Dělitelnost

Mix doplňujících úloh z domácích kol

Úloha 1. Petr napsal na tabuli 7 po sobě jdoucích přirozených čísel. Pavel je neviděl, avšak tvrdí, že jedno z nich je dělitelné sedmi. Má pravdu? Co kdyby šlo o libovolná přirozená čísla a požadovali bychom, aby součet nějaké podmnožiny byl dělitelný sedmi?

Úloha 2. Myslím si přirozené číslo. Pokud jej zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 3. Pokud myšlené číslo zmenším o 2, dostanu číslo dělitelné 4. a) Jaké nejmenší číslo si můžu myslet? b) Najděte všechna čísla, která si můžu myslet.

Úloha 3. Myslím si přirozené číslo, které je větší než 2000, menší než 3000 a je dělitelné 17. Pokud myšlené číslo zvětším o 1, dostanu číslo dělitelné 11. Pokud své číslo naopak zmenším o 1, dostanu číslo dělitelné 6. Jaké číslo si myslím?

Úloha 4. Blechy Adam a Bára skáčou po očíslovaných schodech stále nahoru. Adam začíná na 1. schodu a skáče o a schodů. Blecha Bára začíná na 3. schodu a skáče o b schodů. Schody, na které obě blechy doskočí, nazveme „dvakrát navštívené“. Určete nejmenší kladný rozdíl pořadových čísel dvakrát navštívených schodů, a to v případech a) $a = 4$ a $b = 5$, b) $a = 4$ a $b = 6$, c) $a = 6$ a $b = 9$.

Úloha 5. Na školní zahradě hraje skupina žáků hru zvanou molekuly. Učitel jim nejprve uložil, aby se rozdělili do trojic. Jeden žák přebyl, a tak z další hry vypadl. Zbylí žáci se pak měli rozdělit do čtveřic. Opět jeden žák přebyl a vypadl. Poté se zbylí žáci měli rozdělit do pětic, zase jeden žák přebyl a vypadl. Učitel nyní ukládá, aby se zbylí žáci rozdělili do šestic. Dokažte, že opět jeden žák přebyde.

Úloha 6. Čtyři dny po sobě jsem zdolával stejné schodiště o méně než 100 schodech. Bral jsem ho první den po 2 schodech, druhý den po 3, třetí den po 4 a čtvrtý den po 5 schodech, na poslední krok mi zbyly po řadě 1, 2, 3 a 4 schody. Kolik schodů celé schodiště mělo?

Úloha 7. Pro která přirozená čísla n je zaručeno, že celá čísla u, v splňující obě podmínky $n|u + v$ a $n|u - v$ jsou sama dělitelná číslem n?

Úloha 8. Pro přirozená čísla a, b platí $a|9b$ a $b|9a$. Určete všechny možné hodnoty podílu a/b.

Úloha 9. Určete všechna kladná celá čísla m, n taková, že n je dělitelem $2m - 1$ a současně m je dělitelem $2n - 1$.

Úloha 10. Ukažte, že součet dvou po sobě jdoucích prvočísel nemůže být dvojnásobek jiného prvočísla.

Po sobě jdoucí

Úloha 11. Dokažte, že existuje libovolně dlouhá posloupnost po sobě jdoucích složených čísel. Existuje 100 po sobě jdoucích čísel, mezi nimiž je právě deset prvočísel?

Úloha 12. Pro která n jde napsat čísla 1 až n v takovém pořadí, aby součet prvních k byl vždy násobek k?

Úloha 13. Existuje 14 po sobě jdoucích čísel, z nichž každé je dělitelné nějakým z čísel $2, 3, 5, 7, 11$?

Na kružnici

Úloha 14. Můžeme umístit čísla od 1 do 20 na kružnici tak, aby součet dvou sousedních čísel byl dělitelný buď 7, nebo 17?

Úloha 15. Na kružnici je napsáno 99 přirozených čísel. Každá dvě sousední čísla a, b se liší o 1, o 2, nebo je jedno dvojnásobkem druhého. Dokažte, že alespoň jedno z čísel je dělitelné třemi.

Úloha 16. Na kružnici je napsáno $n \geq 4$ jedniček nebo minus jedniček tak, že součet součinů všech sousedních čtveřic je roven nule. Dokažte $4|n$.

Hinty

1. Ano v obou případech, v prvním uvažte zbytky po dělení sedmi, ve druhém součty prvních k čísel (v nějakém pevném pořadí) pro $k = 1, \ldots, 7$ a jejich zbytky po dělení sedmi.
2. Jaký je zbytek po dělení 12?
3. Najděte nejprve libovolné takové číslo a pak použijte myšlenku z předchozí úlohy.
4. Jaká je vzdálenost mezi sousedními dvakrát navštívenými schody?
5. Určete zbytek počtu žáků po dělení 12.
6. Určete zbytek počtu žáků po dělení 60.
7. Sečtěte a odečtěte dělitelnosti.
8. Zapište dělitelnosti pomocí celočíselných podílů a vynásobte je.
9. Jakých hodnot mohou nabývat celá čísla $\frac{2n-1}{m}$, $\frac{2m-1}{n}$? Pokud je alespoň jedno malé, snadno dořešíme. Pokud jsou obě velká, dojděte ke sporu se zadanými podmínkami.
10. Kromě jediného případu jsou obě prvočísla lichá. Proč nemůže být polovina jejich součtu také prvočíslo?
11. Začněte kousek za $n!$ pro dost velké n.
12. Jen pro $n \in \{1, 3\}$, postupujte od konce.
13. Která z těch po sobě jdoucích čísel mohou být dělitelná kterými z předepsaných? Na přednášce jsme došli k tomu, že mezi čísly je právě 7 násobků 2, nejvýše 5 násobků 3 (z toho nejvýše 3 liché), nejvýše 3 násobky 5 (z toho nejvýše 2 liché) a nejvýše jeden lichý násobek 7 a 11. Aby tyto počty daly dohromady 14, musí všude v uvedených odhadech nastat rovnosti. Z počtů násobků 3 a 5 pak vyplývá, že naše 14-tice obsahuje násobek 15 a musí být sudý (jinak bychom nepokryli všech 14 čísel). Tento násobek 30 může být pouze na pozicích 7 nebo 9 (počítáno od sudého krajního čísla) kvůli násobkům pěti, ale pak se tam nevejde všech 5 násobků trojky. Požadovaná 14tice čísel tedy neexistuje.
14. Kdo mi pošle řešení na d.hruska@centrum.cz, dostane čokoládu :-)
15. Přeložte podmínky do řeči zbytků modulo 3 a předpokládejte, že jsou použity pouze zbytky 1 a 2.
16. Zkoumejte paritu kladných a záporných součinů.