Extremální úlohy

Alena Skálová

přednášky k matematické olympiádě, kategorie C

26. března 2021

Extremální úlohy

Hledám **minimum/nejmenší** nebo **maximum/největší**.

Řešení má vždycky **dvě** části

- "takhle to jde"
  x podmínkám vyhovuje
- "líp to nejde"
  neboli
  žádné menší x zadání nesplňuje (když hledám minimum)
  žádné větší x zadání nesplňuje (když hledám maximum)

Najděte taková reálná x, y, pro něž je $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ a přitom $x + y$ je největší možné. [MKS-21-1-2]

Najděte taková reálná x, y, pro něž je $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ a přitom $x + y$ je největší možné.   [MKS-21-1-2]

Platí

$$1 = (x + y)^2 + 3y^2 \geq (x + y)^2,$$

Najděte taková reálná x, y, pro něž je $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ a přitom $x + y$ je největší možné. [MKS-21-1-2]

Platí

$$1 = (x + y)^2 + 3y^2 \geq (x + y)^2,$$

tzn. pro každé x, y splňující zadání je $|x + y| \leq 1$.
$\rightarrow$ **líp než jedna to nejde**

Najděte taková reálná x, y, pro něž je $x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ a přitom $x + y$ je největší možné. [MKS-21-1-2]

Platí

$$1 = (x + y)^2 + 3y^2 \geq (x + y)^2,$$

tzn. pro každé x, y splňující zadání je $|x + y| \leq 1$.
$\rightarrow$ **líp než jedna to nejde**

Dvojice $x = 1$ a $y = 0$ zadání splňuje a $x + y = 1$.
$\rightarrow$ **pro jedničku to jde**

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Diskriminant:

$$p^2 \geq 4(q + 1),$$

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
`[MKS-21-1-4]`

Diskriminant:

$$p^2 \geq 4(q + 1),$$

takže

$$p^2 + q^2 \geq 4(q + 1) + q^2 = (2 + q)^2.$$

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Diskriminant:

$$p^2 \geq 4(q + 1),$$

takže

$$p^2 + q^2 \geq 4(q + 1) + q^2 = (2 + q)^2.$$

Vždy platí

$$p^2 + q^2 \geq q^2.$$

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Diskriminant:

$$p^2 \geq 4(q + 1),$$

takže

$$p^2 + q^2 \geq 4(q + 1) + q^2 = (2 + q)^2.$$

Vždy platí

$$p^2 + q^2 \geq q^2.$$

Tvrdím: Alespoň jedno z čísel q^2, $(2 + q)^2$ je vždy větší nebo rovno než 1

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
`[MKS-21-1-4]`

Diskriminant:

$$p^2 \geq 4(q+1),$$

takže

$$p^2 + q^2 \geq 4(q+1) + q^2 = (2+q)^2.$$

Vždy platí

$$p^2 + q^2 \geq q^2.$$

Tvrdím: Alespoň jedno z čísel q^2, $(2+q)^2$ je vždy větší nebo rovno než 1 (rozborem $|q| \geq 1$ a $|q| < 1$).

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Diskriminant:

$$p^2 \geq 4(q+1),$$

takže

$$p^2 + q^2 \geq 4(q+1) + q^2 = (2+q)^2.$$

Vždy platí

$$p^2 + q^2 \geq q^2.$$

Tvrdím: Alespoň jedno z čísel q^2, $(2+q)^2$ je vždy větší nebo rovno než 1 (rozborem $|q| \geq 1$ a $|q| < 1$).
$\rightarrow$ takže líp než $p^2 + q^2 \geq 1$ to nejde.

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Máme: $p^2 + q^2 \geq 1$

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Máme: $p^2 + q^2 \geq 1$

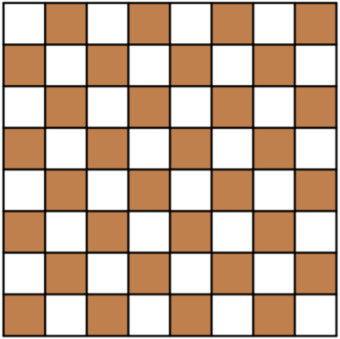
Existuje takové p a q?

