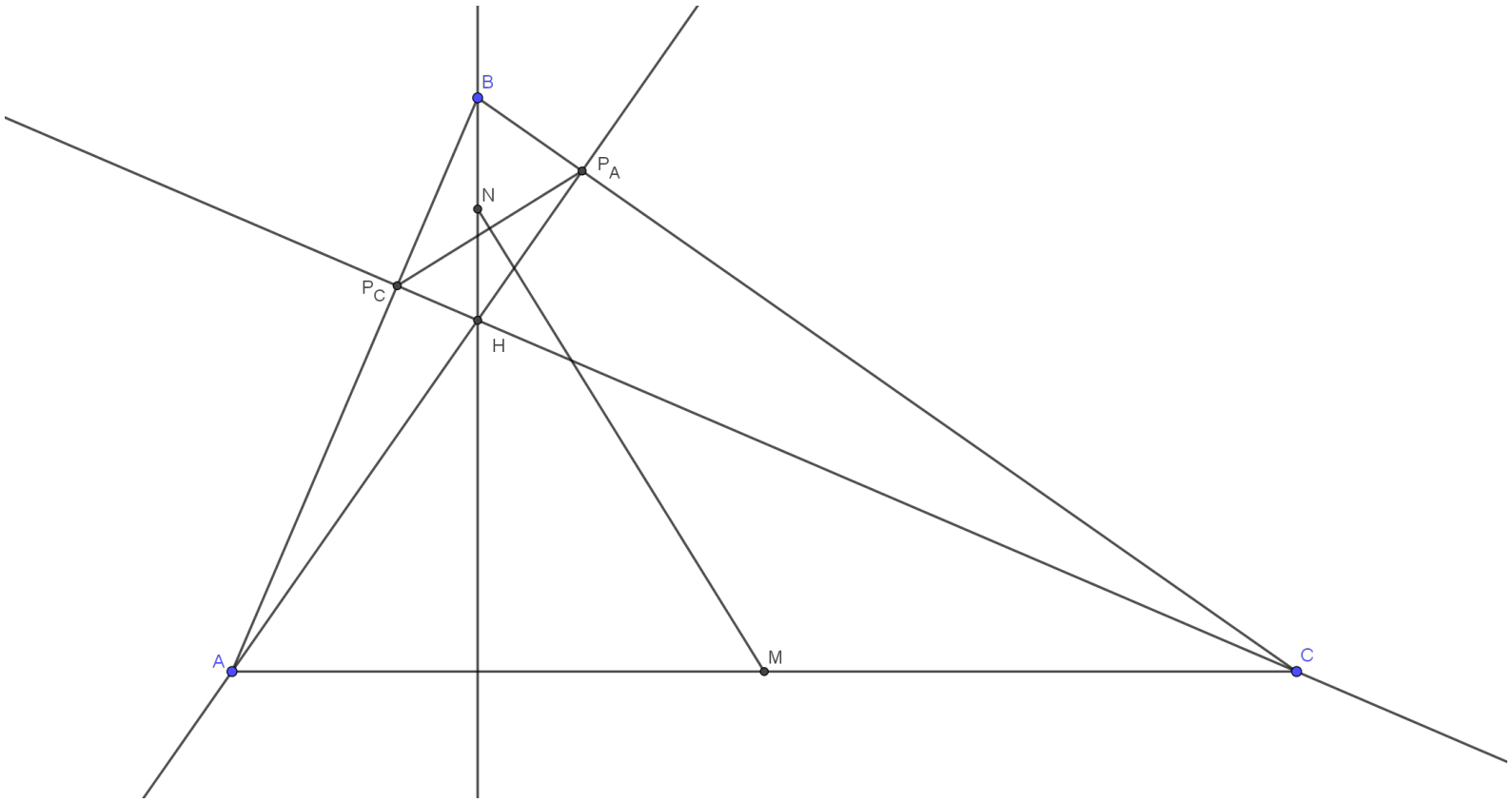


Úloha

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček AC a BH. Dokažte $MN \perp P_A P_C$.

