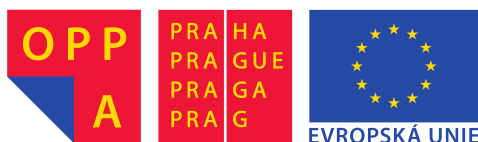

Geometrická zobrazení

Doc. RNDr. Leo Boček, CSc.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.



Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

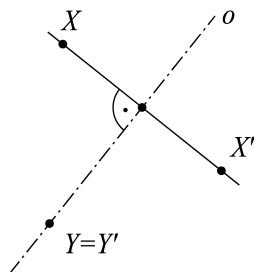
"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti."

Geometrická zobrazení

1 Osová souměrnost a zobrazení složená z osových souměrností

Zvolme v rovině přímku o . Osová souměrnost s osou o (nebo podle osy o) je zobrazení, které každému bodu X roviny přiřadí bod X' podle těchto pravidel:

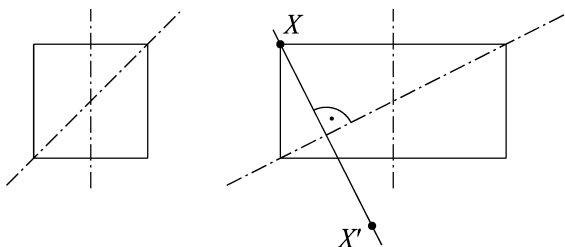
- Je-li X bodem osy o , je $X = X'$. Říkáme, že bod X se zobrazí na sebe, nebo také že bod X je v této osově souměrnosti samodružný.
- Není-li X bodem osy o , zobrazí se na bod X' tak, že přímka XX' je kolmá na osu o a střed úsečky XX' je bodem osy o (obr. 1).



Obrázek 1:

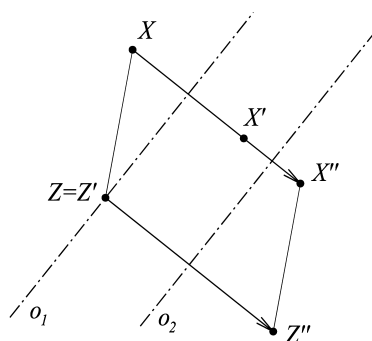
Říkáme pak, že body X, X' jsou souměrně sdružené podle osy o . Z uvedené definice ihned vidíme, že pokud se bod X zobrazí na bod X' , zobrazí se bod X' na bod X . Takovému zobrazení říkáme zobrazení involutorní.

O geometrickém objektu říkáme, že je osově souměrný, existuje-li osa o tak, že každý bod objektu se při osově souměrnosti podle o zobrazí na bod tohoto objektu. Například každý čtverec je osově souměrný podle každé své úhlopříčky a také podle osy každé své strany. Obdélník, který není čtvercem, je osově souměrný podle osy každé své strany, není však osově souměrný podle své úhlopříčky (obr. 2).



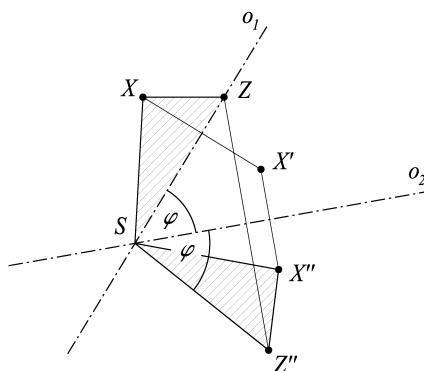
Obrázek 2:

Jaké zobrazení dostaneme složením dvou osových souměrností podle os o_1, o_2 , kdy nejdříve každému bodu X přiřadíme bod X' podle osy o_1 a bodu X' přiřadíme bod X'' souměrně sdružený s bodem X' podle osy o_2 ? Budeme nejdříve předpokládat osy o_1, o_2 rovnoběžné (obr. 3). Je-li $Z \in o_1$, je $Z' = Z$ a vzdálenost $|ZZ''|$ se rovná dvojnásobku vzdálenosti rovnoběžných os o_1, o_2 . Zvolme bod $X \notin o_1$ a také mimo přímku ZZ'' . Pak je $XXZZ''X''$ rovnoběžník a zobrazení, které každému bodu X přiřadí bod X'' , je **posunutí** ve směru kolmém na osy o_1, o_2 o dvojnásobek jejich vzdálenosti, a to ve stejném orientovaném směru, jakým je orientovaný směr od o_1 k o_2 kolmý na o_1 . Všimněte si, že stejné posunutí bychom dostali, kdybychom rovnoběžné osy o_1, o_2 nahradili osami, které bychom z os o_1, o_2 dostali libovolným posunutím (samozřejmě stejným pro obě osy).



Obrázek 3:

Tím jsme si vysvětlili, co je zobrazení složené ze dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami. Zcela korektní důkaz by vyžadoval užití metod analytické geometrie. Přejdeme k případu os různoběžných, průsečík os označíme S . Bod S je samodružný při obou osových souměrnostech a je tedy samodružný i při zobrazení složeném (obr. 4).



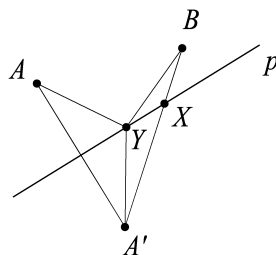
Obrázek 4:

Zvolme na ose o_1 bod $Z (Z \neq S)$. Je pak $Z' = Z$. Označíme-li φ úhel os o_1, o_2 , je $|\angle ZSZ''| = 2\varphi$, ale i pro každý další bod $X (X \neq S)$ je $|\angle XSX''| = 2\varphi$ a zobrazení složené z osových souměrností podle os o_1, o_2 , které svírají odchylku φ , je otočení kolem bodu S o úhel 2φ . I v tomto případě záleží na pořadí v jakém souměrnosti skládáme. Smysl otočení přímky XS na přímku $X''S$ o úhel 2φ je stejný, jako smysl otočení první osy o_1 o úhel φ do osy o_2 . (Pouze v případě kolmých os jde o otočení o přímý úhel, tedy o tzv. středovou souměrnost.) Všimněme si, že stejné otočení o úhel 2φ

dostaneme, nahradíme-li osy o_1, o_2 osami, které dostaneme z os o_1, o_2 libovolným otočením kolem jejich průsečíku S .

Na několika příkladech si ukážeme užití osové souměrnosti.

