Nerovnosti a nerovnice

Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

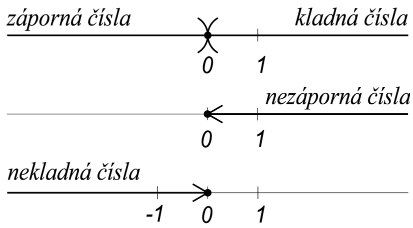
"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Nerovnosti a nerovnice

1 Základní nerovnosti

Vedle práce s různými rovnostmi a řešením rovnic hrají v matematice významnou roli i nerovnosti a různé odhady chyb při přibližných řešeních úloh. K tomu je někdy třeba řešit různé nerovnice.

Reálná čísla jsou uspořádaná, o dvou různých reálných číslech vždy platí, že právě jedno z nich je menší než druhé, např. říkáme, že číslo a je menší než číslo b, což zapisujeme $a < b$ nebo také $b > a$ (číslo b je větší než číslo a). Čísla větší než nula (0) se nazývají kladná, čísla menší než 0 jsou čísla záporná (číslem budeme vždy rozumět číslo reálné). Čísla kladná a nula tvoří dohromady čísla nezáporná. Přidáme-li k záporným číslům nulu, dostaneme čísla nekladná. Reálná čísla si znázorňujeme



Obrázek 1:

na tzv. číselné ose. Druhá mocnina nenulového čísla je vždy číslo kladné, druhá mocnina nuly je nula, takže druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné. Pro každé číslo a tedy platí:

$$a^2 \geq 0 \tag{1}$$

což je taková první nerovnost, která platí pro všechna reálná čísla. Z ní pak můžeme odvodit složitější nerovnosti na základě pravidel pro počítání s nerovnostmi nebo nerovnicemi. Mezi ně patří především tato:

Pro všechna $a, b, c, d, \dots$ platí:

$$\begin{aligned} a < b \quad &\Rightarrow \quad a + c < b + c, \\ a < b, c > 0 \quad &\Rightarrow \quad ac < bc, \\ a < b, c < d \quad &\Rightarrow \quad a + c < b + d. \end{aligned}$$

Pro záporné číslo d je číslo $-d$ kladné, proto z $a < b$ plyne $a(-d) < b(-d)$, tedy $-ad < -bd$, odkud $bd < ad$ neboli $ad > bd$. Násobíme-li tedy obě strany správné nerovnosti $a < b$ *záporným* číslem d, dostaneme správnou nerovnost $ad > bd$ pokud současně obrátíme znak nerovnosti.

To je zatím vše, co budeme pro počítání s nerovnostmi a nerovnicemi potřebovat.

Pro každá dvě čísla a, b platí podle (1)

$$(a - b)^2 \geq 0,$$

tedy $a^2 + b^2 \geq 2ab$, přičemž rovnost platí právě když $a = b$. To je nerovnost, kterou často použijeme. V případě kladných čísel a, b dostaneme vynásobením číslem $\frac{1}{ab}$ nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

kterou můžeme formulovat také takto:

Součet $c + \frac{1}{c}$ libovolného kladného čísla c a jeho převrácené hodnoty je vždy větší nebo roven 2, rovnost platí pouze v případě $c = 1$.

Pro každá dvě kladná čísla a, b platí podle (1)

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0,$$

kterou můžeme podle uvedených pravidel upravit na tvar

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

rovnost platí pouze pro $a = b$. Číslo $\frac{a+b}{2}$ znáte; víte, že je to tzv. **aritmetický průměr** čísel a, b; výraz $\sqrt{ab}$ se nazývá **geometrický průměr** čísel a, b. Dokázali jsme, že geometrický průměr každých dvou kladných čísel se nejvýše rovná jejich aritmetickému průměru a oba průměry se sobě rovnají právě tehdy, když se čísla sobě rovnají.

Příklad 1 *Kladná čísla a, b splňují podmínku $a + b = 12$. Dokažte, že jejich součin ab není větší než 36.*

Řešení: Podle odvozené nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. AG-nerovnosti) je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 6$, takže $ab \leq 36$. Přitom $ab = 36$ pouze v případě $a = b = 6$. Bez použití AG-nerovnosti můžeme úlohu řešit takto:

$$b = 12 - a,\ ab = a(12 - a) = -a^2 + 12a = -(a^2 - 12a) = -(a - 6)^2 + 36,$$

takže $ab \leq 36$, rovnost platí pouze v případě $(a - 6)^2 = 0$, tj. $a = 6, b = 6$. Konečně bychom mohli také říci, že z $a + b = 12$ plyne $a = 6 + x$, $b = 6 - x$ pro nějakou hodnotu $x \in (-6, 6)$ a je tedy $ab = 36 - x^2 \leq 36$. Rovnost platí pouze pro $x = 0$, $a = b = 6$. Úlohu můžeme interpretovat geometricky: Obdélník o stranách a, b s obvodem $24m = 2(a + b)m$ nemůže mít obsah větší než $36m^2$ a má obsah $36m^2$ právě tehdy, když je to čtverec o straně $6m$ (čtverec považujeme za zvláštní případ obdélníku).