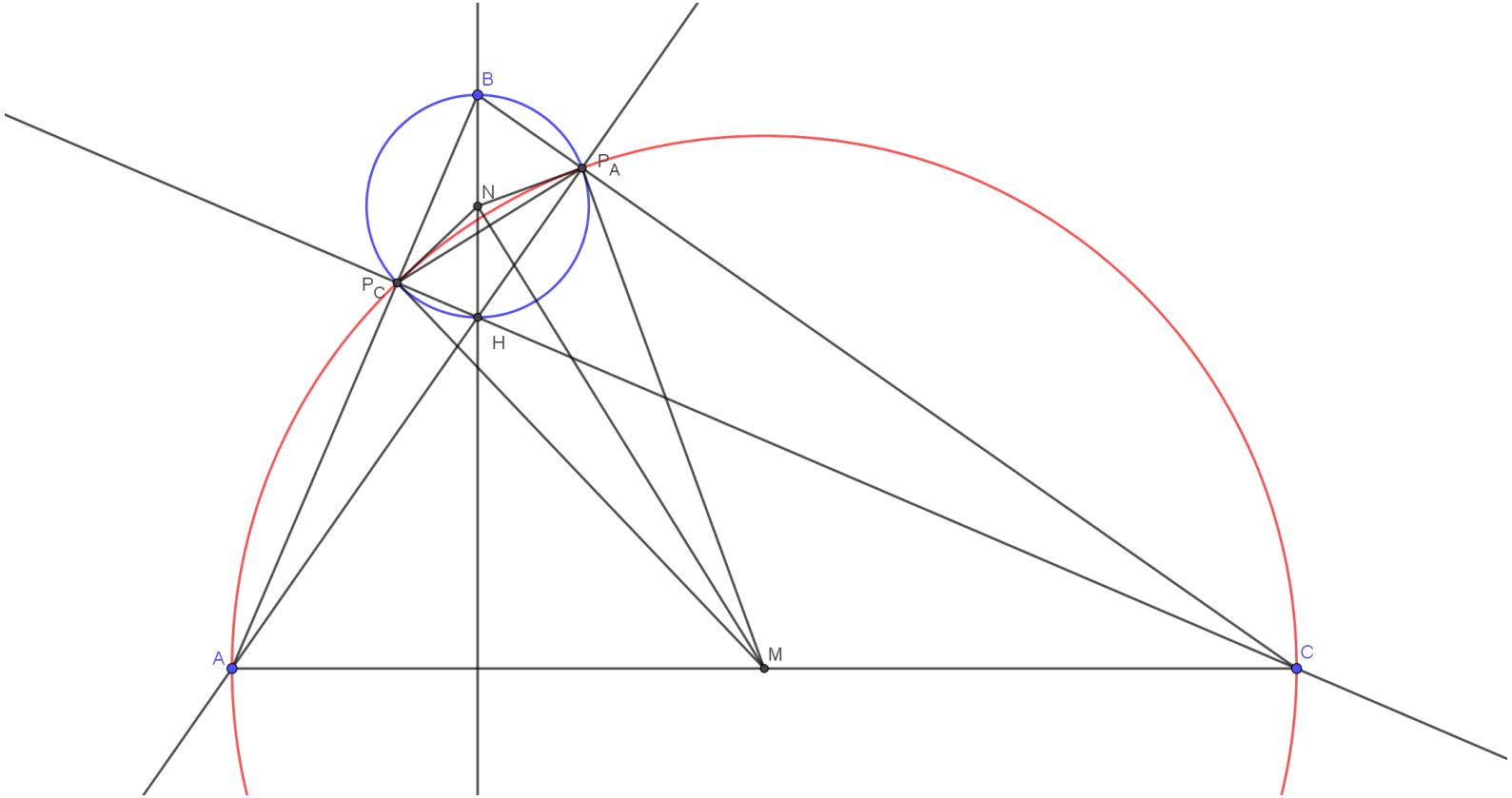
Úloha

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček AC a BH. Dokažte $MN \perp P_A P_C$.



Úloha

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s ortocentrem H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček AC a BH. Dokažte $MN \perp P_A P_C$.



