Posloupnosti a nekonečné řady

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Posloupnosti a nekonečné řady

1 Posloupnost a její určení

Posloupností rozumíme takovou funkci f, která každému přirozenému číslu n přiřazuje reálné číslo $f(n)$. Jestliže pro každé n položíme $f(n) = a_n$, budeme mluvit o posloupnosti (a_n), jejímž prvním členem je číslo a_1, druhým číslo a_2, třetím číslo $a_3, \ldots$, n-tým číslo a_n; zapisujeme ji takto: a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, $\ldots$. Vyjádření n-tého členu této posloupnosti ve tvaru $a_n = f(n)$ se nazývá **vzorec pro n-tý člen**; tímto vzorcem je posloupnost jednoznačně určena. Například vzorec $a_n = n^2 - 3$ určuje posloupnost s prvním členem $a_1 = 1^2 - 3 = -2$, s druhým členem $a_2 = 2^2 - 3 = 1$, s třetím členem $a_3 = 3^2 - 3 = 6$, atd.

Některé posloupnosti je možné určit **vzorcem rekurentním**, který jejich n-tý člen vyjadřuje pomocí jednoho nebo několika členů, které mu bezprostředně předcházejí. Tento rekurentní vzorec je však nutné doplnit **počátečními podmínkami**, tj. údaji, čemu je roven první nebo několik prvních členů podle toho, kolika předcházejícími členy je n-tý člen vyjádřen. Například rekurentním vzorcem $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ doplněným počátečními podmínkami pro první dva členy $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, je určena posloupnost (a_n), jejíž další členy jsou:

$$a_3 = 2a_2+3a_1 = 2\cdot 1+3\cdot 2 = 8, a_4 = 2a_3+3a_2 = 2\cdot 8+3\cdot 1 = 19, a_5 = 2a_4+3a_3 = 2\cdot 19+3\cdot 8 = 42, \ldots$$

Nevýhodou tohoto rekurentního určení posloupnosti je, že k výpočtu daného členu je nutno „jít zpátky“ a postupně určit všechny členy předcházející (recurrere znamená v latině běžet zpátky).

Poznámka. Z několika známých prvních členů posloupnosti, aniž je známo pravidlo, jak jsou její členy vytvářeny, nelze určit členy následující. Zadáním jakéhokoli počtu počátečních členů není žádná posloupnost určena jednoznačně! I když se například zdá, že šestý člen posloupnosti 2, 4, 6, 8, 10, je číslo 12, jisté to není!

2 Aritmetická posloupnost

U některých posloupností je rozdíl $(n + 1)$-ho a n-tého členu pro všechna přirozená n konstantní. Takovéto posloupnosti se nazývají **aritmetické**.

Posloupnost (a_n) je aritmetická, existuje-li číslo d tak, že pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+1} - a_n = d$. Číslo d se nazývá diference aritmetické posloupnosti.

Je zřejmé, že aritmetická posloupnost (a_n) je určena svým prvním členem a_1 a diferencí d; všechny další členy jsou dány rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n + d$.

Úloha 1 *Dokažte, že pro n-tý člen aritmetické posloupnosti s diferencí d platí*

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Úloha 2 *Dokažte, že každý člen aritmetické posloupnosti kromě prvního je roven aritmetickému průměru svých sousedů.*

Úloha 3 *Dokažte, že posloupnost, jejíž každý člen kromě prvního je aritmetickým průměrem svých sousedů, je aritmetická.*

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti
V aritmetické posloupnosti (a_n) označme s_n součet jejích prvních n členů, tj.

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Změníme-li pořadí sčítanců, dostaneme rovnost

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1,$$

kterou sečteme s předcházející. Dostaneme tak:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_n + a_1).$$

Protože daná posloupnost je aritmetická, součty v jednotlivých závorkách se rovnají, takže $2s_n = n(a_1 + a_n)$ neboli $s_n = n(a_1 + a_n)/2$.