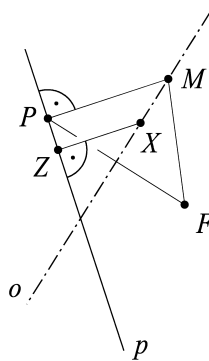
Příklad 1 V rovině je dána přímka p a body A, B v téže polorovině s hraniční přímkou p . Najděte na přímce p bod X tak, aby součet vzdáleností $|AX|$ a $|BX|$ byl minimální.



Obrázek 5:

Řešení: K bodu A sestrojíme bod A' souměrně sdružený s bodem A podle osy p . Za bod X zvolíme průsečík přímky p a úsečky $A'B$ (obr. 5). Pro každý jiný bod Y přímky p je pak $|AY| + |YB| = |A'Y| + |YB|$ větší než $|A'B| = |A'X| + |XB|$ podle trojúhelníkové nerovnosti.

Příklad 2 V rovině je dána přímka p a bod F neležící na přímce p . Víme, že množina všech bodů X roviny, které mají od bodu F a od přímky p stejnou vzdálenost, vytvoří křivku - parabolu. Bod F je jejím ohniskem, přímka p řídící přímkou. Sestrojte alespoň jeden bod M této paraboly jako průsečík kružnice se středem F a poloměrem r s přímkou rovnoběžnou s p v polorovině pF , jejíž vzdálenost od přímky p je r (obr. 6). Patu kolmice vedené bodem M na přímku p označíme P , takže trojúhelník PFM je rovnoramenný. Ukažte, že na ose úsečky PF neleží kromě bodu M žádný další bod dané paraboly.

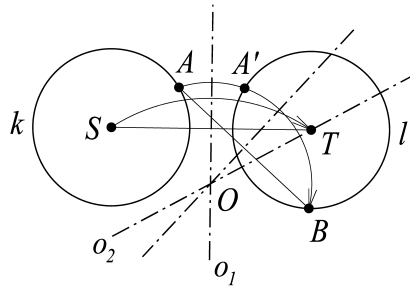


Obrázek 6:

Řešení: Zvolme na ose o bod $X \neq M$, patu kolmice vedené bodem X na přímku p označíme Z . Protože X je bodem osy o úsečky PF , je $|PX| = |FX|$. A protože $X \neq M$, je $Z \neq P$ a $|XZ| < |XP| = |XF|$, takže X není bodem paraboly a přímka o je proto tečnou uvažované paraboly.

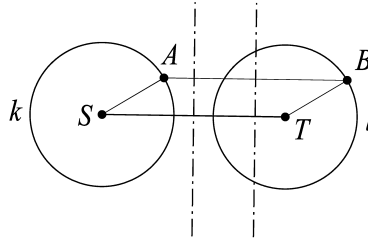
Příklad 3 V rovině jsou nesoustředné kružnice $k(S, r)$ a $l(T, r)$ shodné, tj. mají stejný poloměr. Na kružnici k je dán bod A , na kružnici l bod B . Zjistěte, zda existuje otočení, které zobrazí kružnici k na kružnici l a bod A na bod B .

Řešení: Jestli existuje otočení s danými vlastnostmi, musí se při něm bod S zobrazit na bod T a bod A na bod B . Střed otočení musí proto ležet na ose úsečky ST a také na ose úsečky AB (obr. 7). Jsou-li tyto dvě osy různoběžné s průsečíkem O , pak osová souměrnost podle osy o_1 úsečky ST zobrazí kružnici k na kružnici l a bod A na bod $A' \neq B$ a je $|OA| = |OA'|$ a $|OA| = |OB|$, tedy $|OA'| = |OB|$. Za osu o_2 zvolíme přímku OT . Osová souměrnost podle osy o_2 zobrazí kružnici l na kružnici k a bod A' na bod B . Otočení složené z osových souměrností podle os o_1 a o_2 má požadované vlastnosti a je jediné. Je určeno středem O a dvojicí S, T jako vzor a obraz.



Obrázek 7:

Jsou-li osy úseček ST a AB rovnoběžné a různé, nemůže existovat otočení požadovaných vlastností (obr. 8), existuje ale posunutí v němž se kružnice k zobrazí na kružnici l a bod A na bod B .

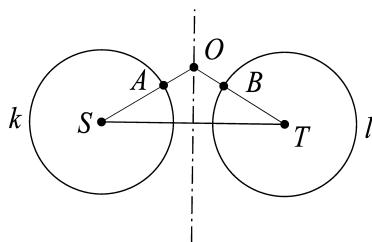


Obrázek 8:

Poslední případ nastane, když jsou osy úseček ST a AB dokonce totožné. Pak záleží na tom, zda se přímky SA a TB protnou nebo ne. V prvním případě existuje otočení kolem průsečíku O přímek SA a TB , které zobrazí k na l a A na B (obr. 9), a to i v případě, kdy body S, T, A, B leží na přímce a bod O je středem úseček ST a AB (jde pak o otočení o úhel 180). Ve druhém případě je $STBA$ obdélník, úsečky SA a TB jsou rovnoběžné, stejně orientované. Otočení daných vlastností neexistuje, muselo by to být otočení o nulový úhel, tedy identita, avšak $T \neq S$.

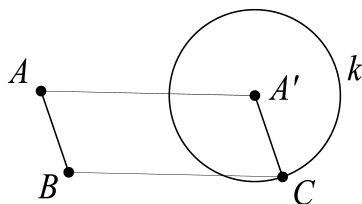
Příklad 4 V rovině jsou dány body A, A' a $B \neq A$. Uvažujme všechna možná otočení roviny, při nichž se bod A zobrazí na bod A' . Jakou množinu vytvoří obrazy bodu B při všech těchto otočeních?

Řešení: Protože každé otočení je zobrazení shodné (zobrazí každou úsečku na úsečku stejné délky), je $|AB| = |A'B'|$, kde jsme označili B' obraz bodu B při otočení, v němž se bod A zobrazí



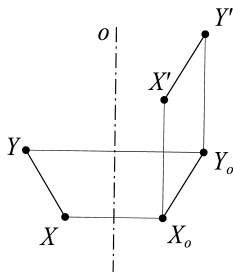
Obrázek 9:

na A' . Je tedy určitě B' bodem kružnice k se středem A' a poloměrem $|AB|$ (obr. 10). Vyplní body B' celou kružnici k ? Je-li $A' \neq A$, nedostaneme tímto způsobem bod C , který je obrazem bodu A' v posunutí, které zobrazí bod A na bod B . Neexistuje totiž otočení, které by zobrazilo A na A' a B na C . Je-li B' bod kružnice k , $B' \neq C$, pak se osy úseček AA' a BB' vždy protnou v bodě O , a otočení kolem bodu O , které zobrazí A na A' , zobrazí bod B na bod B' . Je-li $A \equiv A'$, vyplní body B' celou kružnici k , pokud považujeme identitu (každý bod je samodružný) také za otočení (o nulový úhel).