Příklad 2 *Součin dvou kladných čísel a, b je 16. Existuje dolní a horní odhad pro součet $a + b$?*

Řešení: Dolní odhad jistě existuje, například určitě platí $a + b > 0$, protože obě čísla jsou kladná. Není to však nejlepší odhad. Použijeme-li AG-nerovnost, dostaneme $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = 4$, takže $a+b \geq 8$. Bez užití AG-nerovnosti můžeme postupovat takto: Z $ab = 16$ plyne $b = \frac{16}{a}$ a tedy $a + b = a + \frac{16}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{4}{\sqrt{a}}\right)^2 + 8$, proto je $a + b \geq 8$. Nebo můžeme z $ab = 16$ odvodit, že $a = 4c$, $b = \frac{4}{c}$ pro vhodné $c > 0$ a tedy $a + b = 4\left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 8$, neboť $c + \frac{1}{c} \geq 2$ pro kladné c. Odhad $a + b \geq 8$ se už nedá zlepšit, jak ukazuje příklad $a = b = 4$. Horní hranice pro $a + b$ při podmínce $ab = 16$ neexistuje. Zvolíme-li totiž jakékoliv kladné číslo k a položíme-li $a = k$, $b = \frac{16}{k}$ je $ab = 16$, $a + b > k$.

Ukážeme si ještě další průměry, zatím jen dvou kladných čísel. **Harmonický průměr** kladných čísel a, b se definuje jako převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot čísel a, b, tedy jako číslo:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{b + a}$$

Snadno dokážemne, že se harmonický průměr dvou kladných čísel nejvýše rovná jejich geometrickému průměru. Chceme dokázat, že $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$. Opět vyjdeme z nerovnosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, upravíme na tvar $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, poslední nerovnost vynásobíme kladným číslem $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$, dostaneme $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$. Rovnost platí právě tehdy, když je $a = b$.

Příklad 3 *Pojedete-li z města A do s km vzdáleného města B průměrnou rychlostí a kmh^{-1} a zpět průměrnou rychlostí b kmh^{-1}, jakou průměrnou rychlostí jste jeli z A do B a zpět do A?*

Řešení: Celkem ujedete vzdálenost $2s$ km za $(\frac{s}{a} + \frac{s}{b})$ hodin, průměrná rychlost je tedy

$$\frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} kmh^{-1},$$

tedy harmonický průměr hodnot a, b.

Uvedeme ještě jeden průměr, průměr kvadratický. Pro kladná čísla a, b definujeme **kvadratický průměr** jako

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

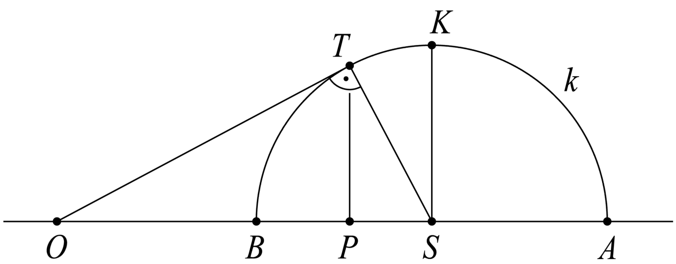
Víme, že $a^2 + b^2 \geq 2ab$, a tedy $2a^2 + 2b^2 \geq (a + b)^2$. Dělením čtyřmi a odmocněním dostaneme výsledek:

Kvadratický průměr čtyř kladných čísel je vždy větší nebo roven jejich aritmetickému průměru a rovnají se právě tehdy, když jsou čísla stejná.

Odvozené výsledky můžeme shrnout: Pro každá dvě kladná čísla a, b platí

$$\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

přičemž pro různá čísla a, b platí všude ostrá nerovnost ($<$), v případě $b = a$ se všechny čtyři průměry rovnají číslu a. Všechny čtyři průměty si můžeme znázornit geometricky. Předpokládejme $b < a$. Na polopřímku s počátečním bodem O naneseme úsečku OB délky b a úsečku OA délky a. Sestrojíme polokružnici k s průměrem $|BA|$, její střed označíme S. Je pak $|OS| = \frac{a+b}{2}$. Dále označíme T bod dotyku tečny vedené bodem O. Z Pythagorovy věty plyne $|OT| = \sqrt{ab}$. Označíme-li P patu kolmice vedené bodem T na přímku OA, platí podle Euklidovy věty o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku OTS vztah $|OP| = \frac{2ab}{a+b}$.



Obrázek 2:

Veďme ještě bodem S kolmici k AB, která protne polokružnici k v bodě K. Je pak $|OK| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Zřejmě platí

$$|OB| < |OP| < |OT| < |OS| < |OK| < |OA|,$$

tj.

$$b < \frac{2ab}{a + b} < \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} < a.$$

Příklad 4 *Kladné racionální číslo p se nemůže rovnat $\sqrt{2}$, protože $\sqrt{2}$ je číslo iracionální (nedá se napsat jako poměr dvou celých čísel). Je tedy buď $p < \sqrt{2}$ nebo $p > \sqrt{2}$. Dokažte v každém případě, že $\sqrt{2}$ leží mezi čísly p a $\frac{p+2}{p+1}$, tj. platí $p < \sqrt{2} < \frac{p+2}{p+1}$ nebo $\frac{p+2}{p+1} < \sqrt{2} < p$.*

Řešení: Předpokládejme nejdříve $p < \sqrt{2}$. Chceme dokázat, že $\sqrt{2} < \frac{p+2}{p+1}$ nebo ekvivalentní nerovnost $p(\sqrt{2}-1) < 2-\sqrt{2} < \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$. To je však nerovnost $p < \sqrt{2}$ vynásobená kladným číslem $\sqrt{2}-1$. Zcela obdobně postupujeme i v případě $p > \sqrt{2}$.
Jiný postup: Upravíme součin

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-p)\left(\frac{p+2}{p+1}-\sqrt{2}\right) &= (\sqrt{2}-p)\frac{p+2-p\sqrt{2}-\sqrt{2}}{p+1} = \\ = \frac{(\sqrt{2}-p)(\sqrt{2}-1)(p-\sqrt{2})}{p+1} &= -\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-p)^2}{p+1}\end{aligned}$$

Vidíme, že výsledek je vždy záporný. Proto mají vždy čísla $\sqrt{2}-p$, $\frac{p+2}{p+1}-\sqrt{2}$ opačná znaménka (jedno je kladné, druhé záporné), což jsme vlastně měli dokázat.