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti s prvním členem a_1 a n-tým členem a_n je dán vzorcem $s_n = n(a_1 + a_n)/2$.

Příklad 1 *Posloupnost všech přirozených čísel je rozložena do skupin tak, že první skupina končí číslem 1^2, druhá číslem 2^2, třetí číslem 3^2, …, k-tá číslem k^2:*

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, \ldots, 16), \ldots$$

Určete součet čísel v k-té skupině.

Řešení: Členy k-té skupiny jsou čísla $(k-1)^2 + 1$, $(k-1)^2 + 2$, $(k-1)^2 + 3$, …, k^2, která tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $d = 1$ a prvním členem $(k-1)^2 + 1$. Protože počet jejích členů je $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$, je součet všech čísel k-té skupiny roven

$$\frac{(2k-1)[(k-1)^2 + 1 + k^2]}{2} = (2k-1)(k^2 - k + 1).$$

Úloha 4 *Posloupnost všech přirozených čísel je rozložena do skupin tak, že v k-té je k čísel:* $(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), \ldots$
Určete součet čísel v k-té skupině.

Úloha 5 *Ze všech zlomků s přirozeným čitatelem i jmenovatelem je utvořena posloupnost tak, že ze dvou zlomků „jde v této posloupnosti dříve“ ten, který má menší součet čitatele a jmenovatele , a je-li tento součet stejný, „jde dříve“ zlomek, který má menšího čitatele. Napište několik prvních členů této posloupnosti a určete, kolikátým jejím členem je zlomek p/q, kde p, q jsou daná přirozená čísla.*

Úloha 6 *Určete n-tý člen a součet prvních n členů posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$, která je určena rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n + n$.*

Úloha 7 *Dokažte, že v posloupnosti (a_n) určené prvním členem $a_1 = 1$ a rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ platí $a_n + a_{n+1} = (n+1)^2$.*

3 Geometrická posloupnost

Zatímco u aritmetických posloupností je pro všechna přirozená čísla n konstantní rozdíl $(n+1)$-ho a n-tého členu, u posloupností geometrických je konstantní jejich podíl.

Posloupnost (a_n) je geometrická, existuje-li číslo q tak, že pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+1} = a_n q$. Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

Geometrická posloupnost (a_n) je tedy dána prvním členem a_1 a kvocientem q; všechny další členy jsou určeny rekurentním vzorcem $a_{n+1} = a_n q$.

Úloha 8 *Dokažte, že pro n-tý člen geometrické posloupnosti (a_n) s kvocientem q platí*

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Úloha 9 *Dokažte, že v geometrické posloupnosti (a_n) je absolutní hodnota každého členu kromě prvního rovna geometrickému průměru absolutních hodnot jeho sousedů, tj. že pro všechna přirozená čísla n platí $|a_n| = \sqrt{|a_{n+1}| \cdot |a_{n-1}|}$.*

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti
Označíme-li s_n součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem a_1 a kvocientem q, platí podle úlohy 8:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}.$$

Vynásobíme-li tuto rovnost kvocientem q, dostaneme

$$q s_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

a odečtením takto získané rovnosti od původní budeme po úpravě mít

$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n),$$

odkud za předpokladu $q \neq 1$ plyne:

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}.$$

Součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem a_1 a kvocientem $q \neq 1$ je dán vzorcem

$$\boldsymbol{s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}.}$$

Pro $q = 1$ je $s_n = n a_1$.

Příklad 2 *Posloupnost s prvním členem 49 je utvořena tak, že každý další člen vznikne z předcházejícího vložením dvojčíslí 48 do „jeho středu“:*

$$49, 4489, 444889, 44448889, \ldots$$

Dokažte, že každý člen této posloupnosti je druhá mocnina přirozeného čísla.