Obrázek 10:

Osová souměrnost, posunutí a otočení patří mezi shodnosti, tj. vzájemně jednoznačná zobrazení roviny, která zachovávají délky úseček a tedy i velikosti úhlů. Samozřejmě je shodností i identita, zobrazení v němž je každý bod samodružný. Existují další shodnosti roviny? Ano, jediná další shodnost je tzv. posunutá osová souměrnost, což je zobrazení složené z osově souměrnosti a posunutí ve směru osy osově souměrnosti (obr. 11).

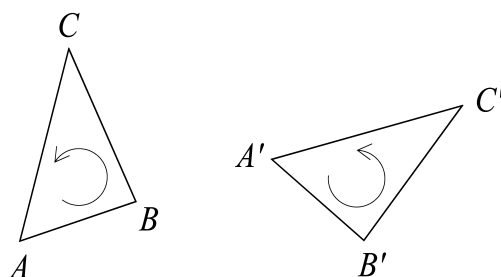


Obrázek 11:

Protože posunutí se dá složit ze dvou osových souměrností, dá se posunutá osová souměrnost složit ze tří osových souměrností. Udělejme si přehled všech shodností roviny:

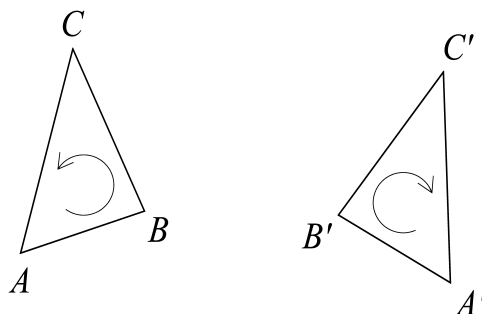
Identita	všechny body jsou samodružné	všechny přímky jsou samodružné
Otočení	jediný samodružný bod = střed otočení	zvláštním případem je středová souměrnost, všechny přímky procházející středem otočení jsou samodružné
		otočení, které není středovou souměrností, nemá žádné samodružné přímky
Posunutí	žádné samodružné body	samodružné přímky jsou přímky ve směru posunutí
Osová souměrnost	samodružné body vytvoří osu souměrnosti	kromě osy jsou samodružné všechny přímky kolmé k ose
Posunutá osová souměrnost	žádné samodružné body	jedině osa je samodružnou přímkou

Poznámka: Identita, otočení a posunutí jsou tzv. přímé shodnosti. Je-li $A'B'C'$ obraz trojúhelníku ABC , pak smysl obíhání trojúhelníku od A k bodu B , k vrcholu C a zpět k bodu A je stejný jako obíhání trojúhelníku $A'B'C'$ od A' přes B' , C' k bodu A' (obr. 12).



Obrázek 12:

Osová souměrnost a posunutá osová souměrnost jsou shodnosti nepřímé (obr. 13), smysl obíhání je v trojúhelníku a v jeho obrazu opačný, jednou ve směru otáčení hodinových ručiček, po druhé proti otáčení hodinových ručiček.

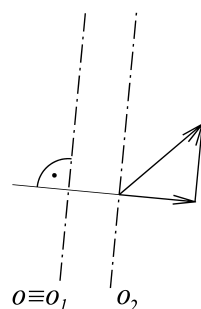


Obrázek 13:

Poznámka: Složením posunutí, v němž se bod A zobrazí na bod B s posunutím, v němž se bod B zobrazí na bod C , je posunutí, které zobrazí bod A na bod C . Jestliže však bod C splývá

s bodem A , je výsledné zobrazení identitou. Vzniká tedy otázka, zda máme identitu považovat za zvláštní případ posunutí. Můžeme pak tvrdit, že složením každých dvou posunutí je opět posunutí. Podobně se identita považuje také za otočení kolem libovolného bodu o nulový úhel, aby složení dvou otočení kolem pevného bodu bylo opět otočení. V předcházejícím přehledu pak musíme u otočení a posunutí přidat doplnění "různé od identity" a v definici posunuté souměrnosti přidat podmínku, že jde o osovou souměrnost složenou s posunutím ve směru osy, které není identitou.

Mluvíme-li o posunuté souměrnosti, míníme tím osovou souměrnost složenou s posunutím ve směru osy souměrnosti. Co však když posunutí není ve směru osy? V tom případě rozložíme posunutí v posunutí ve směru kolmém k ose a v posunutí ve směru osy souměrnosti (obr. 14).



Obrázek 14:

Posunutí ve směru kolmém k ose souměrnosti rozložíme na dvě osové souměrnosti podle os o_1 , o_2 , přičemž můžeme předpokládat, že o_1 splývá s osou o osové souměrnosti. Výsledné zobrazení je pak složeno z osové souměrnosti podle osy o_2 a z té části posunutí, která má směr os o_1 , o_2 .

Podobně nemluvíme o posunutém otočení, protože zobrazení složené z otočení a posunutí je otočení. Dokažte si to. Stačí dané otočení rozložit na osové souměrnosti podle os o_1 , o_2 a posunutí rozložit na osové souměrnosti podle os o_3 , o_4 . Můžeme totiž volit tyto osy tak, že $o_2 \equiv o_3$. Výsledné zobrazení je pak složeno pouze z osových souměrností podle os o_1 a o_4 , což je otočení.

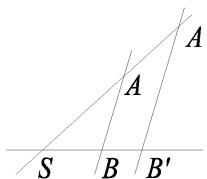
2 Stejnolehlost

Kromě shodností roviny je významným zobrazením roviny stejnoolehlost. Stejnolehlost je dána svým středem S a koeficientem $\lambda \neq 0$ a každému bodu X roviny přiřazuje bod X' podle těchto pravidel:

- a) střed S je samodružný, tj. $S' = S$,
- b) pro $X \neq S$ jsou polopřímky SX , SX' totožné při $\lambda > 0$ a opačné při $\lambda < 0$,
- c) $|SX'| = |\lambda| \cdot |SX|$.