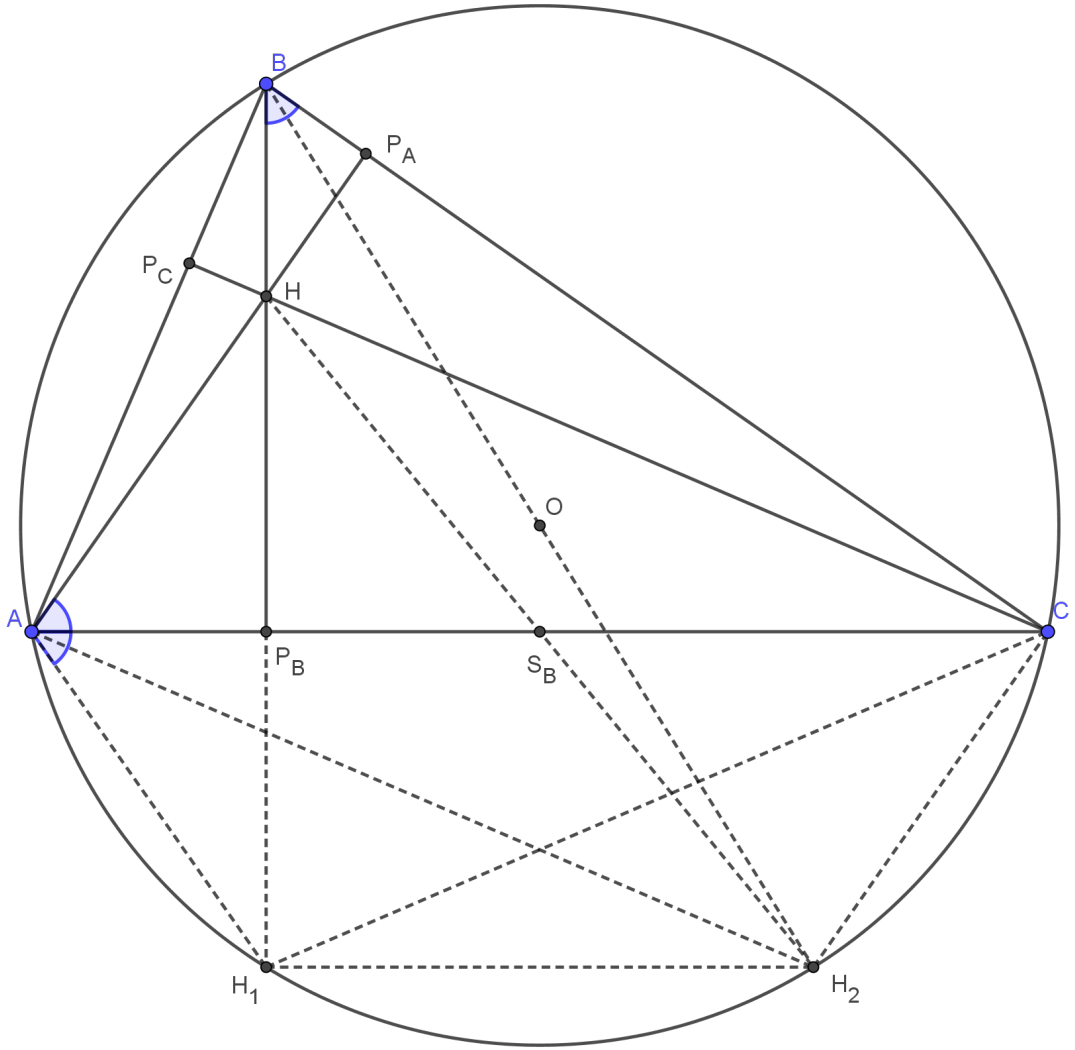
Překlápění ortocentra

Překlápění ortocentra

Tvrzení

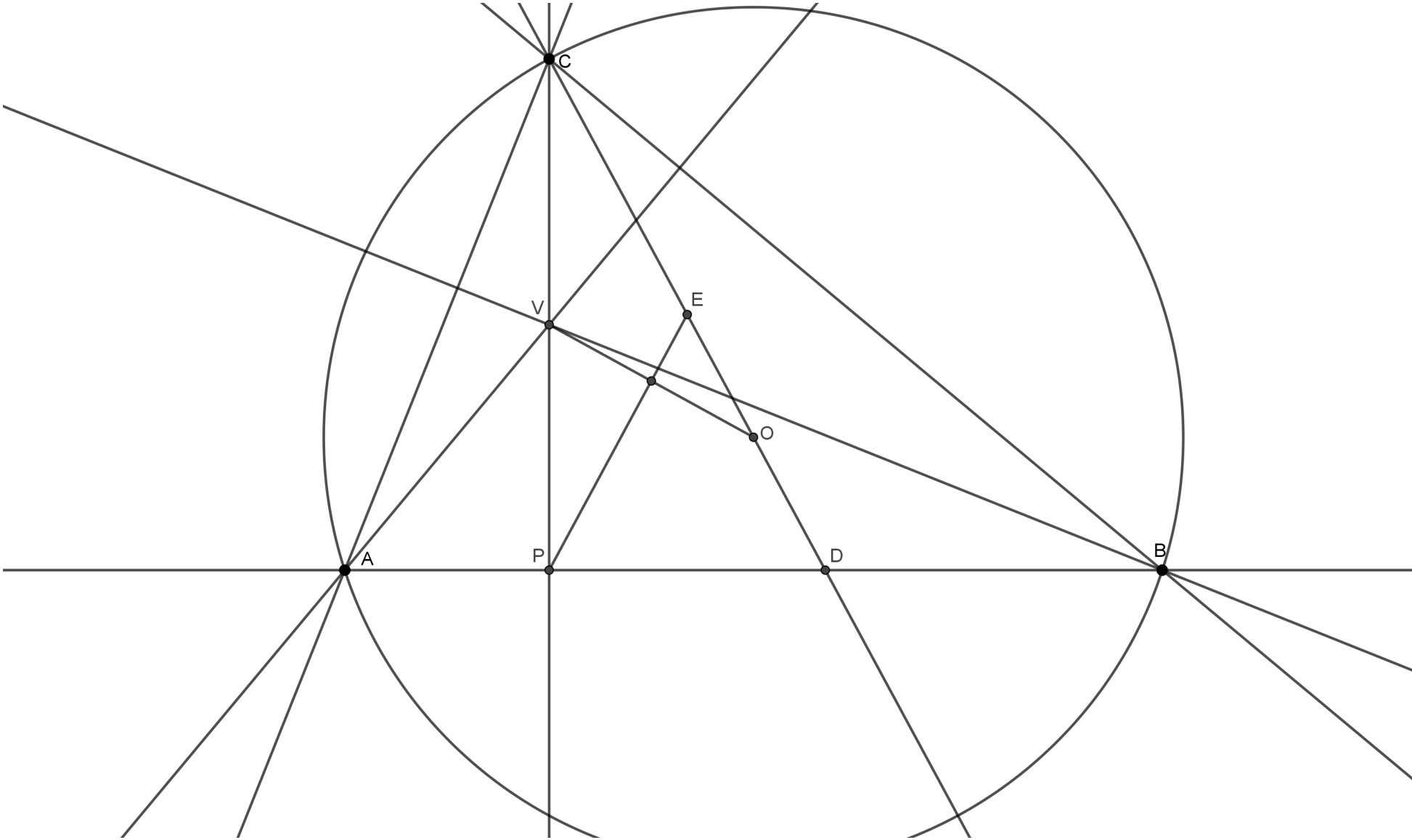
Obrazy H v osové souměrnosti podle AC a středu strany AC leží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Druhý zmíněný navíc spolu s vrcholem B tvoří průměr.