Řešení. Je zřejmé, že n-tý člen této posloupnosti je číslo $a_n = 44\ldots488\ldots89$, které má na prvních n místech čtyřky, na dalších $(n-1)$ místech osmičky a na posledním devítku. Toto číslo vyjádříme ve tvaru

$$a_n = 4.(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^n) + 8.(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10) + 9$$

a po sečtení členů obou geometrických posloupností a snadné úpravě dostaneme

$$a_n = \left[\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right]^2.$$

Protože ciferný součet čísla $2 \cdot 10^n + 1$ je pro všechna přirozená n dělitelný třemi, je číslo a_n přirozené.

Úloha 10 *Určete součet prvních n členů posloupnosti* $1, 11, 111, 1111, \ldots,$ *ve které dekadický zápis n-tého členu je tvořen n jedničkami.*

Úloha 11 *Určete n-tý člen a součet prvních n členů posloupnosti s prvním členem* $a_1 = 2$, *která je určena rekurentním vzorcem* $a_{n+1} = a_n + 3^n$.

Úloha 12 *Je dáno číslo* $999\ldots97000\ldots02999\ldots9$, *jehož dekadický zápis začíná (n - 1) devítkami, po číslici* 7 *následuje* $(n-1)$ *nul a po číslici* 2 *je n devítek. Dokažte, že pro všechna n je toto číslo třetí mocninou přirozeného čísla.*

Úloha 13 *Dokažte, že pro součet* s_n *prvních n členů geometrické posloupnosti platí*

$$(s_{2n} - s_n)^2 = s_n(s_{3n} - s_{2n}).$$

4 Aritmeticko-geometrická posloupnost

Posloupnost aritmeticko-geometrická je posloupnost $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n, \ldots$, kde posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je aritmetická a posloupnost $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ geometrická.

Příklad 3 *Určete součet* s_n *prvních n členů aritmeticko-geometrické posloupnosti*

$$x, 2x^2, 3x^3, \ldots, nx^n, \ldots\ .$$

Řešení. Součet $s_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ dané aritmeticko-geometrické posloupnosti určíme tak, že od tohoto součtu s_n odečteme výraz xs_n, tj. součin s_n a kvocientu x geometrické posloupnosti $x, x^2, x^3, \ldots$:

$$s_n - xs_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - nx^{n+1}.$$

Po snadných úpravách a za předpokladu $x \neq 1$ dojdeme k výsledku:

$$s_n = \frac{x[nx^{n+1} - x^n(n+1) + 1]}{(x-1)^2}.$$

Tímto postupem se dá určit součet prvních n členů každé aritmeticko-geometrické posloupnosti. Je sice možné odvodit obecný vzorec (viz úlohu 16), ale není nutné si výsledek pamatovat, protože v konkrétním případě požadovaný součet určíme výše uvedeným způsobem.

Úloha 14 *Určete součet*

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}.$$

Úloha 15 *Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí*

$$1 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

Úloha 16 *Odvoďte vzorec pro součet prvních n členů aritmeticko-geometrické posloupnosti* (a_nb_n), *kde* (a_n) *je aritmetická posloupnost s prvním členem* a_1 *a s diferencí d a* (b_n) *je geometrická posloupnost určená prvním členem* b_1 *a kvocientem q.*

Úloha 17 *Určete součet*

$$1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}.$$

5 Součet $S_k(n)$ k-tých mocnin prvních n přirozených čísel

Tento součet pro $k = 1$ a dané přirozené číslo n známe:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ukážeme si, jak tento součet určíme pro $k = 2$; z této ukázky pak snadno usoudíme, jak se dají tyto součty určit i pro $k = 3, 4, 5, \ldots$

Do rovnosti $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, která platí pro všechna přirozená čísla, dosadíme za n postupně $n-1$, $n-2$, …, 3, 2, 1 a těchto n rovností pro $(n+1)^3$, n^3, $(n-1)^3$, …, $3^3, 2^3$ sečteme. Po úpravě dostaneme

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_2(n) + 3S_1(n) + n,$$

odkud vypočteme

$$\boldsymbol{S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

K určení součtu $S_3(n)$ vyjdeme z rovnosti $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ a stejným způsobem jako pro $k = 2$ vypočteme

$$\boldsymbol{S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

Poznámka. Porovnáním výsledků pro $S_1(n)$ a $S_3(n)$ zjistíte, že pro všechna přirozená čísla n platí (poněkud překvapivě):

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Příklad 4 *Určete součet:* $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 11 + \cdots + n(3n-1)$.