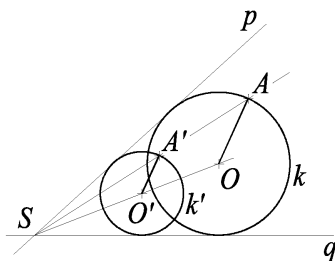
Ihned vidíme, že v případě $\lambda = 1$ je stejnoolehlost identitou. Proto někteří autoři požadují $\lambda \neq 1$.

Stejnolehlost zobrazí každou úsečku na úsečku rovnoběžnou a pro délky platí $|A'B'| = |\lambda| \cdot |AB|$, kde λ je koeficient stejnoolehlosti. Stejnolehlost je dána také svým středem S a dvojicí (A, A') , kde $A \neq S$, $A' \neq S$ a body S, A, A' leží na jedné přímce (obr. 15). Jsou-li polopřímky SA, SA' totožné, je koeficient stejnoolehlosti kladný, rovná se $|SA'| : |SA|$, jsou-li polopřímky SA, SA' opačné, je koeficient stejnoolehlosti záporný, jeho absolutní hodnota je opět rovna $|SA'| : |SA|$. Z výše uvedeného vztahu pro délky úsečky a jejího obrazu ihned plyne, že obrazem kružnice je ve stejnoolehlosti opět kružnice, střed kružnice se zobrazí na střed kružnice a pro poloměry r, r' kružnice a jejího obrazu platí $r' = |\lambda| \cdot r$.



Obrázek 15:

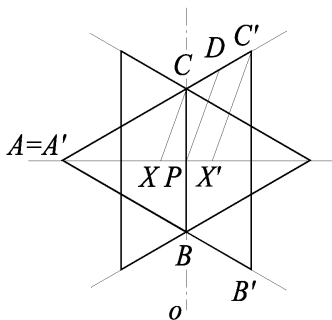
Příklad 5 V rovině jsou dány různoběžné přímky p, q se společným bodem S a bod A , který neleží na žádné z nich. Sestrojte kružnici, která prochází bodem A a dotýká se přímek p, q .



Obrázek 16:

Řešení: V úhlu přímek p, q , ve kterém leží bod A sestrojíme libovolnou kružnici, která se dotýká přímek p, q (obr. 16). Označíme A' jeden z průsečíků přímky SA se zvolenou kružnicí, kterou označíme k' a její střed O' . Stejnolehlost se středem S , při které se bod A' zobrazí na bod A , zobrazí kružnici k' na kružnici k , která je řešením daného příkladu, její střed O dostaneme jako obraz bodu O' . Úloha má dvě řešení, protože za A' jsme mohli zvolit i druhý průsečík přímky SA a kružnice k' .

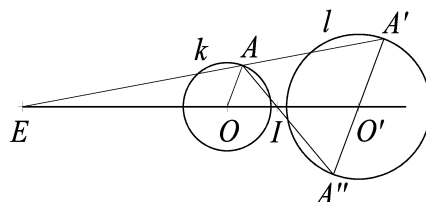
Příklad 6 Rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC zobrazíme ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\lambda > 1$ na trojúhelník $A'B'C'$ a ten zobrazíme v osové souměrnosti podle osy $o \equiv BC$. Který bod je při složeném zobrazení samodružný?



Obrázek 17:

Řešení: Zobrazí-li se body X, Y ($X \neq Y$) v dané stejnolehlosti na body X', Y' , je $|X'Y'| = \lambda|XY| > |XY|$. Pro obrazy X'', Y'' bodů X', Y' v osově souměrnosti podle osy o platí $|X''Y''| = |X'Y'| > |XY|$. Složené zobrazení tedy nemůže mít dva samodružné body, nejvýše jeden. Označme P střed základny BC (obr. 17). Je-li X samodružný bod složeného zobrazení, musí nutně ležet na přímce AP , protože pro každý bod Z mimo přímku $p = AP$ platí, že vzdálenost jeho obrazu Z'' od přímky d se rovná vzdálenosti bodu Z' od přímky d a je λ -krát větší než vzdálenost bodu Z od přímky d . Je-li bod X přímky d samodružný, tj. $X'' = X$, jsou body X a X' souměrně sdružené podle bodu P (P je středem úsečky XX') a přímky CX a $C'X'$ jsou rovnoběžné. Jinými slovy $XX'C'C$ je lichoběžník, bod P je středem ramene XX' . Proto je úsečka DP střední příčkou tohoto lichoběžníku, kde jsme D označili střed úsečky CC' . Odtud už plyne konstrukce bodu X , bodem C vedeme přímku rovnoběžnou s DP , průsečík s přímkou p je bod X . Bod X' je průsečík přímky p s přímkou vedenou bodem C' rovnoběžně s DP . Středem úsečky XX' je pak bod P a $X'' = X$.

Víme již, že obrazem kružnice ve stejnolehlosti je opět kružnice. Ptejme se obráceně, zda ke dvěma kružnicím existuje stejnolehlost, která zobrazí jednu na druhou. Zvolme tedy v rovině kružnice $k(O, r)$ a $l(O', s)$ (obr. 4), nechť je dále $A \in k$, $A' \in l$ a $OA \parallel OA'$.



Obrázek 18:

Existuje-li stejnolehlost zobrazující k na l (a tedy bod O na bod O'), musí se zobrazit bod A na bod A' nebo na bod A'' souměrně sdružený s A' podle středu O' . Její střed S leží nutně na přímce OO' , v případě $O \equiv O'$ (k, l soustředné) je $S \equiv O$. V případě $O \neq O'$ leží střed hledané stejnolehlosti nutně také na spojnici AA' nebo AA'' . Můžeme předpokládat, že jsme označení zvolili tak, že průsečík I přímek OO' , AA'' leží mezi body O, O', I je tzv. vnitřní střed stejnolehlosti daných kružnic. Stejnolehlost se středem I zobrazující bod A na bod A'' (tím je stejnolehlost dána) zobrazí kružnici k na kružnici l . Průsečík E přímek OO' a AA' existuje pouze v případě, kdy mají kružnice k, l různé poloměry a je středem stejnolehlosti, která zobrazí k na l a bod A na bod A' , nazývá se vnějším středem stejnolehlosti daných kružnic. Stejnolehlost se středem I má koeficient záporný, stejnolehlost se středem E má koeficient kladný, různý od 1. V případě $O \equiv O'$ oba středy splývají. Předcházející výsledky shrneme do tohoto přehledu:

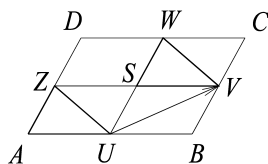
kružnice k, l jsou soustředné	jsou totožné	existují dvě stejnolehlosti zobrazující k na l , identita a středová souměrnost
	jsou různé	existují dvě stejnolehlosti zobrazující k na l , středem stejnolehlosti je vždy střed obou kružnic
kružnice k, l nejsou soustředné	mají stejný poloměr	existuje právě jedna stejnolehlost zobrazující kružnici k na kružnici l , je to středová souměrnost
	mají různé poloměry	existují právě dvě stejnolehlosti zobrazující k na l

Složením dvou stejnolehlostí se stejným středem je stejnolehlost s tímž středem, koeficient výsledné stejnolehlosti je součinem koeficientů stejnolehlostí z nichž je stejnolehlost složena. Vše plyne přímo z definice stejnolehlosti. Můžeme dokonce tvrdit, že všechny stejnolehlosti s daným středem tvoří při skládání grupu izomorfní s multiplikativní grupou nenulových reálných čísel. Tím tvrdíme pouze toto:

Jestliže stejnolehlosti h, l se stejným středem S mají po řadě koeficienty λ, μ , pak stejnolehlost $l \circ h$ má koeficient $\mu \cdot \lambda$, zobrazení h^{-1} (inverzní zobrazení k h) je stejnolehlost se středem S a koeficientem $\frac{1}{\lambda}$. Zde jsme však museli mezi stejnolehlosti zahrnout i identitu, které odpovídá koeficient 1.

Jiná situace nastane, mají-li stejnolehlosti h, l s koeficienty λ, μ různé středy. Jejich složením dostaneme stejnolehlost pouze v případě $\lambda \cdot \mu \neq 1$, středy všech tří stejnolehlostí leží na přímce. Je-li $\lambda \cdot \mu = 1$, je složené zobrazení posunutí ve směru přímky spojující středy daných stejnolehlostí. Všechny stejnolehlosti roviny (včetně identity) a všechna posunutí roviny tvoří grupu, tzv. Mongeovu grupu (Gaspard Monge, francouzský matematik, zakladatel deskriptivní geometrie, 1746-1818). S každými dvěma zobrazeními této grupy patří do ní i zobrazení složené z nich a s každým zobrazením patří do Mongeovy grupy i zobrazení inverzní. Mongeova grupa je tvořena všemi zobrazeními roviny, které mají tu vlastnost, že obrazem každé úsečky je úsečka s ní rovnoběžná.

Příklad 7 V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označíme po řadě U, V, W, Z středy stran AB, BC, CD, DA . Stejnolehlost se středem A a koeficientem 2 složíme se stejnolehlostí se středem C a koeficientem $\frac{1}{2}$. Sestrojte obraz trojúhelníku AUZ při složeném zobrazení.

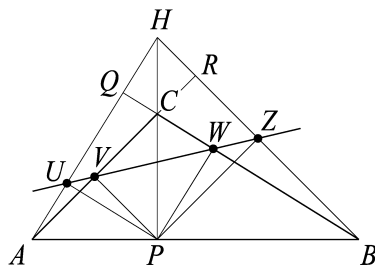


Obrázek 19:

Řešení: Při první stejnolehlosti se trojúhelník AUZ zobrazí na trojúhelník ABD , při druhé se trojúhelník ABD zobrazí na trojúhelník SVW . Složené zobrazení je posunutí, které je dáno například uspořádanou dvojicí U, V jako dvojice vzor, obraz.

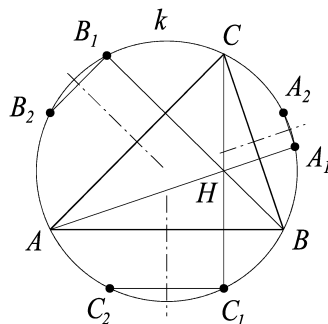
Příklad 8 V trojúhelníku ABC je H průsečík výšek, P pata výšky vedené bodem C na stranu AB a U, V, W, Z jsou paty kolmic vedených bodem P na přímky AH, AC, BC, BH . Dokažte, že tyto čtyři paty leží na jedné přímce.

Řešení: Označme ještě R, Q paty výšek trojúhelníku na stranách AC, BC (obr. 20). Stejnolehlost se středem C , která zobrazí H na P , zobrazí R na V a Q na W (přitom však předpokládáme $H \neq C$). Proto je $RQ \parallel VW$. Stejnolehlost se středem A zobrazující P na B zobrazí U na Q a V na R . Proto je $UV \parallel RQ$. Odtud už plyne, že body U, V, W leží na přímce rovnoběžné s přímkou RQ . Analogicky stejnolehlost se středem B zobrazující P na A zobrazí Z na R a W na Q , takže i $ZW \parallel RQ$, takže i body V, W, Z jsou kolineární (leží na přímce) a tedy jsou kolineární všechny čtyři body U, V, W, Z . V případě pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem při vrcholu C , kdy splývají body H a C , je důkaz triviální, neboť pak splývají body U, V a také body Z, W .



Obrázek 20:

Příklad 9 Ze známé věty o středovém a obvodových úhlech plyne, že kružnice k opsaná trojúhelníku ABC prochází také body A_1, B_1, C_1 , které odpovídají průsečíku výšek H v osových souměrnostech s osami BC, CA, AB (obr. 21). Prochází také body A_2, B_2, C_2 , které jsou obrazy bodů A_1, B_1, C_1 , a to A_2 je obrazem A_1 podle úsečky BC a analogicky B_2, C_2 . Stejnolehlost se středem H a koeficientem $\frac{1}{2}$ zobrazí kružnici k na kružnici l . Vyjmenujte některé významné body, kterými kružnice l prochází.



Obrázek 21:

Řešení: Body A_1, B_1, C_1 se zobrazí při uvažované stejnoolehlosti na paty výšek trojúhelníku ABC , body A_2, B_2, C_2 se zobrazí na středy A', B', C' jeho stran. Vrcholy A, B, C se zobrazí na středy úseček HA, HB, HC . Kružnice procházející těmito devíti významnými body trojúhelníku se nazývá Feuerbachova kružnice, nebo také kružnice devíti bodů.