Najděte reálná čísla p, q tak, aby rovnice $x^2 + px + q + 1 = 0$ měla reálné řešení a součet $p^2 + q^2$ byl nejmenší možný.
[MKS-21-1-4]

Máme: $p^2 + q^2 \geq 1$

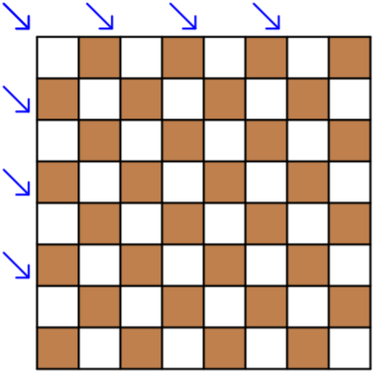
Existuje takové p a q? Ano, např. $p = 0, q = -1$.

Jaký největší počet střelců lze umístit na bílá pole šachovnice 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali? [MO-69-B-I-6-N1]



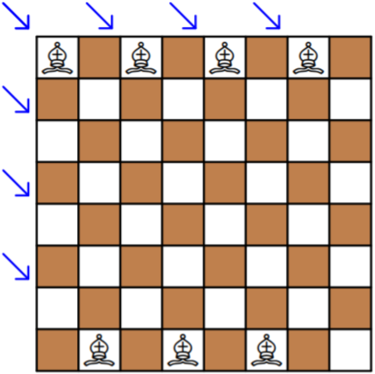
Jaký největší počet střelců lze umístit na bílá pole šachovnice 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali? `[MO-69-B-I-6-N1]`

Víc než 7 to být nemůže



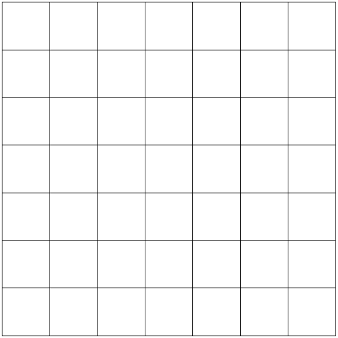
Jaký největší počet střelců lze umístit na bílá pole šachovnice 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali? [MO-69-B-I-6-N1]

Víc než 7 to být nemůže.



A sedm jich rozmístit lze.

Při hře lodě ve čtverci 7×7 nám soupeř umístil někam loď o velikosti 1×4 (ale mohl ji i otočit na 4×1). Kolik nejméně výstřelů nám dá jistotu, že jeho loď zasáhneme? [MKS-27-5-5]

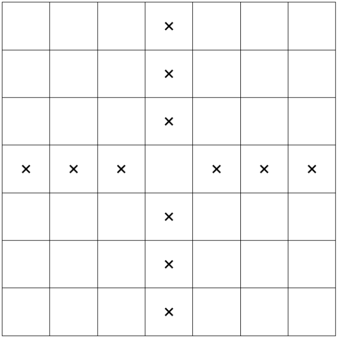


Při hře lodě ve čtverci 7×7 nám soupeř umístil někam loď o velikosti 1×4 (ale mohl ji i otočit na 4×1). Kolik nejméně výstřelů nám dá jistotu, že jeho loď zasáhneme? [MKS-27-5-5]

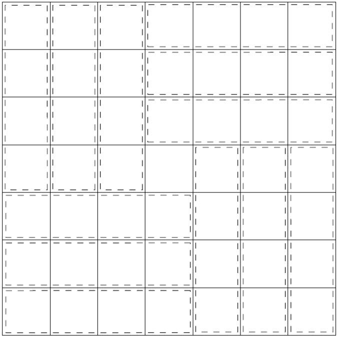
			×			
			×			
			×			
×	×	×		×	×	×
			×			
			×			
			×			

Dvanáct výstřelů stačí.