Příklad 5 *Jestliže pro reálná čísla a, b, c platí současně $abc > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $a+b+c > 0$, jsou čísla a, b, c kladná.*

Řešení: Protože $abc > 0$, jsou buď čísla a, b, c kladná a není co dokazovat, nebo je jedno kladné a zbývající dvě záporná. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $a > 0, b < 0, c < 0$. Je pak $bc > a(-b-c)$ a také $a > (-b-c)$ odkud $a(-b-c) > (-b-c)^2$ a tedy $bc > (b+c)^2$. Po úpravě $0 > b^2+bc+c^2 = \left(b+\frac{1}{2}c\right)^2+\frac{3}{4}c^2$, což je však spor. Druhý případ tedy nemůže nastat.

Příklad 6 *Dokažte, že pro kladná čísla a, b, c vždy platí nerovnost*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Řešení: Vynásobením kladným součinem všech čtyř jmenovatelů dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b),$$

kterou máme dokázat. Už z dané nerovnosti je vidět, že v případě $a=b=c$ platí rovnost. Proto zkusíme, zda dokazovanou nerovnost můžeme dostat jako součet kladných násobků nerovností $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$, $(c-a)^2 \geq 0$. Pak už snadno zjistíme, že dokazovanou nerovnost můžeme napsat ve tvaru

$$(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2 \geq 0,$$

která evidentně platí pro všechna kladná čísla a, b, c. Rovnost platí pouze v případě $a=b=c$.
Jiný důkaz dostaneme zavedením nových proměnných $u=b+c$, $v=c+a$, $w=a+b$. Je pak $a=\frac{1}{2}(v+w-u)$, $b=\frac{1}{2}(w+u-v)$, $c=\frac{1}{2}(u+v-w)$ a máme dokázat nerovnost

$$\frac{v+w-u}{2u}+\frac{w+u-v}{2v}+\frac{u+v-w}{2w} \geq \frac{3}{2},$$

po úpravě

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v}{u}+\frac{u}{v}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{w}{u}+\frac{u}{w}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{w}{v}+\frac{v}{w}\right) \geq 3.$$

Platnost této nerovnosti plyne okamžitě z toho, že součet kladného čísla a jeho převrácené hodnoty je větší nebo roven dvěma.

Úloha 1 *Je-li* $a > 0$, $b > 0$ *a* $ab = 2$, *pak* $(a+1)(b+2) \geq 8$. *Dokažte.*

Úloha 2 *Dokažte, že* $a^2 + 3 \geq 2\sqrt{a^2+2}$ *pro každé reálné* a.

Úloha 3 *Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, d platí*

$$(ab+cd)(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}).$$

Úloha 4 *Rozhodněte, zda nerovnost*

$$a(b+1)+b(c+1)+c(d+1)+d(a+1) \geq \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$$

platí pro libovolná čísla a, b, c, d vyhovující podmínce a) $ab = cd = 1$, *b)* $ac = bd = 1$.

Úloha 5 *Je dáno přirozené číslo* n $(n \geq 2)$ *a reálná čísla* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *pro která platí*

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokažte, že platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^n \geq n.$$

Úloha 6 *Dokažte,že pro dvojici čísel x, y platí* $x^2+y^2 \leq r^2$, *jestliže* $|x|+|y| \leq r$. *Dokažte, že obrácená implikace neplatí. Platí však trochu slabší implikace: Je-li* $|x|+|y| \leq r$, *je* $x^2+y^2 \leq 2r^2$, *tedy* $\sqrt{x^2+y^2} \leq r\sqrt{2}$.

2 Průměry čísel

Výsledky uvedené v úvodu, tj. příklady průměrů dvou čísel, můžeme zobecnit na více čísel. Aritmetickým průměrem čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rozumíme číslo

$$\boldsymbol{A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}},$$

geometrickým průměrem kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je číslo

$$\boldsymbol{G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}},$$

tedy n-tá odmocnina ze součinu čísel $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. I zde platí, že se geometrický průměr nejvýše rovná aritmetickému a rovnost obou průměrů platí právě tehdy, když jsou čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stejná, což si nyní dokážeme. V případě $n = 2$ jsme už tvrzení dokázali. Dokážeme nerovnost pro $n = 4$. Platí

$$\sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2} \cdot \sqrt{a_3a_4}} \leq \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_3+a_4}{2}} \leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

Tím jsme dokázali nerovnost mezi G a A pro $n = 4$, použili jsme při tom třikrát nerovnost pro $n = 2$. Použijeme-li nerovnost mezi G a A pro čtyři čísla $a_1, a_2, a_3, \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$, dostaneme po úpravě nerovnost mezi G a A pro čísla a_1, a_2, a_3. Podobně postupujeme dále, z nerovnosti pro 4 čísla dokážeme nerovnost pro 8 čísel, pak pro 16 čísel, 32 čísel atd. Pro šest čísel to plyne z nerovnosti pro 8 čísel $a_1, a_2, \ldots, a_5, a_6, \frac{a_1+\ldots+a_6}{6}, \frac{a_1+\ldots+a_6}{6}$. Podobně postupujeme v případě třeba 13 čísel. Vyjdeme z platnosti nerovnosti pro 16 čísel, za která zvolíme daných třináct čísel a doplníme třemi čísly, která se všechna rovnají aritmetickému průměru těch 13 čísel.