Řešení. Platí:

$$\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = 3S_2(n) - S_1(n) = n^2(n+1).$$

Úloha 18 *Odvoďte, že platí:*
a) $S_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$
b) $S_5(n) = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$

Úloha 19 *Určete součet:* $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + (n+1)n^2$

Úloha 20 *Určete součet* $\sum_{k=1}^{n} [\sqrt{k}]$, *kde* $[x]$ *značí celou část reálného čísla* x.

Úloha 21 *Určete součet:*

$$\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \frac{3^4}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}$$

6 Posloupnost Fibonacciho

Fibonacciho posloupností budeme rozumět posloupnost (F_n), která je určena rekurentním vzorcem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n > 2$, a počátečními podmínkami $F_1 = 1$, $F_2 = 2$:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Členy této posloupnosti jsou Fibonacciho čísla.

Poznámka. Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisánský, žil na rozhraní 12. a 13. století. V jeho sbírce úloh vydané v Pise roku 1202 je úloha o králících vedoucí na posloupnost, která byla později nazvána posloupností Fibonacciho. Jde o tuto úlohu: Dejme tomu, že máme párek dospělých králíků a že chceme vědět, kolik párů budeme mít po uplynutí jednoho roku za předpokladu, že žádný králík neuhyne ani se neztratí, že každému dospělému páru se každý měsíc narodí párek mladých a že králíci dospějí během prvního měsíce života, takže do té doby žádné potomky nemají. Ověřte si, že počty párů králíků v jednotlivých měsících tvoří výše uvedenou posloupnost a že po uplynutí jednoho roku budeme mít 233 párů.

Příklad 5 *Určete počet způsobů, jimiž se dá vyjít schodiště o n schodech, jestliže se při každém kroku vynechá nejvýše jeden schod.*

Řešení. Označme p_n počet způsobů, kterými se dá schodiště o n schodech vyjít, a všechny tyto způsoby rozložme do dvou disjunktních tříd podle toho, zda se na první schod šlápne, nebo zda se překročí. Šlápne-li se na první schod, zůstává jich $n-1$, a ty lze vyjít p_{n-1} způsoby; překročí-li se první schod (a šlápne-li se tedy na druhý), zůstává $n-2$ schodů, které lze vyjít p_{n-2} způsoby. Platí proto

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2},$$

a protože je také $p_1 = 1$ a $p_2 = 2$, má posloupnost (p_n) stejný rekurentní vzorec i stejné počáteční podmínky jako posloupnost Fibonacciho, takže platí $p_n = F_n$.

Úloha 22 *Je dáno schodiště o $n+m$ schodech, po kterém jdeme způsobem popsaným v příkladu 5. Všechny možné výstupy rozložte do dvou tříd podle toho, zda se na n-tý schod šlápne nebo nikoli. Na základě výsledku příkladu 5 odvoďte, že pro Fibonacciho čísla platí: $F_{n+m} = F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1}$.*

Úloha 23 *Užitím výsledku předcházející úlohy ukažte, že pro Fibonacciho čísla platí:*

$$F_n^2 + F_{n-1}^2 = F_{2n}, \; F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n+1}$$

Úloha 24 *Určete, kolika způsoby je možno vydláždit obdélníkovou chodbu $2 \times n$, je-li k dispozici neomezená zásoba dlaždic 2×1.*

Úloha 25 *Je dána posloupnost teček a čárek. Určete, kolika způsoby ji lze „přečíst“, jsou-li písmena, z nichž je složena, tvořena nejvýše dvěma znaky.*

V následujícím příkladu a úloze odvodíme některé jednoduché vlastnosti Fibonacciho čísel.