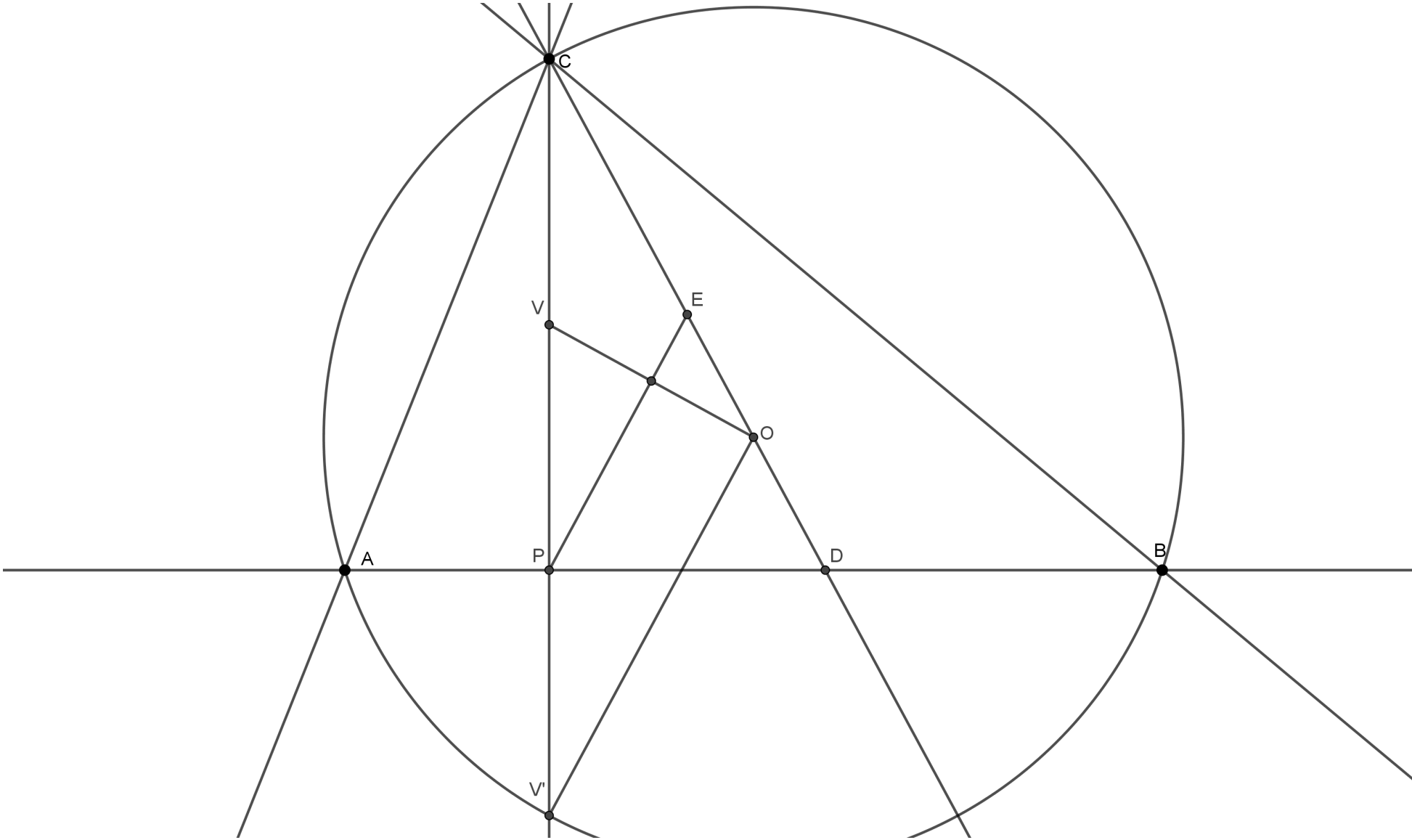
Překlápění ortocentra



Úloha

V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z C na AB, V ortocentrum, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV.