Při hře lodě ve čtverci 7×7 nám soupeř umístil někam loď o velikosti 1×4 (ale mohl ji i otočit na 4×1). Kolik nejméně výstřelů nám dá jistotu, že jeho loď zasáhneme? [MKS-27-5-5]

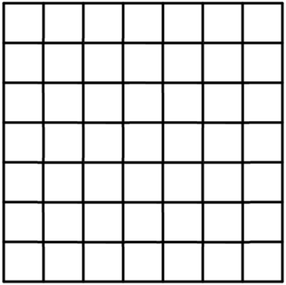


Dvanáct výstřelů stačí.

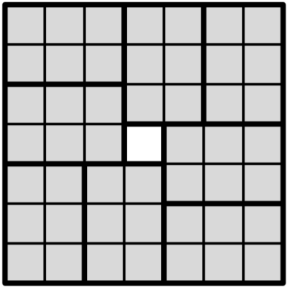


A na méně to není možné.

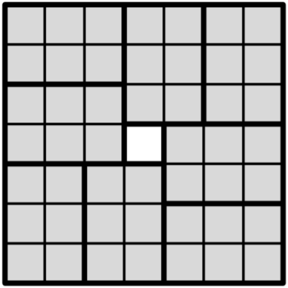
Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli [MO-58-B-I-4]

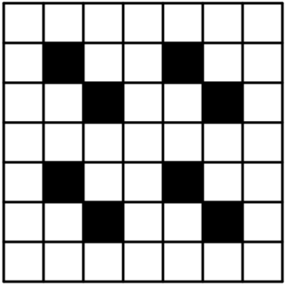


Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli [MO-58-B-I-4]

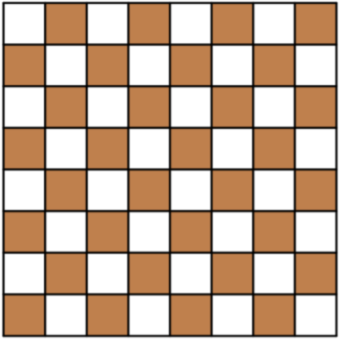


Na desce 7×7 hrajeme hru lodě. Nachází se na ní jedna loď 2×3. Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhneme, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli [MO-58-B-I-4]

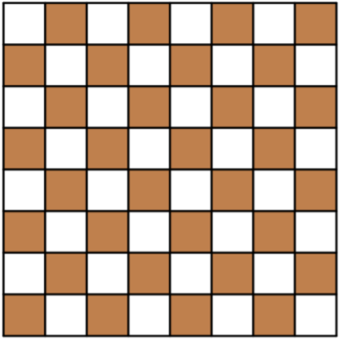




Kolik nejvíce šachových jezdců lze rozmístit na klasickou šachovnici 8×8 tak, aby se žádní dva neohrožovali?



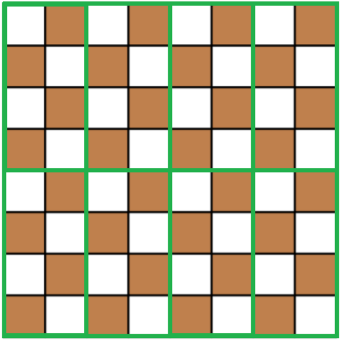
Kolik nejvíce šachových jezdců lze rozmístit na klasickou šachovnici 8×8 tak, aby se žádní dva neohrožovali?



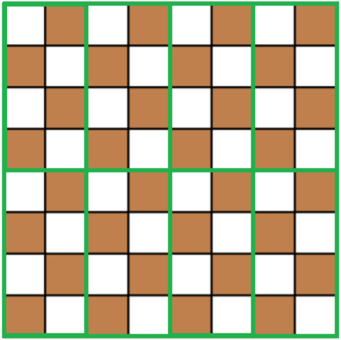
Jezdec při skoku mění barvu $\rightarrow$ určitě jich lze umístit 32, např. všechna tmavá pole.