Příklad 6 *Vyjádřete součet prvních n členů Fibonacciho posloupnosti pomocí čísla F_{n+2}.*

Řešení. Sečteme všech n rovností $F_3 = F_2 + F_1, F_4 = F_3 + F_2, \ldots, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ a dostaneme: $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 2$.

Úloha 26 *Určete součty: a) $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1}$, b) $F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}$, c) $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2$.*

Vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti

Ukážeme si, že n-tý člen posloupnosti (a_n) s rekurentním vzorcem

$$a_{n+2} + k_1a_{n+1} + k_2a_n = 0,$$

kde k_1, k_2 jsou reálná čísla, $k_2 \neq 0$, je dán vzorcem

$$a_n = c_1x_1^{n-1} + c_2x_2^{n-1},$$

kde x_1, x_2 jsou různé kořeny charakteristické rovnice $x^2+k_1x+k_2 = 0$ a c_1 a c_2 jsou konstanty, které jsou jednoznačně určeny počátečními podmínkami a_1, a_2 posloupnosti (a_n); má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen $x_1 = x_2$, pro n-tý člen platí

$$a_n = (c_1 + c_2n)x_1^{n-1}.$$

K důkazu této věty do součtu $k_1a_{n+1} + k_2a_n$ dosaďte za a_{n+1} a za a_n a ukažte, že je roven $-a_{n+2}$; využijte přitom toho, že platí $k_1x_1+k_2 = -x_1^2$ a $k_1x_2+k_2 = -x_2^2$. Dále ukažte, že soustava rovnic

$$\begin{aligned} a_1 &= c_1 + c_2 \\ a_2 &= c_1x_1 + c_2x_2 \end{aligned}$$

s neznámými c_1, c_2 má jediné řešení.

Podobným způsobem se dokáže i druhá část věty pro dvojnásobný kořen charakteristické rovnice.

Na základě této věty snadno odvodíme vzorec pro n-tý člen posloupnosti (F_n), která je dána rekurentním vzorcem $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ a počátečními podmínkami $F_1 = 1, F_2 = 2$. Protože kořeny charakteristické rovnice $x^2 - x - 1 = 0$ jsou čísla

$$x_1 = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}, x_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2},$$

pro n-tý člen platí

$$F_n = c_1\left[\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1} + c_2\left[\frac{(1-\sqrt{5})}{2}\right]^{n-1}.$$

Vypočteme-li ještě neznámé c_1, c_2 ze soustavy

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ 2 &= c_1\frac{(1+\sqrt{5})}{2} + c_2\frac{(1-\sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

dostaneme hledaný vzorec pro n-tý člen posloupnosti Fibonacciho:

$$\boldsymbol{Fn = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}}.$$

Poznámka. Protože členy Fibonacciho posloupnosti jsou přirozená čísla, je získaný výraz F_n pro všechna n přirozené číslo, i když je vyjádřen pomocí druhých odmocnin z pěti. Pokud v literatuře najdete pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti jiné vyjádření než výše uvedené, bude to nejspíše tím, že se uvažují jiné počáteční podmínky, např. $F_1 = F_2 = 1$, nebo někdy také $F_1 = 0, F_2 = 1$.

Úloha 27 *Určete n-tý člen posloupnosti (a_n) určené počátečními podmínkami $a_1 = 1, a_2 = 7$ a rekurentním vzorcem $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$.*

7 Posloupnosti v kombinatorice

V následujících ukázkách se můžete seznámit se způsobem řešení kombinatorických úloh, který je založen na nalezení rekurentního vzorce.