C
V
E
O
A
P
D
B

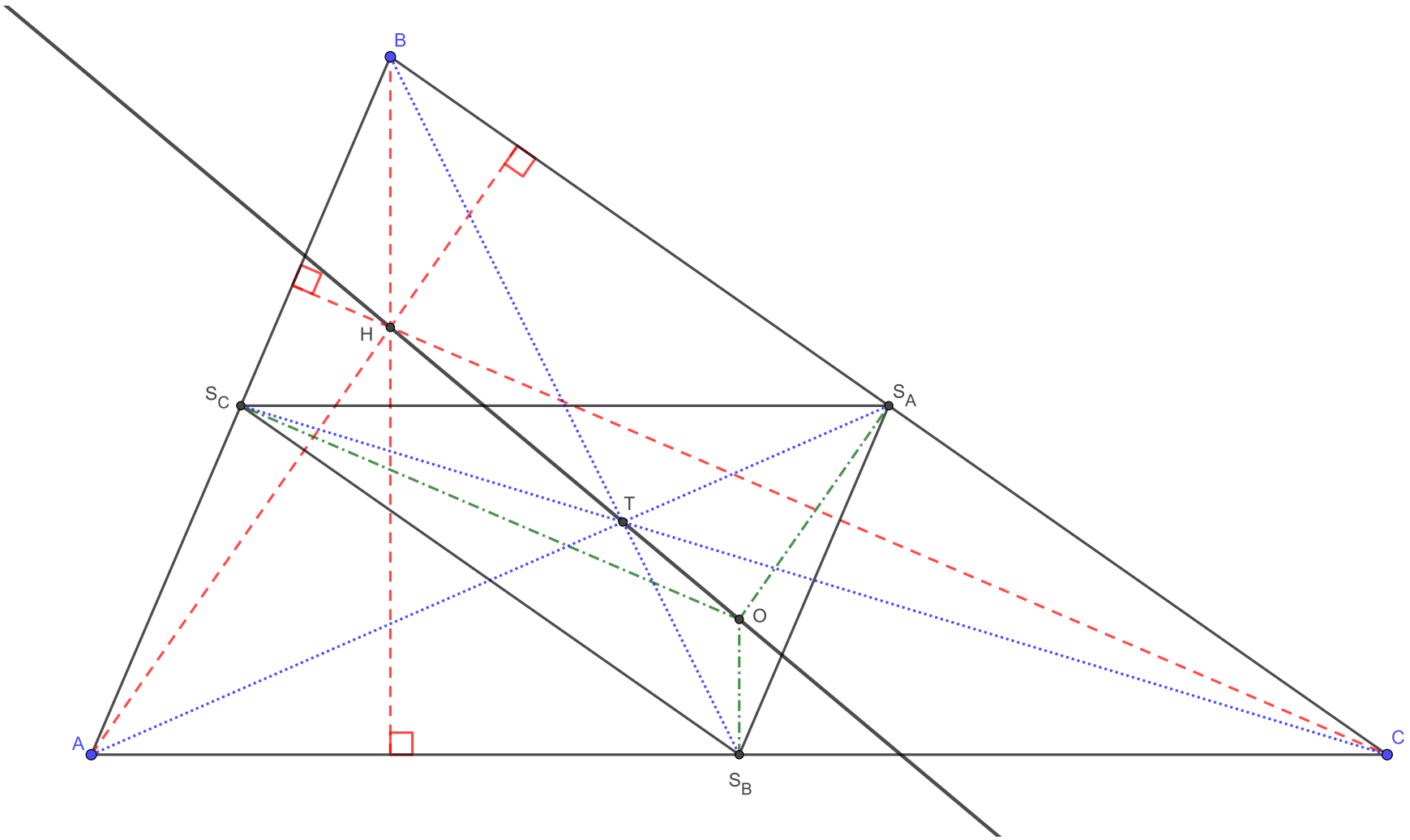

C
V
E
O
A
P
D
B
V'

Eulerova přímka

Tvrzení

Těžiště, ortocentrum a střed kružnice opsané leží na jedné přímce a platí $|HT| = 2|OT|$. *Této přímce se říká Eulerova přímka.*