Napíšeme-li nerovnost mezi geometrickým a pritmetickým průměrem kladných čísel $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ a přejdeme-li k převráceným hodnotám těchto průměrů, dostaneme ihned, že harmonický průměr

$$\boldsymbol{H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1}}$$

je mneší nebo roven geometrickému průměru $G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Využili jsme implikaci

$$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b},$$

která platí pro kladná čísla a, b.

Příklad 7 *Pro strany a, b, c trojúhelníku, pro jejich výšky u, v, w příslušející po řadě stranám a, b, c, pro jeho obsah S a poloměr ρ vepsané kružnice platí známé vztahy $au = bv = cw = 2S = (a+b+c)\rho$, takže $2S = \left(\frac{2S}{u} + \frac{2S}{v} + \frac{2S}{w}\right)\rho$, odkud plyne $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{\rho}$. Na základě této rovnosti dokažte, že $9\rho \le u + v + w$.*

Řešení: Rovnost $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{\rho}$ dělíme třemi a přejdeme k převráceným hodnotám. Dostaneme tak rovnost $H(u, v, w) = 3\rho$, kde H značí harmonický průměr hodnot u, v, w. Jejich aritmetický průměr není menší než $H(u, v, w)$, takže $\frac{u+v+w}{3} \ge 3\rho$, $u + v + w \ge 9\rho$.

Sečtením nerovností $(a_i - a_j)^2 \ge 0$ pro všechny dvojice (i, j), pro které platí $i < j \le n$, dostaneme nerovnost

$$(n-1)(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \ge 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n),$$

po úpravě

$$\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} \ge (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2.$$

Omezíme-li se na nezáporná čísla, můžeme psát

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \ge \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(Aritmetický průměr nezáporných čísel se nejvýše rovná jejich kvadratickému průměru, rovnost obou nastává pouze v případě rovnosti všech číel jejichž průměry porovnáváme).

Příklad 8 *Dokažte, že pro kladná čísla a, b, c vždy platí $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$ a určete, kdy platí rovnost.*

Řešení: Je to krásný příklad na užití AG nerovnosti podle níž je

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) : 3 \ge \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 1$$

Úloha 7 *Je-li součin kladných čísel a, b, c roven 1, pak platí*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c.$$

Dokažte.

Úloha 8 *Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

3 Trojúhelníková nerovnost

Nejznámější je asi nerovnost trojúhelníková. Každý ví, že nejkratší cesta z bodu A do bodu C je kratší, než cesta z bodu A do bodu B a z bodu B do bodu C s výjimkou případu, kdy bod B leží mezi body A a C, tedy kdy bod B je bodem úsečky AC, tj. vždy platí

$$|AC|\leq |AB|+|BC|$$

a rovnost platí právě jen v případě když je B bodem úsečky AC. Tvoří-li body A, B, C vrcholy trojúhelníku, pak při obvyklém označení délek stran trojúhelníku $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$ platí

$$a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b. \tag{2}$$

A obráceně, platí-li pro kladná čísla a, b, c tyto nerovnosti, existuje (při zvolené jednotce délky) trojúhelník, jehož strany mají délky a, b, c. Kromě toho je takový trojúhelník až na shodnost jediný.

Příklad 9 *Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku, je* $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$. *Dokažte.*

Řešení: Výše uvedené nerovnosti (2) postupně vynásobíme a, b, c a sečteme.

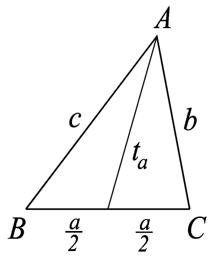
Příklad 10 *Ukažte, že platnost nerovností (2) je ekvivalentní s platností jediné nerovnosti*

$$2bc>\left|b^2+c^2-a^2\right|.$$

Řešení: Z platnosti (2) postupně plyne $b-c<a$, $c-b<a$, tedy $|b-c|<a$. Zároveň platí $a<b+c$, proto $(b-c)^2<a^2<(b+c)^2$, takže $b^2+c^2-a^2<2bc$ a $a^2-b^2-c^2<2bc$, odkud $\left|b^2+c^2-a^2\right|<2bc$. Obráceně plyne z této nerovnosti $2bc>b^2+c^2-a^2$ a současně $2bc>a^2-b^2-c^2$, tj. $a^2>(b-c)^2$ a také $(b+c)^2>a^2$ a tedy $a>b-c$, $a>c-b$, $b+c>a$, což jsou vlastně nerovnosti (2).

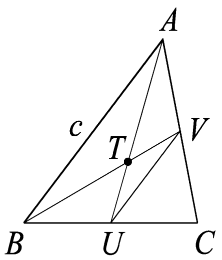
Příklad 11 *Označme s poloviční obvod trojúhelníku, t_a, t_b, t_c délky těžnic tohoto trojúhelníku, tedy délky úseček spojujících vrchol trojúhelníku se středem protější strany. Odhadněte součet $t = t_a + t_b + t_c$ zdola i shora pomocí vhodných násobků hodnoty s.*