Příklad 7 *Na parkovišti je deset parkovacích míst rovnoběžných s chodníkem a tak velkých, že autobus a nákladní auto zaberou po dvou místech a osobní auto jedno. Určete počet způsobů, kterými mohou být vozidla těchto tří druhů na parkovacích místech rozmístěna. Nepožaduje se přitom, aby na těchto místech byl zastoupen každý druh vozidla, pořadí zaparkovaných vozidel se však v úvahu bere. (Například tři autobusy, dvě osobní a jedno nákladní auto lze rozmístit tak, že na první dvě místa zleva zaparkujeme nákladní auto, na místa třetí až šesté umístíme dva autobusy, na sedmé místo osobní auto, na osmé a deváté autobus a na poslední desáté místo osobní auto.)*

Řešení. Určíme rekurentní vzorec posloupnosti $p(1), p(2), p(3), \ldots, p(n), \ldots,$ jejíž n-tý člen udává počet způsobů rozmístění daných druhů vozidel na n parkovacích míst. Všechny tyto způsoby rozložíme do tří disjunktních tříd podle toho, které vozidlo stojí na prvním místě zleva: Je-li tam osobní auto, zbývá $n-1$ parkovacích míst, na něž lze vozidla umístit $p(n-1)$ způsoby; stojí-li na něm auto nákladní nebo autobus, zůstává volných $n-2$ míst, na která lze vozidla rozmístit $p(n-2)$ způsoby. Pro všechna $n > 2$ je tedy

$$p(n) = p(n-1) + 2p(n-2)$$

a určíme-li ještě $p(1) = 1$ a $p(2) = 3$, je tím daná posloupnost určena a můžeme určit její člen $p(10) = 683$.

Úloha 28 *Určete n-tý člen posloupnosti z předcházejícího příkladu.*

Úloha 29 *Určete rekurentní vzorec posloupnosti, jejíž n-tý člen udává počet uspořádaných n-tic sestavených z číslic $0, 1, 2$, které mají tuto vlastnost: Každá obsahuje aspoň jednu jedničku a pokud obsahuje nulu, je vlevo od ní aspoň jedna jednička. (Např. pro $n = 3$ je těchto uspořádaných trojic třináct: $111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 100, 101, 102, 110, 120, 210$.) Sečtením n rovností pro $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ odvoďte vzorec pro n-tý člen.*

Úloha 30 *Určete rekurentní vzorec posloupnosti, jejíž n-tý člen udává počet uspořádaných n-tic sestavených z číslic $0, 1, 2$ tak, že v žádné z těchto n-tic nejsou tři po sobě jdoucí číslice $0, 1, 2$ v tomto pořadí zleva.*

Úloha 31 *Určete rekurentní vzorec posloupnosti, jejíž n-tý člen udává počet disjunktních částí, na něž je rozdělena rovina n přímkami, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Odvoďte dále vzorec pro n-tý člen této posloupnosti.*

Úloha 32 *V trojúhelníku ABC je uvnitř každé strany zvoleno n různých bodů a jsou sestrojeny všechny přímky, které jsou určeny každým ze zvolených bodů a protilehlým vrcholem trojúhelníku; žádné tři z těchto přímek se uvnitř trojúhelníku ABC neprotínají v témže bodě. Určete rekurentní vzorec posloupnosti, jejíž n-tý člen udává počet disjunktních částí, na něž je daný trojúhelník rozdělen přímkami procházejícími n zvolenými vntřními body na každé straně.*

8 Limita posloupnosti

Účelem této krátké kapitoly není podrobně probrat vlastnosti limity posloupnosti, protože s některými těmito vlastnostmi se seznamujete na střední škole a s dalšími se pak seznámíte na škole vysoké. Pojem limity posloupnosti budeme potřebovat jen k tomu, abychom porozuměli způsobu, jak je definován a jak se v některých případech dá určit součet nekonečně mnoha sčítanců.

Pro některé posloupnosti (a_n) lze najít takové reálné číslo A, že s rostoucím n se rozdíl $|a_n - A|$ stále zmenšuje a blíží se k nule. Toto číslo A se nazývá limita posloupnosti (a_n); píšeme: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ nebo, nehrozí-li nedorozumění, $\lim a_n = A$.

Číslo A je limitou posloupnosti (a_n), jestliže ke každému kladnému číslu ϵ existuje číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - A| < \epsilon$.
Posloupnosti, které mají limitu, se nazývají konvergentní.