Důkaz Eulerovy přímky

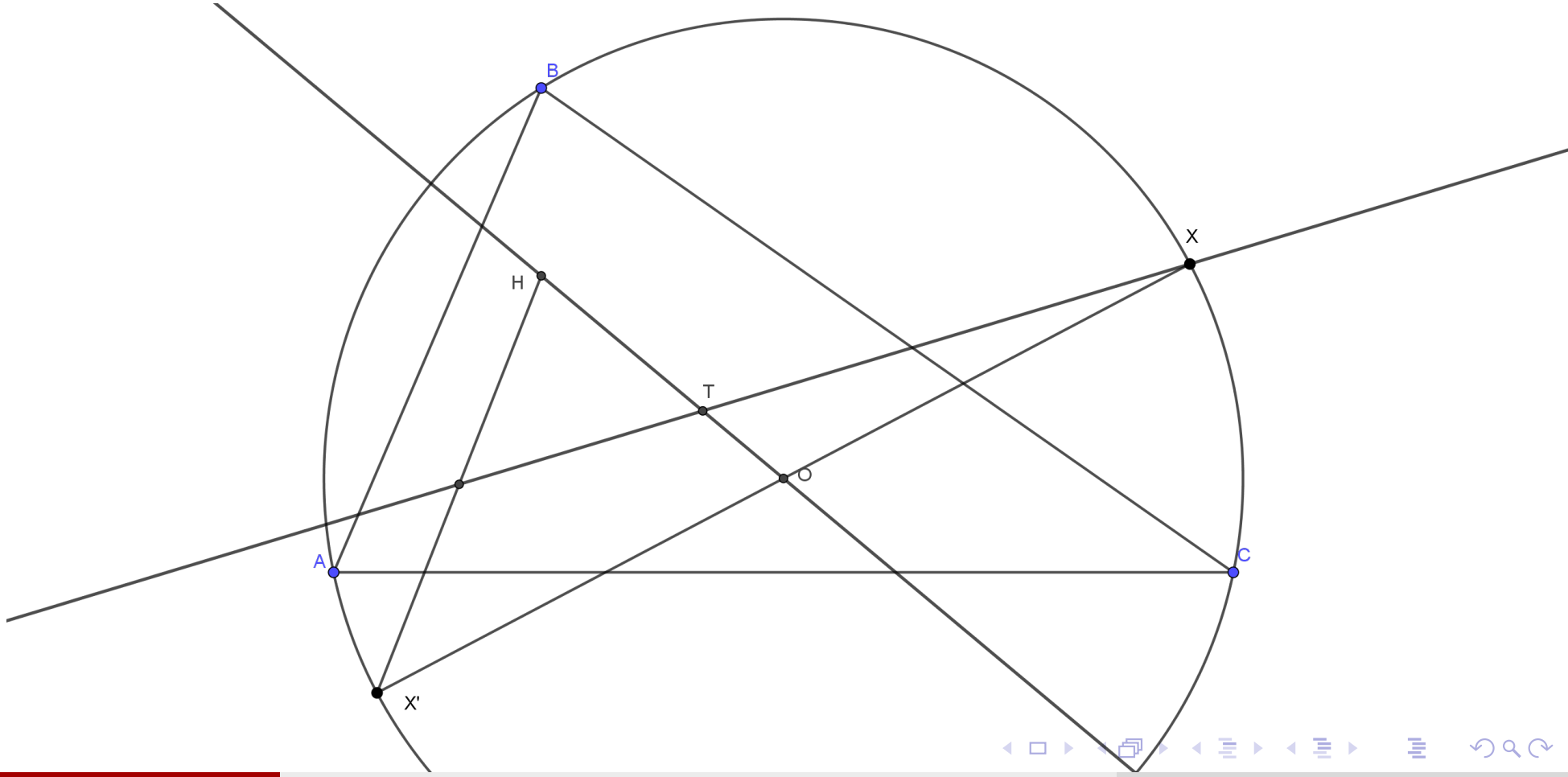


Úloha

Nechť X je bod na kružnici opsané $\triangle ABC$. Dokažte, že přímka TX půlí úsečku HX', kde XX' je průměr opsané kružnice.

Úloha

Nechť X je bod na kružnici opsané $\triangle ABC$. Dokažte, že přímka TX půlí úsečku HX', kde XX' je průměr opsané kružnice.