Řešení: Označme a, b, c obvyklým způsobem délky stran trojúhelníku. Z trojúhelníkové nerovnosti (viz obr.) okamžitě plyne $t_a < c + \frac{a}{2}$ a cyklicky $t_b < a + \frac{b}{2}$, $t_c < b + \frac{c}{2}$, sečtením těchto tří nerovností dostaneme $t < \frac{3}{2}(a + b + c) = 3s$. Podobně plyne z trojúhelníkové nerovnosti $c < \frac{a}{2} + t_a$ a cyklicky $a < \frac{b}{2} + t_b$, $b < \frac{c}{2} + t_c$, sečtením máme $2s < s + t$.Dostali jsme tak pro t dolní odhad s a horní odhad $3s$, tedy



$$s < t < 3s.$$

Jsou to však nejlepší odhady? Nešel by dolní odhad zvětšit a horní odhad zmenšit? Ukážeme, že to lze. K tomu stačí vědět, že se všechny tři těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě, v těžišti T, který dělí těžnici v poměru 2:1, dva díly od vrcholu trojúhelníku a jeden díl od středu protější strany (viz. obr.). Označme U, V středy stran BC, CA. V trojúhelníku ABT platí $c < \frac{2}{3}(t_a + t_b)$, cyklicky platí také $a < \frac{2}{3}(t_b + t_c)$, $b < \frac{2}{3}(t_c + t_a)$. Sečtením dostaneme $2s < \frac{4}{3}t$, tedy $\frac{3}{2}s < t$. Dále v trojúhelníku BUV platí $|UV| = \frac{1}{2}c$, protože UV je střední příčka trojúhelníku rovnoběžná s AB, $|BV| < |BU| + |UV|$, tj. $t_b < \frac{1}{2}(a + c)$. Opět napíšeme i nerovnosti, které dostaneme z této cyklickou záměnou, sečtením dostaneme $t < 2s$, takže $\frac{3}{2}s < t < 2s$.

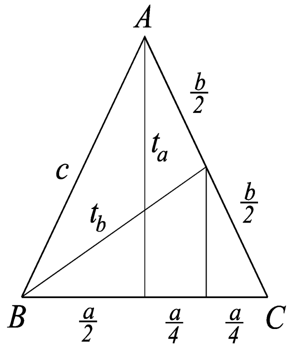


Dostali jsme tak lepší odhad dolní i horní. Ukážeme, že tyto odhady se už nedají zlepšit. Uvažujme rovnoramenný trojúhelník se základnou a a rameny délky b, $a < 2b$. Pro takový trojúhelník je $s = b + \frac{a}{2}$, $t_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, délka každé ze zbývajících dvou těžnic (viz. obr.) se rovná

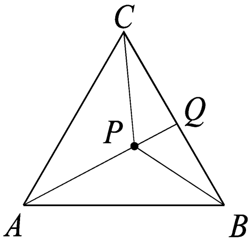
$$t_b = \sqrt{\frac{9a^2}{16} + \left(\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{16}\right)} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{2}},$$

takže

$$\frac{3}{2}s = \frac{3}{2}b + \frac{3}{4}a,\ t = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + \sqrt{b^2 + 2a^2},\ 2s = 2b + a.$$



Pro a blížící se k hodnotě $2b$ se $\frac{3}{2}s$ i t blíží ke stejné hodnotě $3b$, proto se dolní odhad $\frac{3}{2}s$ nedá zvětšit. Podobně pro a blížící se k nule se t i $2s$ blíží ke stejné hodnotě $2b$, nedá se tedy horní odhad $2s$ zmenšit.



Příklad 12 *P je vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Dokažte, že délky úseček PA, PB, PC jsou délkami stran trojúhelníku, tedy, že každá je menší, než součet zbývajících dvou.*

Řešení: Přímka AP protne stranu BC v bodě Q (viz obr.). Proto je $|PA| < |AQ|$ a $|AQ| < |AC| = |BC| < |PB| + |PC|$, takže $|PA| < |PB| + |PC|$. Analogicky dokážeme i další dvě nerovnosti.

Úloha 9 *Dokažte,že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí*

$$\frac{(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2}{abc^2} \leq 2.$$

Pro kterétrojúhelníky nastane v předchozím vztahu rovnost?

Úloha 10 *Je-li S obsah trojúhelníku o stranách a, b, c a T obsah trojúhelníku o stranách a+b, b+c, c+a, pak platí $T \geq 4S$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

4 Cauchyova nerovnost

(Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, francouzský matematik, čti kóši, kóšiova nerovnost)

Ve třetím ročníku matematické olympiády byla tato úloha:
Dokažte, že pro libovolná čtyři čísla u_1, u_2, v_1, v_2 platí nerovnost

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2).$$

Dnes by většina řešitelů úloh MO řekla, že to není třeba dokazovat, že to je známá Cauchyova nerovnost. A měli by pravdu. Úlohu můžeme ještě zobecnit, pro libovolná reálná čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ platí

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2) \tag{3}$$

Důkaz dostaneme sečtením všech nerovností $0 \leq (u_iv_j - u_jv_i)^2$ pro všechny dvojice $i < j$. Odtud ihned vidíme, že rovnost v nerovnici (3) platí právě tehdy, když jsou všechna čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nulová, nebo je uspořádaná n-tice $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ násobkem n-tice $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, tedy když existuje číslo k tak, že $v_1 = ku_1,\ v_2 = ku_2,\ \ldots,\ v_n = ku_n$

Příklad 13 *Ukažte, že pro reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vždy platí*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

Řešení: Pro všechna $i < j$ platí $(a_j - a_i)^2 > 0$. Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n).$$

Přičteme-li k oběma stranám součet $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, dostaneme požadovanou nerovnost. Důkaz plyne ovšem také z Cauchyovy nerovnosti, stačí položit $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$, $v_1 = a_1, v_2 = a_2, \ldots, v_n = a_n$. Rovnost platí právě jen pro $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Příklad 14 *Dokažte, že pro kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí vždy*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

a že rovnost platí právě jen pro $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Řešení: V Cauchyově nerovnosti položíme $u_1 = x_1, \ldots, u_n = x_n$, $v_1 = \frac{1}{x_1}, \ldots, v_n = \frac{1}{x_n}$. Bez užití Cauchyovy nerovnosti upravíme levou stranu na tvar $n + V$, kde V je součet členů tvaru $\left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right)$, $i < j$. Každý ten člen je větší nebo roven 2, je jich $\frac{n(n-1)}{2}$, takže

$$n + V \geq n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Příklad 15 *Z Cauchyovy nerovnosti plyne, že pro každá tři kladná čísla x, y, z platí $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$. Dokažte. Dále jsme si již ukázali, že pro délky x, y, z stran libovolného trojúhelníku platí $x^2+y^2+z^2 < 2(xy+yz+zx)$. Ukažte, že kladná čísla x, y, z nemusí být délkami stran trojúhelníku, i když pro ně platí uvedená nerovnost. Najděte největší číslo m tak, aby z nerovnosti $x^2+y^2+z^2 < m(xy+yz+zx)$ plynulo pro kladná čísla x, y, z, že jsou délkami stran trojúhelníku.*