Poznámka. Takto definované limitě se říká „vlastní limita“, aby se odlišila od limity nevlastní, se kterou se seznámíte v závěru této kapitoly. My však budeme přívlastek „vlastní“ vynechávat - bude-li řeč o limitě, budeme tím vždy rozumět limitu vlastní, tj. limitu, která je reálné číslo.

Příklad 8 *Užitím definice limity dokažte, že pro všechna reálná čísla x taková, že $|x| < 1$, je $\lim x^n = 0$.*

Řešení. Zvolíme kladné číslo ϵ a hledáme takové přirozené číslo n_0, aby pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platilo $|x^n - 0| < \epsilon$. Z této nerovnosti dostaneme $n. \ln|x| < \ln\epsilon$ neboli $n > \ln\epsilon / \ln|x|$, neboť $|x| < 1$. K tomu, aby pro všechna $n > n_0$ platilo $|x^n| < \epsilon$, stačí vzít $n_0 > \ln\epsilon/\ln|x|$.

Úloha 33 *Podle definice limity posloupnosti dokažte:*
a) $\lim 1/n = 0$, *b)* $\lim c = c$ *pro každé číslo c.*

Uvedeme nyní bez důkazu věty, které se k určování limit používají.

Jestliže $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a c je libovolné číslo, potom platí $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$, $\lim a_n b_n = ab$, $\lim ca_n = ca$; v případě, že je $b \neq 0$, platí $\lim a_n/b_n = a/b$.

Příklad 9 *Určete limitu posloupnosti s n-tým členem* $a_n = (3n^2 + 2n + 1)/(n^2 - 2n + 5)$.

Řešení. Daný zlomek nejprve upravíme:

$$\frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - 2n + 5} = \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}$$

a na vzniklý výraz použijeme věty o limitách:
$\lim 3 = 3$, $\lim 2/n = \lim 1/n^2 = 0$, $\lim 1 = 1$, $\lim -2/n = \lim 5/n^2 = 0$,
$\lim(3 + 2/n + 1/n^2) = 3 + 0 + 0 = 3$, $\lim(1 - 2/n + 5/n^2) = 1 + 0 + 0 = 1 \neq 0$,
$\lim(3n^2 + 2n + 1)/(n^2 - 2n + 5) = 3/1 = 3$.

Úloha 34 *Určete limitu posloupnosti* (a_n)*:*
a) $a_n = 5n/(2n - 1)$, *b)* $a_n = (3 - 2n^2)/n^3$, *c)* $a_n = [(2n + 1)/n + (4/5)^n \cdot n/(n + 1)]$.

Úloha 35 *Užitím vzorce pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti určete limitu posloupnosti s n-tým členem* F_{n+1}/F_n *, tj. posloupnosti* $2/1, 3/2, 5/3, 8/5, \ldots$

Posloupnosti, které nejsou konvergentní, tj. které nemají za limitu reálné číslo, mohou mít limitu nevlastní, a to $+\infty$ nebo $-\infty$. Říkáme o nich, že divergují k plus nebo k minus nekonečnu.

Posloupnost (a_n) má nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu K existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$a_n > K, \text{ resp. } a_n < K.$$

Píšeme: $\lim a_n = +\infty$, $\lim a_n = -\infty$.

Věty o limitě posloupnosti, platí i v případě limity nevlastní; nelze je použít pouze v případech, kdy vedou na některý z tzv. neurčitých výrazů ($\infty + \infty$, $\infty + (-\infty)$, ∞/∞, $0.\infty$, $0/0$). Uvědomme si ještě, že pro každou posloupnost mohou nastat pouze tyto navzájem se vylučující případy: má vlastní limitu, má nevlastní limitu, nemá nemá vlastní ani nevlastní limitu.

Úloha 36 *Podle definice nevlastní limity dokažte:* $\lim n^2 = +\infty$.