3 Podobnost

Složením shodnosti a stejnoolehlosti nedostaneme obecně ani shodnost ani stejnoolehlost. Protože však shodnost zachovává délky úseček a stejnoolehlost s koeficientem μ obrazí každou úsečku AB na úsečku $A'B'$ délky $|\mu| \cdot |AB|$, má tuto vlastnost i zobrazení složené a nazývá se podobnost. Nezobrazí však obecně každou úsečku na úsečku rovnoběžnou.

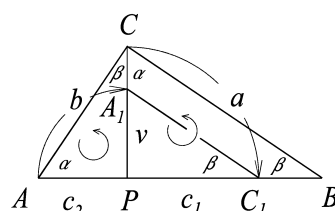
Zobrazení roviny se nazývá podobnost, existuje-li kladné číslo k tak, že pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = k|XY|$. Číslo k je tzv. koeficient podobnosti. Snadno se ukáže, že každá podobnost se dá složit ze shodnosti a ze stejnoolehlosti nebo také v obráceném pořadí, tedy ze stejnoolehlosti a shodnosti.

Je-li $k = 1$, je podobnost shodností. Stejnoolehlost s koeficientem μ je podobnost s koeficientem $k = |\mu|$

Každá podobnost zobrazí trojúhelník na trojúhelník podobný. Jsou-li obráceně dány v rovině dva podobné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, existuje právě jedna podobnost, která zobrazí body A, B, C po řadě na body A', B', C' . Z podobnosti daných trojúhelníků plyne existence čísla $k > 0$ a platnost vztahů $|A'B'| = k|AB|$, $|B'C'| = k|BC|$ a $|C'A'| = k|CA|$. Obrazem každého bodu X v polorovině ABC (případně v polorovině opačné) musí být bod X' v polorovině $A'B'C'$ (v polorovině opačné), pro který platí $|A'X'| = k|AX|$, $|B'X'| = k|BX|$ a těmito vztahy je bod X' jednoznačně určen.

Je zcela zřejmé, že podobnost, která není shodností, nemůže mít dva různé samodružné body. Dá se ukázat, že má právě jeden samodružný bod a dá se složit z otočení kolem tohoto bodu a stejnolehlosti s tímto středem nebo z osové souměrnosti, jejíž osa obsahuje tento samodružný bod a stejnolehlosti s tímto středem. V prvním případě je podobnost přímá, tj. smysl obíhání obvodu trojúhelníku a jeho obrazu je stejný, v druhém případě opačný. Ukážeme to na příkladě.

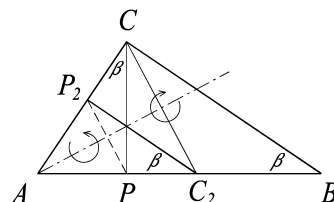
Příklad 10 ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C , P je pata jeho výšky vedené bodem C (obr. 22). Označme a, b, c délky jeho stran, v jeho výšku a c_1, c_2 délky úseků na přeponě. Trojúhelník APC je podobný trojúhelníku CPB . Rozložte příslušnou podobnost na shodnost a stejnolehlost.



Obrázek 22:

Řešení: Za shodnost vezmeme otočení kolem bodu P , které zobrazí bod A na bod A_1 polopřímky PC . Bod C se tímto otočením zobrazí na bod C_1 polopřímky PB . Jsou pak úsečky A_1C_1 a CB rovnoběžné a existuje stejnolehlost se středem P zobrazující A_1 na C a C_1 na B . Složené zobrazení je podobnost, která zobrazí trojúhelník APC na CPB . Jde o podobnost přímou.

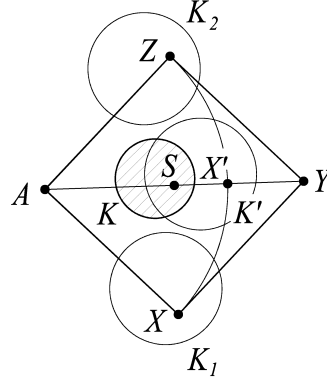
Příklad 11 Trojúhelník APC je také podobný trojúhelníku ACB . Zvolte shodnost a stejnolehlost tak, aby složené zobrazení zobrazilo trojúhelník APC na trojúhelník ACB .



Obrázek 23:

Řešení: Za shodnost zvolíme osovou souměrnost podle osy úhlu CAB (obr. 23). Při ní je bod A samodružný, bod P se zobrazí na bod P_2 polopřímky AC a bod C na bod C_2 polopřímky AB . Úsečka P_2C_2 je rovnoběžná s úsečkou CB , vezmeme stejnolehlost se středem A , která zobrazí P_2 na C a C_2 na B . Složené zobrazení je podobnost nepřímá.

Příklad 12 V rovině je pevně zvolen bod A . Jakou množinu vytvoří vrcholy X všech čtverců $AXYZ$ se středem S , jestliže bod S probíhá kruh K , který neobsahuje bod A ?



Obrázek 24:

Řešení: Předpokládejme, že jsme sestrojili k bodu A čtverec $AXYZ$ se středem S v daném kruhu K (obr. 24). Je pak $|AX| = |AS| \cdot \sqrt{2}$ a $\angle SAX = 45^\circ$. Na polopřímce AS sestrojíme nejdříve bod X' tak, aby $|AX'| = |AS| \cdot \sqrt{2}$ a bod X' otočíme kolem bodu A o úhel 45° . Výsledkem je bod X . Protože máme dvě možnosti pro otočení polopřímky AS kolem bodu A o 45° , dostaneme dvě možné polohy bodu X , které jsou souměrné sdružené podle středu S a tím dva čtverce. Ty se liší pouze záměnou vrcholů X a Z . Zobrazení, které bodu S přiřadí bod X' je stejnoolehlost se středem A a koeficientem $\sqrt{2}$. Tuto stejnoolehlost složíme s dvěma otočeními kolem A o 45° . Tím se kruh K zobrazí nejdříve na kruh K' ve stejnoolehlosti a ten otočíme kolem A o 45° na kruhy K_1 , K_2 a bod X leží ve sjednocení těchto dvou kruhů. Obráceně každý bod $X \in K_1 \cup K_2$ je obrazem některého bodu $S \in K$ v uvažované stejnoolehlosti složené s některým otočením kolem bodu A o 45° .