Kolik nejvíce šachových jezdců lze rozmístit na klasickou šachovnici 8×8 tak, aby se žádní dva neohrožovali?

Kolik nejvíce šachových jezdců lze rozmístit na klasickou šachovnici 8×8 tak, aby se žádní dva neohrožovali?

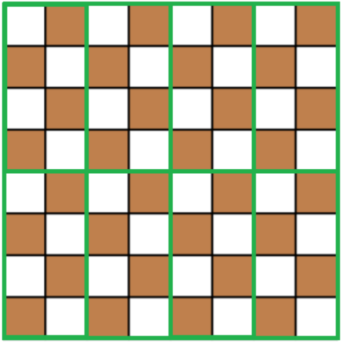


Kolik nejvíce šachových jezdců lze rozmístit na klasickou šachovnici 8×8 tak, aby se žádní dva neohrožovali?



Kdyby 33 nebo víc $\rightarrow$ existuje obdélník s alespoň pěti jezdci.

Kolik nejvíce šachových jezdců lze rozmístit na klasickou šachovnici 8×8 tak, aby se žádní dva neohrožovali?



Kdyby 33 nebo víc $\rightarrow$ existuje obdélník s aspoň 5 jezdci. V každém obdélníku 2×4 mohou být nejvýše 4 jezdci (**párování**). Spor.
Víc než 32 nelze, pro 32 rozmístění máme $\rightarrow$ řešení je 32 jezdců.

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit? [MKS-27-5-2]

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit?   [MKS-27-5-2]

Placení = 2 mince pryč, 1 zpátky

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit? [MKS-27-5-2]

Placení $=$ 2 mince pryč, 1 zpátky (**invariant**).

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit? `[MKS-27-5-2]`

Placení $=$ 2 mince pryč, 1 zpátky (**invariant**).
Začínám s 29 mincemi $\rightarrow$ nakupuju max. 28krát.

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit? `[MKS-27-5-2]`

Placení = 2 mince pryč, 1 zpátky (**invariant**).
Začínám s 29 mincemi $\rightarrow$ nakupuju max. 28krát.

Lze skutečně provést všech 28 nákupů?

V Barevném království mají tři druhy mincí: červené, zelené a modré. Tato platidla však používají velice neobvyklým způsobem. Pokud si něco koupíte, musíte zaplatit dvěma mincemi různé barvy a nazpátek dostanete minci třetí zbývající barvy. Představte si, že máte 20 červených, 5 modrých a 4 zelené mince. Kolik nejvíce nákupů můžete uskutečnit? `[MKS-27-5-2]`

Placení = 2 mince pryč, 1 zpátky (**invariant**).
Začínám s 29 mincemi → nakupuju max. 28krát.

Lze skutečně provést všech 28 nákupů? Ano.

V závislosti na n určete, kolik nejvýše lze z množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ vybrat podmnožin tak, aby každé dvě množiny z výběru měly společné nanejvýše dva prvky? [MKS-33-4-4]

V závislosti na n určete, kolik nejvýše lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ vybrat podmnožin tak, aby každé dvě množiny z výběru měly společné nanejvýše dva prvky? [MKS-33-4-4]

Malé případy:

V závislosti na n určete, kolik nejvýše lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ vybrat podmnožin tak, aby každé dvě množiny z výběru měly společné nanejvýše dva prvky? [MKS-33-4-4]

Malé případy: Pro $n = 0, 1, 2$, resp. 3 najdu $1, 2, 4$, resp. 8 množin.

V závislosti na n určete, kolik nejvýše lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ vybrat podmnožin tak, aby každé dvě množiny z výběru měly společné nanejvýše dva prvky? `[MKS-33-4-4]`

Malé případy: Pro $n = 0, 1, 2$, resp. 3 najdu $1, 2, 4$, resp. 8 množin.

Vezmu všechny nejvýše 3-prvkové množiny $\rightarrow$ to je ok.

