3. Kolik trojmístných čísel má tu vlastnost, že vyškrtnutím některé číslice dostaneme dvojmístné číslo, které je druhou mocninou nějakého celého čísla? (Zápisy typu 07 nepovažujeme za dvojmístná čísla.) (*Tomáš Bárta, Tomáš Jurík*)

Řešení. Označme číslici, kterou z hledaného trojmístného čísla škrtáme, jako x a výsledné dvojmístné číslo jako $\overline{ab}$ ($a \neq 0$). Dvojmístná čísla, která jsou druhými mocninami celých čísel, jsou pouze čísla z množiny

$$\mathsf{M} = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}.$$

Pokud jsme vyškrtli první číslici, tedy z čísla $\overline{xab}$ jsme dostali číslo $\overline{ab}$, hodnota číslice x může být od 1 po 9 (původní číslo je trojmístné, proto $x \neq 0$). Takových čísel je $9 \cdot 6$, protože máme 9 možností pro číslici x a 6 možností pro číslo $\overline{ab}$ z množiny M. Pokud jsme vyškrtli prostřední nebo poslední číslici, máme v obou případech $10 \cdot 6$ možností, neboť číslice x může být v těchto případech libovolná od 0 do 9. Celkově to je $(9 + 10 + 10) \cdot 6 = 174$ možností, kterými můžeme z nějakého trojmístného čísla dostat dvojmístné číslo z množiny M.

Úloha se ale ptá na počet trojmístných čísel a my jsme některá čísla mohli započítat vícekrát. Jedno číslo můžeme započítat nejvýše třikrát, protože máme pouze tři možnosti, kterou číslici vyškrtneme. Prozkoumejme nejprve, kolik čísel jsme započítali dvakrát, jako například číslo 116, v němž dvěma možnostmi můžeme vyhovujícím způsobem škrtat cifry (první a prostřední).

Dvakrát jsme mohli započítat pouze čísla tvaru $\overline{aab}$, $\overline{abb}$ nebo takové číslo $\overline{abc}$ s různými číslicemi, že dvě z výsledných čísel $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ leží v množině M. Protože každé číslo $\overline{ab}$ z množiny M má různé číslice, je z něj možné vytvořit dvě taková čísla — $\overline{aab}$ a $\overline{abb}$. Těchto čísel je dohromady $6 \cdot 2$. Čísel typu $\overline{abc}$ je 6, neboť to jsou ta čísla, která ve svém zápisu obsahují dvě různá čísla z množiny M se společnou číslicí, a postupným probráním takových dvojic z M zjistíme, že jde o čísla 816, 649, 136, 316, 164 a 364.

Nyní ještě ukážeme, že jsme žádné číslo nemohli započítat třikrát, tj. že bychom po vyškrtnutí libovolné jeho číslice dostali nějaké číslo z množiny M. K tomu si stačí uvědomit, že jedinými kandidáty na trojnásobné započítání je 18 čísel nalezených v předchozím odstavci, načež vyškrtáním číslic zjistíme, že žádné z nich nevyhovuje. Anebo můžeme neexistenci takového třikrát započteného čísla dokázat sporem:

Připusťme existenci čísla $\overline{def}$ (některé jeho číslice mohou být stejné) s vlastností, že čísla $\overline{de}$, $\overline{ef}$ i $\overline{df}$ leží v množině M. Číslice d a e se nemohou rovnat, protože číslo $\overline{de}$ se dvěma stejnými číslicemi se v množině M nenachází. Tedy dvě různá čísla $\overline{ef}$ a $\overline{df}$ z množiny M mají poslední číslici stejnou, což jak vidíme, může být pouze číslice 6. Jedinou možností v tom případě je, že čísla $\overline{ef}$ a $\overline{df}$ jsou v nějakém pořadí čísla 16 a 36. Nakonec by číslo $\overline{de}$ muselo být 13 nebo 31, ani jedno však do množiny M nepatří. Žádné číslo jsme tedy nemohli započítat třikrát.