4 Kruhov inverze

Podívejte se na definici stejnoolehlosti. Podmínka c) vlastně říká, že vzdálenost $|SX'|$ je přímo úměrn vzdálenosti $|SX|$ s koeficientem $|\lambda| > 0$. Kdybychom přímou úměrnost nahradili nepřímou úměrností, dostaneme zcela jiné zobrazení, tzv. kruhovou inverzi. Ta je také dána středem S a nenulovým koeficientem λ a pro každý bod $X \neq S$ a jeho obraz platí $|SX'| = \frac{|\lambda|}{|SX|}$. Musíme ovšem vyloučit bod S , ten nezobrazujeme, jeho obraz není definován. Takže kruhová inverze se středem S a koeficientem $\lambda \neq 0$ je zobrazení roviny bez bodu S do stejné množiny, které je definováno těmito vlastnostmi:

- a) bod S nemá obraz,
- b) pro $X \neq S$ jsou polopřímky SX , SX' totožné při $\lambda > 0$, opačné při $\lambda < 0$,
- c) $|SX'| = \frac{|\lambda|}{|SX|}$.

V kruhové inverzi se středem S a s kladným koeficientem λ jsou samodružené body právě ty body X , pro které platí $|SX|^2 = \lambda$. Tvoří tedy kružnici se středem S a poloměrem $\sqrt{\lambda}$. Kruhová inverze se záporným koeficientem nemá žádné samodružené body, ale každý bod X kružnice se středem S

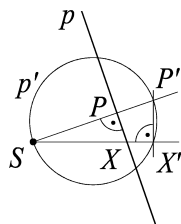
a poloměrem $\sqrt{|\lambda|}$ se zobrazí na bod této kružnice, a to na bod X' diametrálně protilehlý, body X, X' jsou souměrně sdružené podle středu S .

Jestliže se ve stejnolehlosti zobrazí bod X na bod X' , nezobrazí se bod X' na bod X , s výjimkou identity a středové souměrnosti. V definici kruhové inverze vidíme, že body X a X' vystupují symetricky, tzn. definice se nezmění, zaměníme-li X a X' . Proto platí: Zobrazí-li se v kruhové inverzi bod X na bod X' , zobrazí se v téže inverzi bod X' na bod X . Už víme, že takové zobrazení se nazývá involutorní, krátce involuce. Takže každá kruhová inverze je involutorní zobrazení. Inverze s kladným koeficientem se také říká symetrie podle kružnice samodružných bodů.

Protože v kruhové inverzi se středem S a koeficientem λ platí $|SX| \cdot |SX'| = |\lambda|$, plyne z $|SX| < \sqrt{|\lambda|}$ nerovnost $|SX'| > \sqrt{|\lambda|}$ a obráceně. Znamená to, že vnitřní oblast kružnice $k(S, \sqrt{|\lambda|})$ (kromě bodu S) se zobrazí na její vnější oblast a obráceně vnější oblast na vnitřní oblast.

Přímka, která prochází středem S inverze je v této inverzi samodružná (až na bod S , který nemá žádný obraz a také není obrazem).

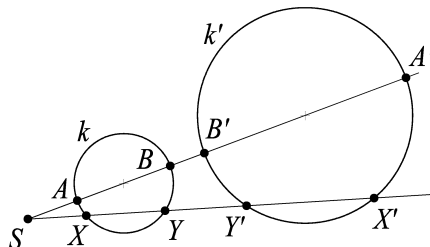
Jak se zobrazí přímka, která neprochází středem inverze? Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že inverze je dána středem S a kladným koeficientem. Inverzi se záporným koeficientem λ můžeme totiž složit z inverze s tímž středem a koeficientem $|\lambda|$ a středové souměrnosti se středem S . Nechť tedy přímka p neprochází středem S inverze (obr. 25). Inverze je dána, známe-li obraz P' body P kolmice vedené bodem S na přímku p . Tvrdíme, že obrazem přímky p v inverzi je kružnice nad průměrem SP' (bez bodu S). K důkazu stačí ukázat, že pro každý bod X přímky p a průsečík X' přímky SX s uvedenou kružnicí platí $|SX| \cdot |SX'| = |SP| \cdot |SP'|$. To však okamžitě plyne z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků SPX a $SX'P'$.



Obrázek 25:

Z involutornosti involuce plyne obráceně, že obrazem kružnice procházející středem inverze je přímka, která středem inverze neprochází.

Ještě ukážeme, že obrazem kružnice, která neprochází středem inverze, je kružnice, která také neprochází středem inverze S a je obrazem původní kružnice ve stejnolehlosti se středem S . Bodem S vedeme přímku, která prochází středem zobrazované kružnice k (obr. 26), průsečíky s kružnicí označíme A, B , jejich obrazy v inverzi A', B' . Předpokládejme ještě, že úsečka AB neobsahuje bod S , v opačném případě bychom postupovali obdobně.



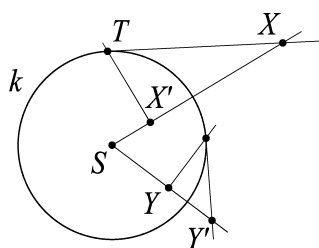
Obrázek 26:

Je-li $|SA| < |SB|$, je $|SB'| < |SA'|$ a platí $|SA| \cdot |SA'| = |SB| \cdot |SB'|$, tedy $\frac{|SA'|}{|SB|} = \frac{|SB'|}{|SA|}$. To ale znamená, že stejnolehlost se středem S zobrazující A na B' , zobrazí bod B na A' a kružnici k na k' s průměrem $B'A'$. Ukážeme, že k' je také obrazem kružnice k v dané inverzi. Avšak ve stejnolehlosti se bod X zobrazí na bod Y' a bod Y na bod X' , v inverzi se bod X zobrazí na X' a Y na Y' . Stačí dokázat, že $|SX| \cdot |SX'| = |SA| \cdot |SA'| = |SY| \cdot |SY'|$. K tomu použijeme mocnost bodu ke kružnici. Podle mocnosti bodu S ke kružnici k platí $|SX| \cdot |SY| = |SA| \cdot |SB|$. Ze stejnolehlosti plyne

$$\frac{|SX'|}{|SY|} = \frac{|SA'|}{|SB|},$$

vynásobením dostáváme $|SX| \cdot |SX'| = |SA| \cdot |SA'|$, podobně pro součin $|SY| \cdot |SY'|$.

