

Obvodové úhly a bod Š – online přednáška

DAVID HRUŠKA

ABSTRAKT. Tento dokument obsahuje tvrzení a úlohy předváděné během online přednášky uskutečněné 2. dubna 2020 (stihla se jen část o tětíkových čtyřúhelnících) pro postupující do krajských kol MO kategorií B a C.

Tětíkové čtyřúhelníky

Tvrzení. (O obvodovém a středovém úhlu) Mějme kružnici se středem S , její tětívu AB a libovolný bod M na větším oblouku AB . Úhel ASB nazýváme středovým a úhel AMB obvodovým k příslušné tětivě AB . Platí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle AMB|$. Pro libovolný bod M' na menším oblouku AB platí $|\sphericalangle AM'B| = 180^\circ - |\sphericalangle AMB| = 1/2|\sphericalangle AS'B|$, kde tentokrát myslíme ten nekonvexní středový úhel.

Tvrzení. (O úsekovém úhlu) Mějme kružnici a její tětívu AB . V bodě A k ní sestrojíme tečnu t . Odchylku přímk AB a t nazveme úsekovým úhlem tětivy AB . Úsekový úhel má stejnou velikost jako příslušný obvodový úhel.

Definice. Čtyřúhelník nazýváme *tětíkový*, pokud mu lze opsat kružnici.

Tvrzení. Čtyřúhelník $ABCD$ je tětíkový právě tehdy, pokud je součet jeho protějších vnitřních úhlů roven 180° nebo platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ (obvodové úhly).

Úlohy

Úloha 1. (O svázaných kružnicích) Máme zadané dvě kružnice k a l s průsečíky X a Y . Bodem X vedme přímku, která protíná k v bodě A a l v bodě C . Bodem Y vedme přímku, která protíná k v bodě B a l v bodě D . Dokažte $AB \parallel CD$.

Úloha 2. Nechť D je bod na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníka ABC . Označme X střed kružnice opsané $\triangle ACD$ a Y střed kružnice opsané $\triangle BDC$. Dokažte, že body C , D , X a Y leží na jedné kružnici. (MO 56–A–II–3a)

Úloha 3. Na kratším oblouku AB kružnice opsané čtverci $ABCD$ je dán bod P . Nechť $PD \cap AB = X$ a $PC \cap BD = Y$. Dokažte, že $|\sphericalangle XYB| = 90^\circ$.

Úloha 4. Dokažte, že průsečík výšek je středem kružnice vepsané trojúhelníku s vrcholy v patách výšek.

Úloha 5. Mějme trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H . Dokažte, že obrazy H v osových souměrnostech podle stran $\triangle ABC$ leží na kružnici opsané ABC .

Úloha 6. Mějme pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB \perp AD$). Sestrojme kružnici k , která se dotýká přímky AB v bodě A a přímky CD v bodě D . Dále sestrojme kružnici l , která se dotýká přímky AB v bodě B a prochází bodem C . Nechť kružnice k a l mají vnější dotyk v bodě P . Dokažte, že přímka BC je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku PCD . (MO 52-B-III-4)

Švrčkův bod

Tvrzení. (Bod Š) Osa úhlu BAC , kružnice opsaná $\triangle ABC$ a osa strany BC se protínají v bodě $\check{S} \neq A$.

Tvrzení. Body B, C, I, E_a leží na jedné kružnici se středem $\check{S}_a$. Platí tedy $|\check{S}_a I| = |\check{S}_a B| = |\check{S}_a C| = |\check{S}_a E_a|$.

Úloha 7. (Shooting lemma) Je dána tětiva BC kružnice k a střed jejího oblouku S . Jím procházející přímky p, q protnou přímku BC a kružnici k ve čtyřech bodech ležících na jedné kružnici.

Úloha 8. V trojúhelníku ABC s běžným značením ukažte, že I je ortocentrem trojúhelníka $\check{S}_a \check{S}_b \check{S}_c$.

Úloha 9. Osy vnitřních úhlů u vrcholů A, B trojúhelníka ABC protnou protější stranypo řadě v bodech K, L . Osa úsečky BL protíná přímku AK v bodě M . Bod N leží na přímce BL tak, že $KN \parallel ML$. Dokažte, že $|KN| = |NA|$.

Další zdroje

- (i) Matematická Olympiáda – <http://www.matematickaolympiada.cz/>
- (ii) PraSe – <https://prase.cz/>
- (iii) Úhlení – <https://prase.cz/library/AngleChasingMR/AngleChasingMR.pdf>
- (iv) Bod Š – <https://prase.cz/library/SvrckuvBodMV/SvrckuvBodMV.pdf>