Řešení: Pro splnění první části úlohy stačí napsat Cauchyovu nerovnost pro trojice (x, y, z), (y, z, x). Položíme-li $x = 2$, $y = z = 1$, je $x^2+y^2+z^2 = 6$, $xy+yz+zx = 5$, takže $x^2+y^2+z^2 < 2(xy+yz+zx)$, avšak 2, 1, 1 nejsou délkami stran trojúhelníku. Tím jsme dokázali druhou část úlohy. Pro $x = 2$, $y = z = 1$ je $x^2+y^2+z^2 = \frac{6}{5}(xy+yz+zx)$. Zkusíme proto dokázat, že z platnosti $x^2+y^2+z^2 < \frac{6}{5}(xy+yz+zx)$ už plyne, že x, y, z jsou délky stran trojúhelníku. Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že kladná čísla x, y, z splňují tuto nerovnost, ale nejsou to délky stran trojúhelníku, že alespoň jedno z nich, třeba číslo z, není menší než součet zbývajících dvou, tedy že platí $z \geq x+y$. Budeme tedy předpokládat $z = x+y+p$, kde $p \geq 0$. Dosazením za z do předpokládané nerovnosti dostaneme po úpravě

$$5(x^2+y^2+x^2+2xy+y^2+2(x+y)p+p^2) < 6(xy+(x+y)(x+y+p)),$$

tj.

$$4(x-y)^2+4p(x+y)+5p^2 < 0,$$

což je spor, součet nezáporných čísel nemůže být záporný.

Úloha 11 *Nechť $P(x) = ax^2+bx+c$ je kvadratický trojčlen s nezápornými reálnými koeficienty. Dokažte, že pro libovolné kladné číslo x platí*

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \geq (P(1))^2$$

5 Nerovnice

Protože pro každá dvě reálná čísla a, b, platí $(a-b)^2 \geq 0$, platí pro ně také $a^2+b^2 \geq 2ab$. Tuto nerovnost jsme už několikrát využili. Zvláště tedy platí pro každé reálné číslo x nerovnost

$$x^2+9 \geq 6x$$

s rovností právě jen pro $x = 3$. Už však neplatí, že pro všechna reálná čísla x je $x^2+9 \geq 10x$. Hledáme-li množinu všech hodnot x, pro která platí $x^2+9 \geq 10x$, říkáme, že řešíme nerovnici $x^2+9 \geq 10x$. Řešíme ji tak, že ji upravíme postupně na tvar

$$x^2-10x \geq -9$$

$$x^2-10x+25 \geq 25-9$$

$$(x-5)^2 \geq 16$$

a tedy $|x-5| \geq 4$, která platí právě tehdy, když $x-5 \geq 4$ nebo $5-x \geq 4$. Množinou všech řešení nerovnice $x^2+9 \geq 10x$ je proto sjednocení intervalů $(-\infty, 1\rangle$ a $\langle 9, \infty)$. Řešením nerovnice $|x-5| < 4$ je doplněk v $\mathbb{R}$ předcházející množiny řešení, tedy všechna x z intervalu $(1, 9)$. Obecněji: Řešením nerovnice $|x-a| \leq b$ je pro $b > 0$ množina všech x z intervalu $(a-b, a+b)$, v případě $b \leq 0$ nemá rovnice žádné řešení. Uvádíme to proto, že nerovnice tvaru $|x-a| < b$ se hodně používají v definicích limity.

Lineárními nerovnicemi tvaru $ax \leq b, ax \geq b$ a stejně tak kvadratickými nerovnicemi (např. $ax^2 + bx + c \geq 0, a \neq 0$) se zde nebudeme zabývat, všichni je dovedete řešit. Pouze občas se stane, že někdo z faktu, že rovnice $ax^2 + bx + c \geq 0$ nemá žádný reálný kořen, diskriminant $b^2 - 4ac$ je záporný, tvrdí, že ani příslušná nerovnice nemá žádné řešení. Správně je pak $ax^2 + bx + c$ kladné číslo pro všechna x v případě $a > 0$ nebo je záporné pro všechna x v případě $a < 0$. Je totiž $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}\left[\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4}\right]$, výraz v lomené závorce je při záporném diskriminantu pro všechna x kladný a celý výraz $ax^2 + bx + c$ má pro každé x stejné znaménko jako číslo a.