V závislosti na n určete, kolik nejvýše lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ vybrat podmnožin tak, aby každé dvě množiny z výběru měly společné nanejvýše dva prvky? `[MKS-33-4-4]`

Malé případy: Pro $n = 0, 1, 2$, resp. 3 najdu $1, 2, 4$, resp. 8 množin.

Vezmu všechny nejvýše 3-prvkové množiny $\rightarrow$ to je ok.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

Víc jich být nemůže: Sporem.

V závislosti na n určete, kolik nejvýše lze z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ vybrat podmnožin tak, aby každé dvě množiny z výběru měly společné nanejvýše dva prvky? `[MKS-33-4-4]`

Malé případy: Pro $n = 0, 1, 2$, resp. 3 najdu $1, 2, 4$, resp. 8 množin.

Vezmu všechny nejvýše 3-prvkové množiny $\rightarrow$ to je ok.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

Víc jich být nemůže: Sporem. Nechť mám výběr s maximálním počtem a je jich ostře víc než $\frac{n^3+5n+6}{6}$.
Kdykoliv je ve výběru 4 či víc prvková množina $\rightarrow$ rozdělit na 2 a víc tříprvkových.

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Tip: **malé počty**.

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Tip: **malé počty**.

Řešení: $4n$

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Tip: **malé počty**.

Řešení: $4n$

1 řádek či 1 sloupec ... max 2 věže

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Tip: **malé počty**.

Řešení: $4n$

1 řádek či 1 sloupec ... max 2 věže
Sporem: nechť alespoň $4n + 1$

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Tip: **malé počty**.

Řešení: $4n$

1 řádek či 1 sloupec ... max 2 věže
Sporem: nechť alespoň $4n + 1 \rightarrow$ alespoň $n + 1$ řádků s 2 věžema

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Tip: **malé počty**.

Řešení: $4n$

1 řádek či 1 sloupec ... max 2 věže
Sporem: nechť alespoň $4n + 1 \rightarrow$ alespoň $n + 1$ řádků s 2 věžema $\rightarrow$ alespoň $2n + 2$ sloupců bez věže.

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. `[MKS-33-4-6]`

Tip: **malé počty**.

Řešení: $4n$

1 řádek či 1 sloupec ... max 2 věže
Sporem: nechť alespoň $4n + 1 \rightarrow$ alespoň $n + 1$ řádků s 2 věžema $\rightarrow$ alespoň $2n + 2$ sloupců bez věže. Zbyde $n - 2$ sloupců, v každém max. 2 věže.

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Tip: **malé počty**.

Řešení: $4n$

1 řádek či 1 sloupec ... max 2 věže
Sporem: nechť alespoň $4n+1 \to$ alespoň $n+1$ řádků s 2 věžema $\to$ alespoň $2n+2$ sloupců bez věže. Zbyde $n-2$ sloupců, v každém max. 2 věže. Celkem

$$2(n+1)+2(n-2)=4n-2<4n+1,$$

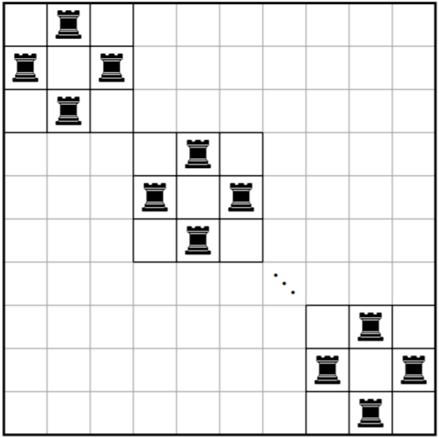
což je spor.

Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

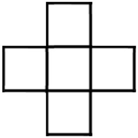
Rozmístění pro $4n$ věží existuje:

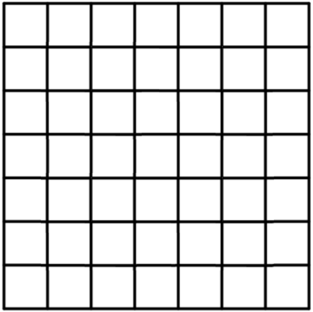
Nalezněte největší možný počet věží, který lze rozmístit na šachovnici $3n \times 3n$ tak, aby každá věž byla ohrožena nejvýše jednou jinou věží. [MKS-33-4-6]

Rozmístění pro $4n$ věží existuje:

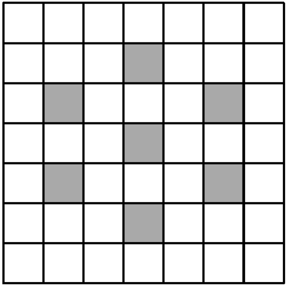


Máme neobarvenou šachovnici 7×7. Kolik nejméně polí je potřeba obarvit, aby jakýkoliv kříž (5 sousedících políček do tvaru zdravotnického kříže) obsahoval alespoň jedno obarvené pole?
[MKS-33-4-7]





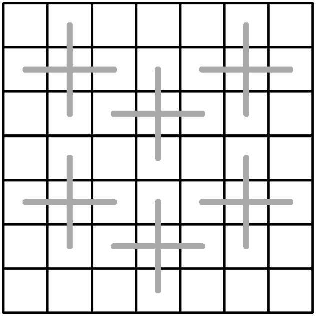
Máme neobarvenou šachovnici 7×7. Kolik nejméně polí je potřeba obarvit, aby jakýkoliv kříž (5 sousedících políček do tvaru zdravotnického kříže) obsahoval alespoň jedno obarvené pole? `[MKS-33-4-7]`

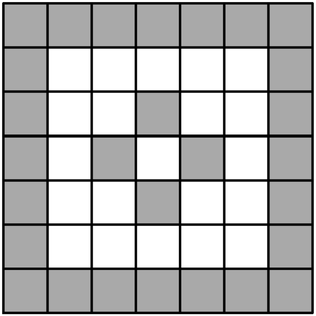


Sedm stačí.

Máme neobarvenou šachovnici 7×7. Kolik nejméně polí je potřeba obarvit, aby jakýkoliv kříž (5 sousedících políček do tvaru zdravotnického kříže) obsahoval alespoň jedno obarvené pole? [MKS-33-4-7]

Kdyby jich stačilo 6:

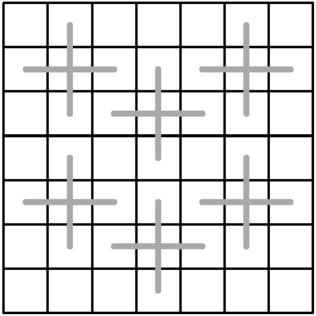


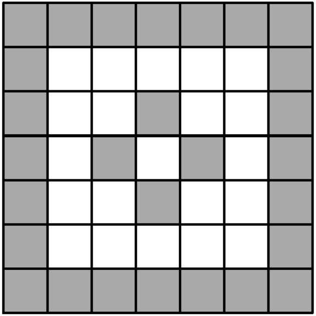


Šedá = určitě není vybarvené

Máme neobarvenou šachovnici 7×7. Kolik nejméně polí je potřeba obarvit, aby jakýkoliv kříž (5 sousedících políček do tvaru zdravotnického kříže) obsahoval alespoň jedno obarvené pole?
[MKS-33-4-7]

Kdyby jich stačilo 6:

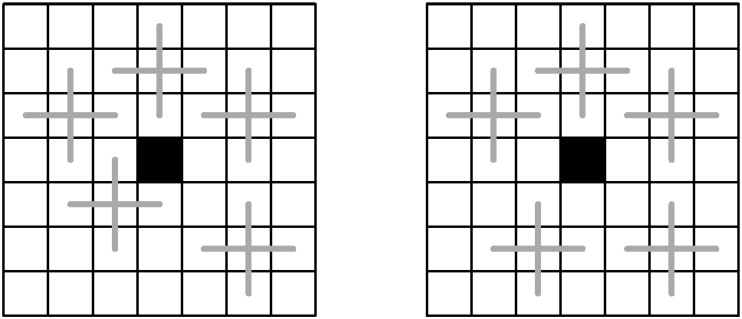




Šedá = určitě není vybarvené $\rightarrow$ musí být vybarvený střed.