Hledaný počet čísel je $174 - 12 - 6 = 156$.

Jiné řešení. Dvojmístná čísla, která jsou druhými mocninami celých čísel, jsou pouze čísla z množiny

$$\mathsf{M} = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}.$$

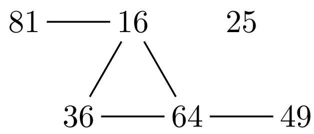
Pro zvolené dvojmístné číslo nazveme jeho *potomkem* trojmístné číslo, které vznikne přidáním jedné číslice. Hledaná trojmístná čísla jsou potomky čísel z M. Nejdříve spočítáme počet potomků jednoho čísla z M, například čísla 16.

Počítání potomků čísla 16 rozdělíme na tři kroky podle toho, kam číslici přidáváme. V každém kroku najdeme 9 nových potomků, což nám dá celkově $3 \cdot 9 = 27$ potomků.

1. Přidáváme před dvojčíslí 16 — můžeme použít kteroukoliv z číslic 1 až 9.

2. Přidáváme mezi číslice 1 a 6 — můžeme použít kteroukoliv z číslic 0 až 9 kromě číslice 1, protože potomka 116 už jsme započítali v předchozím kroku.
3. Přidáváme za dvojčíslí 16 — můžeme použít kteroukoliv z číslic 0 až 9 kromě číslice 6, protože potomka 166 už jsme započítali v předchozím kroku. (Potomek z tohoto kroku se jistě liší od potomka z 1. kroku, protože mají různou prostřední číslici.)

Zopakováním analogické úvahy najdeme 27 potomků ke každému číslu z M, což dohromady dává $6 \cdot 27 = 162$ potomků. Někteří potomci ovšem mohou mít více než jednoho rodiče z M. Například číslo 816 má za rodiče jak číslo 16, tak číslo 81. Pokud mají některá dvě čísla z M stejného potomka, mají společnou aspoň jednu číslici. Nakreslíme schéma, v němž jsou čísla z M spojena, pokud sdílejí číslici.



Pro každou spojenou dvojici spočítáme počet společných potomků. Dvojice $(81, 16)$, $(16, 64)$, $(36, 64)$, $(64, 49)$ mají společného jednoho potomka (postupně 816, 164, 364 a 649), protože nutně sdílejí jeho prostřední číslici. Dvojice $(16, 36)$ má společné dva potomky (136 a 316), protože nutně sdílí jejich poslední číslici. Určených šest společných potomků je navzájem různých, a proto žádný z nich nemá více než dva rodiče, tudíž se každý z nich v počtu 162 potomků objeví dvakrát (jednou za každého rodiče), takže celkem máme $162 - 6 = 156$ různých potomků.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

Při postupu z prvního řešení ohodnoťte 3 body úplné zdůvodnění 174 možností pro konstrukci čísel bez úvahy, že některá z nich jsou započítána vícekrát, z toho 1 bod dejte za správné určení 6prvkové množiny M dvojmístných čísel a zbylé 2 body za výpočet $(9 + 10 + 10) \cdot 6 = 174$. Zbývající 3 body rozdělte na 1 bod za 12 čísel typu $\overline{aab}$ a $\overline{abb}$, 1 bod za šest trojmístných čísel s různými číslicemi, z nichž je možné dvěma způsoby dostat druhou mocninu celého čísla, a poslední bod za zdůvodnění, že žádné číslo nemohlo být započteno třikrát, a dokončení výpočtu.

Při postupu z druhého řešení ohodnoťte 4 body úplné zdůvodnění 162 možností pro konstrukci potomků bez úvahy, že jsou započítáni podle počtu svých rodičů, z toho 1 bod za určení množiny M a 3 body za výpočet $6 \cdot (9 + 9 + 9) = 162$. Zbylé 2 body udělte za vyhledání všech 6 potomků, kteří mají více než jednoho rodiče, konstatování, že jde vždy o rodiče dva, a dokončení výpočtu.