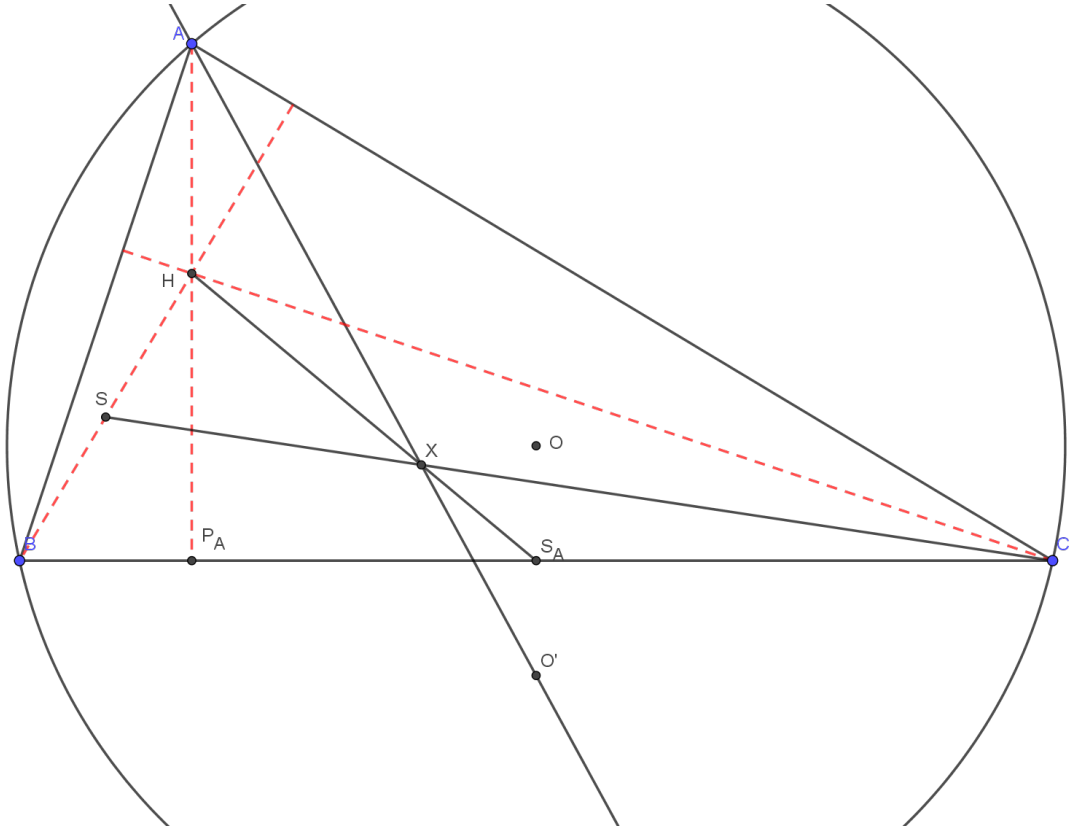


Úloha

Označme S střed úsečky BH a X průsečík přímek CS a HS_A. Dále nechť je O' osový obraz O podle BC. Dokažte, že body A, X, O' leží na jedné přímce.

Úloha

Označme S střed úsečky BH a X průsečík přímek CS a HS_A. Dále nechť je O' osový obraz O podle BC. Dokažte, že body A, X, O' leží na jedné přímce.

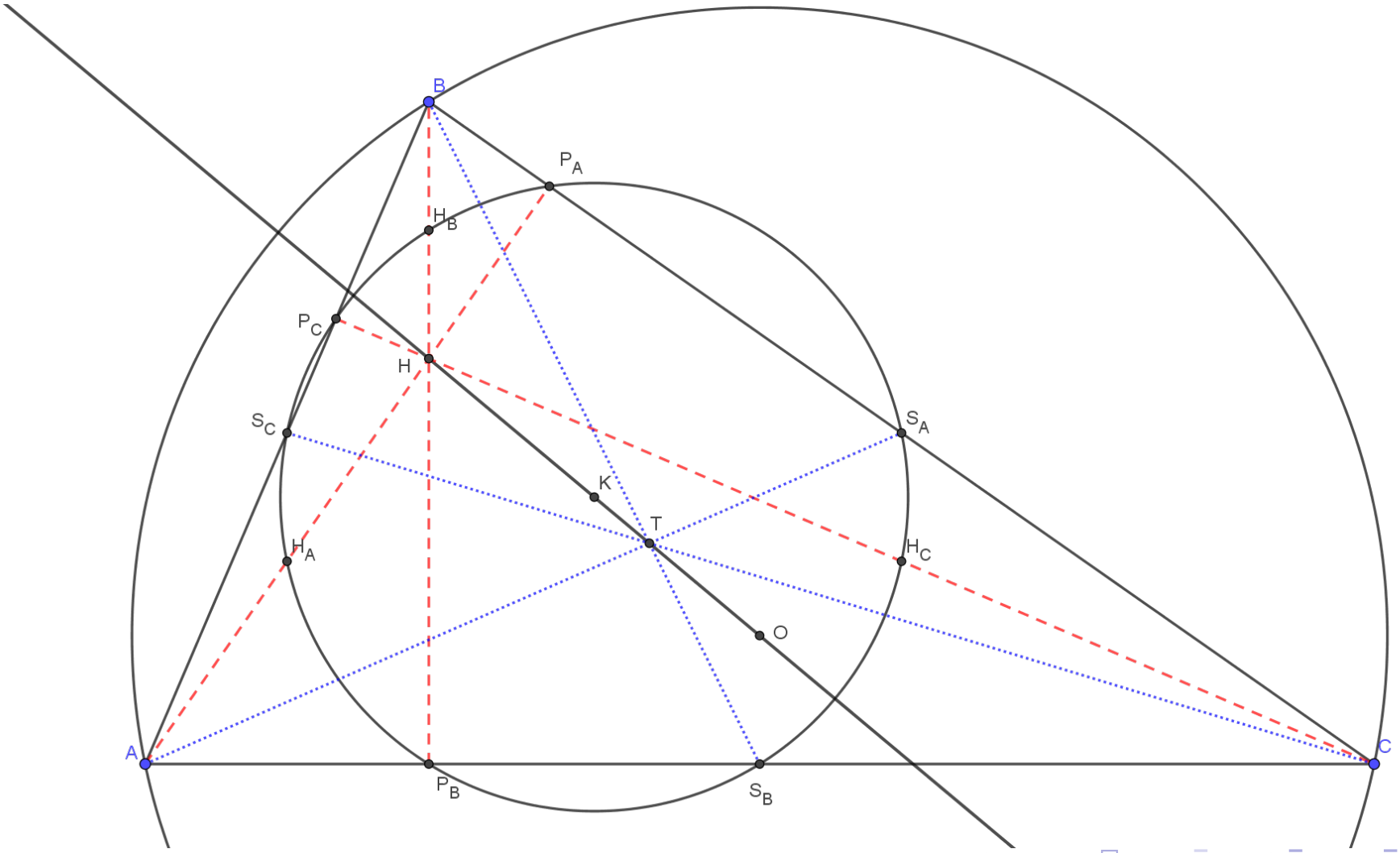


Feuerbachova kružnice

Tvrzení

Středy stran, paty výšek a středy úseček AH, BH a CH leží na kružnici se středem F v polovině úsečky OH. Tato kružnice se nazývá Feuerbachova kružnice nebo také kružnice devíti bodů.