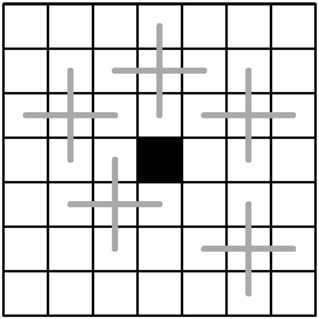
Máme neobarvenou šachovnici 7×7. Kolik nejméně polí je potřeba obarvit, aby jakýkoliv kříž (5 sousedících políček do tvaru zdravotnického kříže) obsahoval alespoň jedno obarvené pole? [MKS-33-4-7]

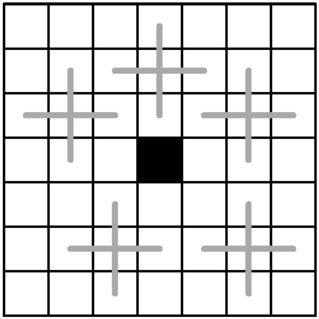
Jedno pole vybarvené $\rightarrow$ už jen 5 dalších.



Máme neobarvenou šachovnici 7×7. Kolik nejméně polí je potřeba obarvit, aby jakýkoliv kříž (5 sousedících políček do tvaru zdravotnického kříže) obsahoval alespoň jedno obarvené pole? [MKS-33-4-7]

Jedno pole vybarvené $\rightarrow$ už jen 5 dalších.





Rotace a symetrie $\rightarrow$ obarvený je pouze střed, nic jiného $\rightarrow$ spor.

Další úlohy – na doma I

Určete největší počet králů, které můžeme umístit na šachovnici 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali. [MO-69-B-I-6-N3]

Figurka střelce ohrožuje na šachovnici libovolné pole diagonály, na níž střelec stojí. Pokud ovšem na některém poli diagonály stojí věž, střelec už pole za ní neohrožuje. Určete největší možný počet střelců, které můžeme spolu se čtyřmi věžemi umístit na šachovnici 8×8 tak, aby se střelci navzájem neohrožovali. [MO-69-B-I-6]

Jaký je největší možný počet čísel, jež lze vybrat z množiny $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ tak, aby součin žádných tří z vybraných čísel nebyl dělitelný devíti? Uveďte příklad vyhovující podmnožiny a zdůvodněte, proč nemůže mít větší počet prvků. [MO-68-C-S-1]

Další úlohy – na doma II

K dispozici máte dva klobouky, deset bílých a deset černých kuliček. Losování vypadá takto: náhodně vyberete klobouk a z něho pak náhodně jednu kuličku. Jakým způsobem rozdělíte kuličky do klobouků (do každého klobouku musíte dát aspoň jednu kuličku), aby pravděpodobnost vytažení černé kuličky byla největší? [MKS-13-6-5]

Najděte minimum výrazu $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x - 6y + 37$ pro x, y reálná čísla. [MKS-13-6-4]

V zelinářství Barča našla 100 beden plných ovoce. V každé bedně byla nějaká směs jablek, banánů a ananasů. Dokažte, že Barča si může koupit 51 z těchto beden tak, že získá přinejmenším polovinu všech jablek, banánů i ananasů zároveň. [MKS-33-4-8]

Zdroje a odkazy

- **MKS** – Matematický korespondenční seriál alias *PraSe*
  `prase.cz`
  citace `[MKS-ročník-série-číslo úlohy]`
- **MO** – Matematická olympiáda
  `matematickaolympiada.cz`
  citace `[MO-ročník-kategorie-kolo-číslo úlohy]`
- kurzy k matematické olympiádě, kraj Praha
  `olympiada.karlin.mff.cuni.cz`