Všimněme si teď nerovnic tvaru $p(x) \cdot q(x) > 0$ a $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, kde $p(x), q(x)$ jsou mnohočleny v x(lineární, kvadratické i vyššího stupně). Je ihned vidět, že obě nerovnice jsou exvivalentní, tedy pro každé x je $p(x) \cdot q(x) > 0$ právě tehdy, když $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$. Je totiž součin dvou čísel kladný právě tehdy, když jsou obě kladná nebo obě záporná, a totéž platí pro jejich podíl, takže platí

$$p(x) \cdot q(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} > 0 \Leftrightarrow (p(x) > 0 \wedge q(x) > 0) \vee (p(x) < 0 \wedge q(x) < 0)\,.$$

Ale pozor!

$$p(x) \cdot q(x) \geq 0 \Leftrightarrow (p(x) \geq 0 \wedge q(x) \geq 0) \vee (p(x) \leq 0 \wedge q(x) \leq 0)$$

ale

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow (p(x) \geq 0 \wedge q(x) > 0) \vee (p(x) \leq 0 \wedge q(x) < 0)\,.$$

Označíme-li po řadě K, L množinu všech řešení nerovnic $p(x) \cdot q(x) \geq 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$ a M množinu všech kořenů rovnice $q(x) = 0$, je $L = K - M$.

Příklad 16 *Řešte nerovnici*

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x-4)^2(x+1)} \geq 0.$$

Řešení: Nutně musí být $x \neq 4$ a $x \neq -1$. Určitě vyhovují čísla $x = -2$ a $x = 3$. Dále všechny ty hodnoty x, pro které je $(x+2)(x-3)(x+1) > 0$, tedy právě ta x, která patří do množiny $(-2, -1) \cup (3, \infty)$. Řešení dané nerovnice dostaneme, když z této množiny vyndáme ještě číslo 4, řešením jsou tedy všechna $x \in (-2, -1) \cup (3, 4) \cup (4, \infty)$.

Příklad 17 *Řešte nerovnici*

$$\frac{(x-4)^2(2x-9)}{(x^2+2x+2)(x-3)} \geq 0.$$

Řešení: Výraz $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$ je kladný pro každé x. Nutně musí být $x \neq 3$. Určitě vyhovuje $x = 4$ a $x = 4,5$. Dále pak ty hodnoty, pro které je $(2x-9)(x-3) > 0$ tedy $x \in (-\infty, 3) \cup (4,5; \infty)$. Množinou všech řešení dané nerovnice je $(-\infty, 3) \cup (4,5; \infty) \cup \{4\}$.

Úloha 12 *Řešte nerovnici*

$$\frac{(3-x)(2x-4)}{(5+x)(x-3)} \leq 0.$$

V matematické olympiádě byla zařazena úloha trochu opačná, úloha, v níž máme určit nerovnici tak, aby množinou všech řešení byla daná množina.

Příklad 18 *Najděte reálná čísla a, b, c, d tak, aby množinou všech řešení nerovnice*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a+dx-x^2} \le 2x$$

byla množina $0 \cup (4, \infty)$.

Řešení: Nerovnici nejprve upravíme na tvar

$$0 \le \frac{-2x^3+(2d-a)x^2+(2a-b)x-c}{a+dx-x^2}.$$

Protože 0 má být řešením, musí být $c = 0$. Jelikož 0 má být izolovaným řešením, musí být 0 dvojnásobným kořenem čitatele, tedy $2a = b$, avšak 0 nesmí být kořenem jmenovatele, $a \neq 0$. Řešíme tedy nerovnici

$$0 \le \frac{x^2(2x+a-2d)}{x^2-dx-a}.$$

Čitatel zlomku se rovná nule v bodě 0 a v bodě $x = d - \frac{a}{2}$. Kdyby byl jmenovatel kladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. kdyby $d^2+4a < 0$, byla by řešením všechna $x \in \{0\} \cup \langle d - \frac{a}{2}, \infty)$, což je ve sporu s tím, že interval v množině všech řešení je otevřený. Proto se musí dát jmenovatel rozložit a jedním kořenem jmenovatele musí být kořen čitatele, tj. číslo $d - \frac{a}{2}$. Musí tedy platit $a(a-4-2d) = 0$. Kdyby $a = 0$, byla by 0 kořenem jmenovatele, to jsme už vyloučili. Je-li $a = 4+2d$, řešíme nerovnici

$$0 \le \frac{x^2 \cdot 2(x+2)}{(x-d-2)(x+2)} = \frac{2x^2}{x-d-2},$$

řešením jsou všechna $x \in (d+2, \infty) \cup \{0\}$, tedy $d = 2, a = 8, b = 16$. Původní nerovnice musela tedy mít tvar

$$\frac{8x^2+16x}{8+2x-x^2} \le 2x,$$

po úpravě

$$0 \le \frac{2x^2(x+2)}{(x-4)(x+2)}.$$

Úloha 13 *Určete všechny dvojice celých čísel (x, y), které jsou řešením nerovnice*

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

6 Řešení úloh

Většina úloh a několik příkladů je převzato ze starších ročníků matematické olympiády.

1. Pomocí ekvivalentních úprav s využitím předpokladů lze nerovnost $(a+1)(b+2) \geq 8$ upravit např. na nerovnost $(a-1)^2 \geq 0$, která je splněna pro všechna a.

2. Při řešení využijte již známou nerovnost $c + \frac{1}{c} \geq 2$ pro $c = \sqrt{a^2+2}$.

3. Po roznásobení použijeme dvakrát nerovnost $c + \frac{1}{c} \geq 2$ resp. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

4. a) Postupnými ekvivalentními úpravami a nahrazováním součinů ab resp. cd číslem 1 upravíme zadanou nevnost do tvaru

$$ad + bc \geq ac + bd,$$

kterou lze ještě převést na

$$(a-b)(c-d) \leq 0.$$

Tato nerovnost obecně splněna není, snadno nalezneme protipříklad (např. $a = c = 3$, $b = d = \frac{1}{3}$).

b) Stejně jako v případě a) úpravami a nahrazováním součinů ac resp. bd číslem 1 převedeme zadanou nevnost do tvaru

$$ab + bc + cd + da \geq 4,$$

kterou lze ještě upravit na

$$(a+c)(b+d) \leq 4.$$

Tato nerovnost platí pro všechna kladná čísla a, b, c, d, která splňují podmínku $ac = bd = 1$, jelikož $a = \frac{1}{c}$ resp. $b = \frac{1}{b}$ a součet kladného čísla a jeho převrácené hodnoty je vždy větší nebo roven 2.