Důkaz Feuerbachovy kružnice

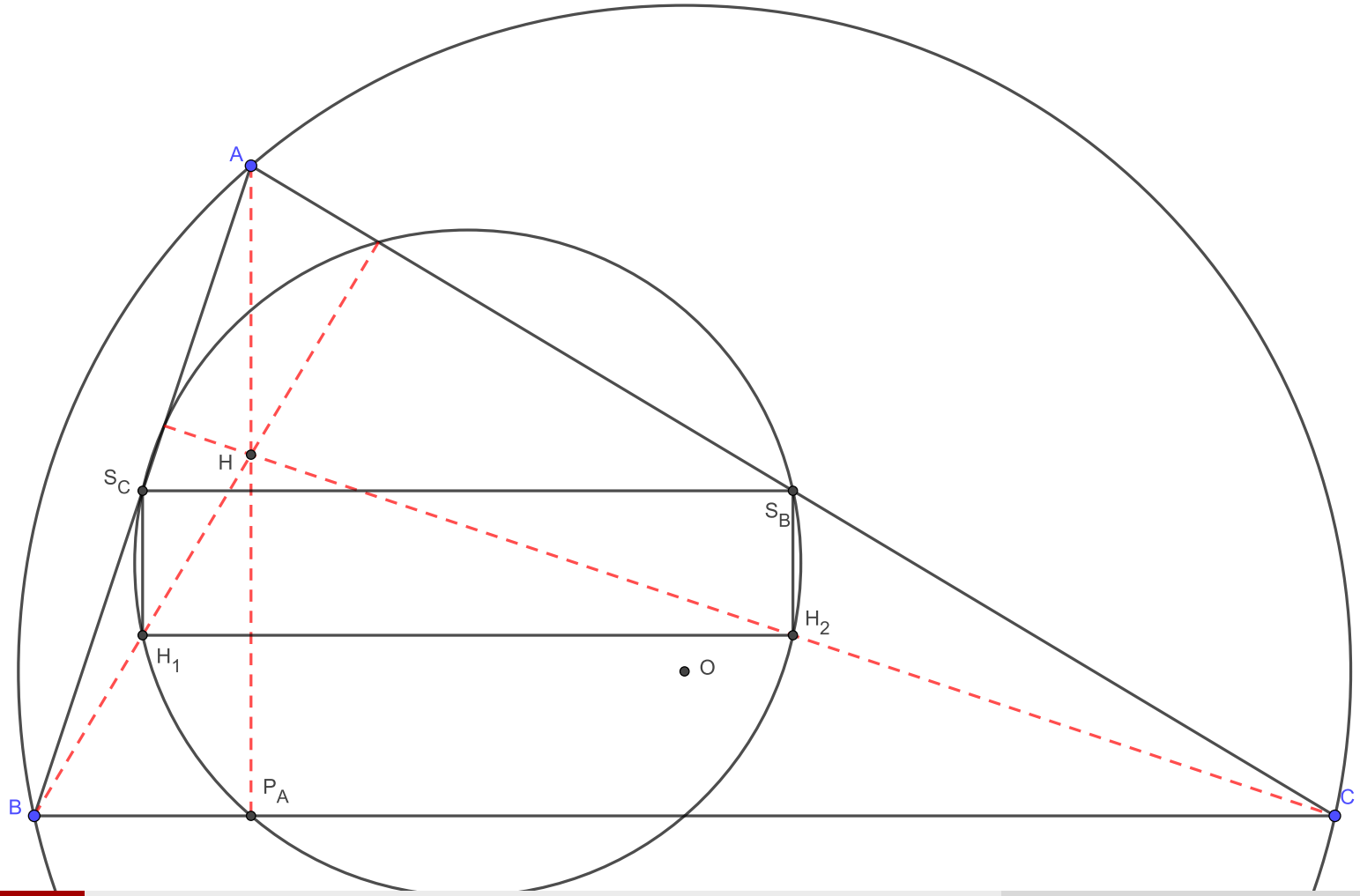


Úloha

Ukažte, že S_B, S_C a středy BH a CH jsou vrcholy obdélníka.

Úloha

Ukažte, že S_B, S_C a středy BH a CH jsou vrcholy obdélníka.



Konec

Vše dnes prezentované a mnoho dalšího ohledně geometrie se dá nalézt v seriálu MKS od Rada Švarce a Davida Hrušky.
https://prase.cz/archive/36/serial.pdf

Děkuji za pozornost