Domáce kolo A: úlohy 2, 4, 5

Jozef Rajník, 22. 10. 2021

Úloha 4 – sústavy rovníc

Úloha 1 (D3, MO 69–A–II–1)**.** Nájdite všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\frac{1}{x+y}+z=1,$$
$$\frac{1}{y+z}+x=1,$$
$$\frac{1}{z+x}+y=1.$$

Úloha 2 (N2)**.** V úlohe 4 máme v obore reálnych čísel riešiť sústavu rovníc

$$xy+1=z^2,$$
$$yz+2=x^2,$$
$$zx+3=y^2.$$

Dokážte, že z prvých dvoch rovníc vyplýva, že čísla $z-x$ a $x+y+z$ sú rôzne od nuly.

Úloha 3 (N1b)**.** V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$3xy-10=2x^2,$$
$$2xy+15=3y^2.$$

Úloha 2 – Lichobežníky, pomery, rovnoľahlosť

Úloha 4 (N1)**.** Dokážte, že dotyčnice vedené z bodu A ku kružnici so stredom O sú súmerne združené podľa priamky OA.

Úloha 5 (N2)**.** Dokážte, že v ľubovoľnom lichobežníku je spojnica stredov jeho ramien rovnobežná s jeho základňami.

Úloha 6 (N3)**.** Uhlopriečky lichobežníka $ABCD$ so základňami AB a CD sa pretínajú v bode P a priamky AD, BC v bode Q. Dokážte, že stredy základní AB, CD ležia na priamke PQ.

O rovnoľahlosti si môžete pozrieť prednášku z Online letnej školy Trojstenu:
`https://www.youtube.com/watch?v=ms3sIT4ckaA`.

Úloha 5 – Švrčkov bod

Ako ukazovať, že sa tri priamky (príp. iné tri objekty) pretínajú v jednom bode?

- Zobrať si priesečník dvoch priamok a ukázať, že ním prechádza aj tretia priamka.
- Ukázať, že dané tri priamky sú nejaké tri známe priamky, o ktorých vieme, že sa v jednom bode pretínajú (výšky, osi uhlov, osi strán, ťažnice, chordály, symediány, ...).

Tvrdenie 1 (O úsekovom uhle)**.** Nech ABC je trojuholník vpísaný do kružnice k a T bod dotyčnice kružnice kv bode B v polrovine opačnej k polrovine BCA. Potom platí $|\sphericalangle TBC| = |\sphericalangle BAC|$. (Uhol TBC je tzv. *úsekový uhol* prislúchajúci tomu oblúku BC kružnice k, ktorý neobsahuje bod A.)

Tvrdenie 2 (O Švrčkovom bode)**.** V ľubovoľnom trojuholníku ABC os uhla BAC, os strany BC a kružnica opísaná trojuholníku ABC prechádzajú jedným bodom.

Tento spoločný bod sa nazýva *Švrčkov bod (prislúchajúci k vrcholu A)*. Najčastejšia sa zvykne definovať ako stred oblúka BC kružnice opísanej, ktorý neobsahuje bod A.

Tvrdenie 3 (O troch prstoch)**.** V trojuholníku ABC označíme I stred vpísanej kružnice a $\check{S}$ Švrčkov bod prislúchajúci bodu A. Dokážte, že $|\check{S}B| = |\check{S}I| = |\check{S}C|$.

Tvrdenie 4. Nech BC je tetiva kružnice k a $\check{S}$ stred oblúka BC. Potom $B\check{S}$ je osou úsekového uhla tetivy BC s dotyčnicou v bode A.

(Poznámka. Na toto tvrdenie sa vieme pozerať ako na limitný prípad tvrdenia o Švrčkovom bode – akoby sme mali trojuholník BBC vpísaný do kružnice k), ktorého prvý a druhý bod splývajú. Za jeho stranu BB tak považujeme dotyčnicu ku kružnici k v bode B.

Úloha 7. Dokážte, že $\check{S}_b\check{S}_c$ je osou strany AI.

Úloha 8. Dokážte, že I je priesečník výšok trojuholníka $\check{S}_a\check{S}_b\check{S}_c$

Úloha 9 (IMO 2006, úloha 1)**.** Nech ABC je trojuholník so stredom vpísanej kružnice I. Vnútri trojuholníka ABC leží bod P, pre ktorý platí

$$|\sphericalangle PBA| + |\sphericalangle PCA| = |\sphericalangle PBC| + |\sphericalangle PCB|.$$

Ukážte, že platí $|AP| \geq |AI|$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $P = I$.

Ďalšie zaujímavé materiály:

- O Švrčkovom a jeho kolegovi Antišvrčkovom bode pozri PraSe seriál Geometrie Trojuholníka (str. 29 n.): `https://prase.cz/archive/36/serial.pdf`
- Mocnosť bodu ku kružnici, Online letná škola Trojstenu: od pomalého úvodu k náročným úlohám: `https://www.youtube.com/watch?v=9JhA9sQ5F78`

Aplikáciu mocnosti a chordál si môžete vyskúšať v nasledovnej úlohe.

Úloha 10 (MO 63-A-III-5)**.** Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme k kružnicu s priemerom AB. Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla BAC v bode A a prechádza bodom C, pretína kružnicu k v bode $P, P \neq A$. Kružnica, ktorá sa dotýka osi uhla ABC v bode B a prechádza bodom C, pretína kružnicu k v bode $Q, Q \neq B$. Dokážte, že priesečník priamok AQ a BP leží na osi uhla ACB.

Korešpondenčné semináre

Ak sa chcete zlepšiť v riešení úloh, ktoré vás môžu čakať na MO, odporúčame Vám zapojiť sa do korešpondenčným seminárov:

- PraSe (Pražský seminár): `https://prase.cz/`
- KMS (Slovenský seminár): `https://kms.sk/`
- *i*KS (Česko-slovenský seminár zameraný hlavne pre tých, čo majú ambície zúčastniť sa medzinárodných olympiádach): `https://iksko.org/`
- Hocijaké iné ďalšie semináre, príp. iné súťaže, kurzy, ... stačí hľadať.