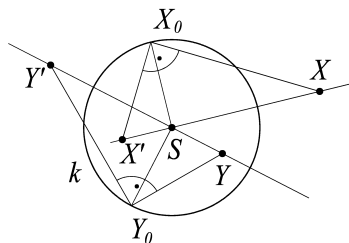
Příklad 13 Kruhává inverze je dána kružnicí k samodružných bodů (obr. 27). Sestrojte obrazy X', Y' bodů X, Y .



Obrázek 27:

Řešení: Bodem X vedeme tečnu ke kružnici k , bod dotyku promítneme kolmo na SX , dostaneme tak obraz X' bodu X . Podle Euklidovy věty o odvěsně totiž platí $|SX'| \cdot |SX| = |ST|^2$, což je koeficient λ inverze. V případě bodu Y postupujeme obráceně - bodem Y vedeme kolmici k SY , v průsečíku s kružnicí sestrojíme její tečnu, ta protne SY v bodě Y' .

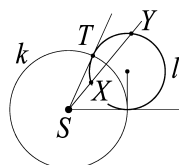
Příklad 14 Kruhává inverze se záporným koeficientem λ a středem S může být dána kružnicí k se středem S a poloměrem $\sqrt{|\lambda|}$. Její body nejsou samodružné, každý se zobrazí na bod diametrálně protilehlý. Sestrojte obrazy bodů X, Y v této inverzi.



Obrázek 28:

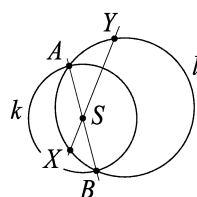
Řešení: Je-li X bodem vnější oblasti kružnice k , vedeme bodem S kolmici k SX (obr. 28), v průsečíku X_0 s kružnicí k vedeme kolmici k X_0X , průsečík X' s SX je obraz bodu X . Důkaz plyne z Euklidovy věty o výšce. Analogicky pro bod Y .

V kruhové inverzi s kružnicí k samodružných bodů je samodružná i každá kružnice, která protíná kružnici k kolmo (obr. 29). To plyne ihned z mocnosti středu S kružnice k ke kružnici l protínající k kolmo. Protíná-li polopřímka SX kružnici l ještě v bodě Y , je $|SX| \cdot |SY| = |ST|^2$, takže Y je obrazem bodu X . Jsou tedy samodružné právě ty kružnice, k nimž má bod S za mocnost číslo $r^2 = |ST|^2$.



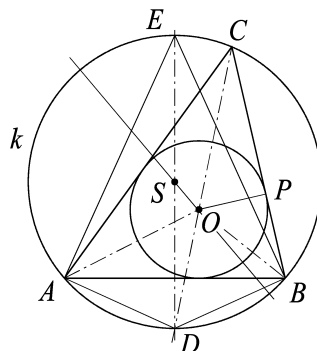
Obrázek 29:

V kruhové inverzi se záporným koeficientem λ je samodružná kružnice k se středem S ve středu inverze a s poloměrem $\sqrt{|\lambda|}$ (není však bodově samodružná) a pak všechny kružnice l , které protínají kružnici k v koncových bodech průměru kružnice k (obr. 30). Označíme-li totiž A, B koncové body průměru kružnice k , kterými prochází kružnice l , a X, Y průsečíky přímky procházející středem S a kružnice l , jsou SX a SY opačné polopřímky a z mocnosti bodu S ke kružnici l plyne $|SA| \cdot |SB| = -\lambda = |SX| \cdot |SY|$. I v tomto případě je proto Y obrazem bodu X v dané kruhové inverzi.



Obrázek 30:

Pomocí kruhové inverze si dokážeme tzv. Eulerův vzorec pro vzdálenost d středů kružnice trojúhelníku opsané a vepsané. Označme S střed kružnice k opsané a O střed kružnice vepsané



Obrázek 31:

trojúhelníku ABC (obr. 31). Nechť je D druhý průsečík osy úhlu ACB s kružnicí k , ED průměr kružnice k , P pata kolmice vedené bodem O na přímku BC . Z věty o obvodových úhlech plyne shodnost úhlů DCB, DEB, AED, ABD .

Označíme-li d vzdálenost bodů S, O , dále R poloměr kružnice k a r poloměr kružnice trojúhelníku vepsané, je mocnost bodu O ke kružnici k rovna $-(R+d)(R-d) = d^2 - R^2$ a rovná se také $-|OC| \cdot |OD|$. Úhel DOB je vnější úhel v trojúhelníku OCB a proto se jeho velikost rovná součtu $\frac{\beta+\gamma}{2}$ úhlů vnitřních při zbývajících vrcholech. Stejnou velikost má také úhel OBD , proto je trojúhelník ODB rovnoramenný se základnou BO . Z podobnosti trojúhelníků EDB a COP plyne

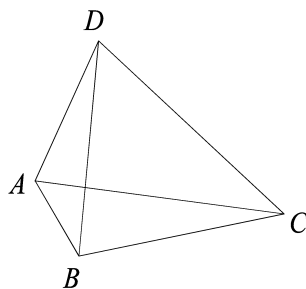
$$\frac{|OC|}{|OP|} = \frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|ED|}{|OD|},$$

tedy $|OC| \cdot |OD| = 2Rr$, odtud $R^2 - d^2 = 2Rr$, $d^2 = R(R - 2r)$, což je Eulerův vzorec.

Pomocí kruhové inverze můžeme také dokázat Ptolemaiovu nerovnost pro konvexní čtyřúhelník $ABCD$, která říká, že

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|$$

a rovnost platí právě jen pro čtyřúhelník tětivový (obr. 32).



Obrázek 32:

K důkazu použijeme vzorec

$$|X'Y'| = |\lambda| \frac{|XY|}{|SX| \cdot |SY|},$$

který platí pro obrazy X', Y' libovolných bodů X, Y v kruhové inverzi se středem S a koeficientem λ . Vzorec se snadno dokáže užitím kosinové věty pro trojúhelníky SXY a $SX'Y'$. Zvolíme inverzi se středem A a koeficientem 1. Pro obrazy B', C', D' bodů B, C, D platí trojúhelníková nerovnost $|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$ s rovností právě jen v případě, že bod C' leží na úsečce $B'D'$. To ovšem nastane pouze v případě kdy body B, C, D budou ležet na kružnici procházející bodem A , tedy tehdy, když je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový. Pak už stačí použít uvedený vzorec pro dvojice (B, C) , (C, D) a (B, D) a $S = A$.