

Osy úhlů a bod Š – II. online přednáška

DAVID HRUŠKA

ABSTRAKT. Ve druhé přednášce navazující na tu z 2. dubna 2020 se podíváme na osy úhlů a Švrčkův bod.

Úloha. (Na rozehrátí) Kolik bodů v rovině trojúhelníka ABC má od všech jeho stran stejnou vzdálenost?

Teorie

Tvrzení. (O kružnici vepsané) Osy vnitřních úhlů trojúhelníka ABC se protínají ve středu I jeho kružnice vepsané, která se všech tří stran dotýká zevnitř.

Tvrzení. (O kružnicích opsaných) Osy vnějších úhlů u vrcholů B, C trojúhelníka ABC se s osou vnitřního úhlu u A protínají ve středu E_a jeho kružnice připsané straně BC , která se stran AB, AC dotýká zevnitř a strany BC zvenku.

Tvrzení. (Bod Š) Osa úhlu BAC , kružnice opsaná $\triangle ABC$ a osa strany BC se protínají v bodě $\check{S}_a \neq A$.

Tvrzení. Body B, C, I a E_a leží na jedné kružnici se středem $\check{S}_a$, platí tedy $|\check{S}_a I| = |\check{S}_a B| = |\check{S}_a C| = |\check{S}_a E_a|$. Tato kružnice protíná polopřímku AC podruhé v osovém obrazu $B' \neq C$ bodu B přes osu úhlu BAC .

Tvrzení. (Shooting lemma) Je dána tětiva BC kružnice k a střed jejího oblouku M . Jím procházející přímky p, q protnou přímku BC a kružnici k ve čtyřech bodech ležících na jedné kružnici.

Úlohy

Úloha 1. Osy vnitřních úhlů u vrcholů A, B trojúhelníka ABC protnou protější strany po řadě v bodech K, L . Osa úsečky BL protíná přímku AK v bodě M . Bod

N leží na přímce BL tak, že $KN \parallel ML$. Dokažte, že $|KN| = |NA|$.

(Junior Balkan MO 2010)

Úloha 2. Je dána kružnice k a její průměr AB . Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě $E \neq B$. Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné.

(MO 68–B–II–3)

Úloha 3. Je dána kružnice k se středem S a tětivou AB , která není jejím průměrem. Na polopřímce opačné k polopřímce BA je vybrán libovolný bod $K \neq B$. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKS protne kružnici k v takovém bodě C , který je souměrně sdružený s bodem B podle přímky SK .

(MO 68–B–III–3)

Úloha 4. Je dána polokružnice k nad průměrem PQ . Na ní je sestrojena tětiva BC pevné délky d , jejíž krajní body jsou různé od bodů P, Q . Paprsek vyslaný z bodu B se od průměru PQ odrazí do bodu C v takovém bodě A , že $|\angle PAB| = |\angle QAC|$. Dokažte, že velikost úhlu BAC nezávisí na poloze tětivy BC na polokružnici k .

(MO –67–A–III–2)

Úloha 5. Nechtě ABC je ostroúhlý trojúhelník, ve kterém $|AB| \neq |AC|$. Kružnice nad průměrem BC protíná strany AB a AC postupně v bodech M a N . Označme O střed strany BC . Vnitřní osy úhlů BAC a MON se protínají v R . Dokažte, že se kružnice opsané trojúhelníkům BMR a CNR podruhé protínají na straně BC .

(IMO 2004)

Další zdroje

- (i) Matematická Olympiáda – <http://www.matematickaolympiada.cz/>
- (ii) PraSe – <https://prase.cz/>
- (iii) Úhlení – <https://prase.cz/library/AngleChasingMR/AngleChasingMR.pdf>
- (iv) Bod Š – <https://prase.cz/library/SvrckuvBodMV/SvrckuvBodMV.pdf>
- (v) Geometrie trojúhelníka – <https://prase.cz/archive/36/serial.pdf>