5. Ze zadání úlohy plyne, že všechna čísla $x_1, \ldots, x_n$ jsou nenulová. Všechna čísla s lichými indexy se rovnají témuž nenulovému číslu m, všechna čísla se sudými indexy se rovnají témuž nenulovému číslu $\frac{1}{m}$. Řešme nyní úlohu zvlášť pro n liché a pro n sudé.

a) Je-li n liché, z rovnice $x_1x_2 = x_nx_1$ plyne rovnost $x_2 = x_n$. Všechna x_i jsou tedy stejná a rovnají se 1 nebo -1 (neboť musí platit $m = \frac{1}{m}$). Součet druhých mocnin čísel x_i je tedy roven n.

b) Je-li n sudé, pak součet druhých mocnin čísel x_i bude součtem $\frac{n}{2}$ hodnot m^2 a součtem $\frac{n}{2}$ hodnot $\frac{1}{m^2}$. Již víme, že součet kladného čísla a jeho přvrácené hodnoty je větší nebo roven číslu 2, tj. platí

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \frac{n}{2}m^2 + \frac{n}{2}\frac{1}{m^2} = \frac{n}{2}\left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right) \geq \frac{n}{2} \cdot 2 = n.$$

6. Je-li $|x| + |y| \leq r$, je $x^2 + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2 = (|x| + |y|)^2 \leq r^2$. Pro $x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$ je sice $x^2 + y^2 = r^2$, ale $|x| + |y| = r\sqrt{2} > r$. Pro x, y splňující podmínku $x^2 + y^2 \leq r^2$ ale platí $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2) \leq 2r^2$ a proto $|x| + |y| \leq r\sqrt{2}$. Využili jsme známou nerovnost $2|xy| \leq x^2 + y^2$, která platí pro všechny dvojice x, y.

7. Z AG nerovnosti pro trojici čísel $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ a z podmínky $abc = 1$ plyne

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = a.$$

Platí tedy odhad

$$\frac{2a}{3b} + \frac{b}{3c} \geq a.$$

Stejným způsobem lze odvodit odhady

$$\frac{2b}{3c} + \frac{c}{3a} \geq b, \; \frac{2c}{3a} + \frac{a}{3b} \geq c.$$

Sečtením těchto tří odhadů dostáváme dokazovanou nerovnost.

8. Umocníme-li obě strany na třetí, dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \leq 4 + 2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}.$$

Užitím A-G nerovnosti na kladná čísla $\frac{a}{b}, 1, 1$ (resp. $\frac{b}{a}, 1, 1$) dostaneme nerovnost

$$\frac{a}{b} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \left(\text{resp. } \frac{b}{a} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right).$$

Rovnost nastane, právě když $a = b$. Sečtením posledních dvou nerovností a drobnou úpravou již získáme nerovnost hledanou.

9. Nerovnost převedeme na ekvivalentní tvar $0 \leq (a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 2ab + b^2)c^2$ a dále na tvar $0 \leq (a-b)^2 \cdot \left[(a+b)^2 - c^2\right]$. Tato nerovnost platí pro délky stran libovolného trojúhelníku (plyne z trojúhelníkové nerovnosti $a + b > c$), rovnost platí pro rovnoramenné trojúhelníky se základnou c $(a = b)$.

10. K vyjádření hodnot S a T použijeme Heronův vzorec. Podle něj

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+2b+2c)(2a)(2b)(2c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dokazujeme tedy nerovnost

$$\sqrt{abc(a+b+c)} \geq \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Upravenou ekvivalentní nerovnost mezi odmocňovanými výrazy $abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ můžeme dokázat např. tak, že nerovnost z původních proměnných a, b, c přepíšeme do nových proměnných $u = a + b - c > 0$, $v = a - b + c > 0$, $w = -a + b + c > 0$ do tvaru

$$(u + v)(u + w)(v + w) \geq 8uvw.$$

Platnost této nerovnosti snadno odvodíme složením AG nerovností

$$\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv}, \; \frac{u+w}{2} \geq \sqrt{uw}, \; \frac{v+w}{2} \geq \sqrt{vw}.$$

Rovnost nastane pouze v případě $u = v = w$, tj. $a = b = c$, tj. rovnost nastane pouze pro rovnostranný trojúhelník.

11. Při řešení užijeme "‘zobecněnou"’ Cauchyovu nerovnost.

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = (ax^2 + bx + c)\left(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c\right) =$$

$$= \left((\sqrt{a}x)^2 + \left(\sqrt{bx}\right)^2 + (\sqrt{c})^2 \right) \left(\left(\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{x}}\right)^2 + (\sqrt{c})^2 \right) \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{a}x \cdot \frac{\sqrt{a}}{x} + \sqrt{bx} \cdot \sqrt{\frac{b}{x}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} \right)^2 = (a+b+c)^2 = (P(1))^2$$

12. $x \in (-\infty, -5) \cup \langle 2, 3) \cup (3, \infty)$.

13. Je zřejmé, že $x > 0$, $y > 0$, tedy že x, y jsou přirozená čísla. Vynásobíme-li obě strany nerovnice kladným číslem $y\sqrt{x}$, dostaneme ekvivalentní nerovnici $xy + 6 < 5\sqrt{xy}$, kterou můžeme dále upravit do tvaru $(\sqrt{xy} - 3)(\sqrt{xy} - 2) < 0$.