Úloha 37 *Určete limitu posloupnosti* (a_n)*: a)* $a_n = (3 - 2n^3)/n^2$, *b)* $a_n = (n^2 - 2n)/(n + 1)$.

Poznámka. Důležitou posloupností je posloupnost $(1 + 1/n)^n$. Dá se dokázat, že má limitu; značí se e a nazývá se Eulerovo číslo. Je to číslo iracionální, jeho přibližná hodnota je $e = 2,718281$. O tomto čísle se v následující kapitole zmíníme v souvislosti s tzv. harmonickou řadou.

9 Součet nekonečné řady

Nekonečnou řadou se nazývá součet $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Touto řadou je určena posloupnost (s_n) částečných součtů, kde

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \ldots$$

Je-li tato posloupnost (s_n) konvergentní a její limita je rovna číslu s, říkáme, že i řada $\sum a_n$ je konvergentní a číslo s nazýváme součtem nekonečné řady $\sum a_n$. Jestliže $\lim s_n = +\infty$, resp.

$\lim s_n = -\infty$, říkáme, že řada $\sum a_n$ diverguje k plus nekonečnu, resp. k minus nekonečnu. Jestliže neexistuje $\lim s_n$, říkáme, že řada $\sum a_n$ osciluje.

Poznámka. Všimněte si, že součet nekonečné konvergentní řady není vlastně součet, ale limita příslušné posloupnosti částečných součtů.

Příklad 10 *Určete součet nekonečné řady*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Řešení. Každý člen a_k tohoto součtu vyjádříme ve tvaru $a_k = 1/k - 1/(k+1)$, čímž dosáhneme toho, že v součtu s_n se všechny sčítance až na první a poslední vyruší:

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud už je snadno vidět, že $\lim s_n = 1$, takže součet dané nekonečné řady je roven jedné.

Úloha 38 *Určete součet nekonečné řady*
a) $\sum 1/(n(n+2))$, *b)* $\sum n/(n+1)!$, *c)* $\sum 1/(1+2+3+\cdots+n)$, *d)* $\sum 1/(\log 2^n \cdot \log 2^{n+1})$.

Příklad 11 *Dokažte, že nekonečná řada* $\sum 1/(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})$ *diverguje k* $+\infty$.

Řešení. Každý člen a_k tohoto součtu vyjádříme ve tvaru $a_k = \sqrt{(k+1)} - \sqrt{k}$, takže pro součet s_n dostaneme:

$$s_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Vzhledem k tomu, že $\lim s_n = +\infty$, daná nekonečná řada diverguje.

V souvislosti s tímto příkladem dokážeme větu:
Je-li řada $\sum a_n$ konvergentní, je $\lim a_n = 0$.
Důkaz je jednoduchý. Řada $\sum a_n$ je konvergentní, takže existuje $\lim s_n = s$. Protože však $a_n = s_n - s_{n-1}$, platí: $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$.

Příklad 11 ukazuje, že obrácená věta neplatí; pro posloupnost (a_n) z tohoto příkladu platí $\lim a_n = 0$, ale řada $\sum a_n$ diverguje! Uvedená věta se používá k důkazu, že daná řada není konvergentní: Nemá-li posloupnost (a_n) limitu rovnou nule, potom řada $\sum a_n$ není konvergentní.

V příkladu 10 a v úloze 38 byl odvozen součet nekonečné konvergentní řady podle definice, tj. určením limity posloupnosti částečných součtů. Stejným způsobem se dá postupovat i v případě nekonečné řady geometrické, tj. řady

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n + \dots,$$

kde číslo q - stejně jako u geometrické posloupnosti - se nazývá kvocient. Částečný součet s_n této řady pro $q \neq 1$ známe:

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^n}{1 - q}.$$

Uvědomíme-li si dále, že podle příkladu 8 pro $|q| < 1$ je $\lim q^n = 0$, dostaneme

$$\lim s_n = \frac{a_1}{1 - q},$$

což znamená:

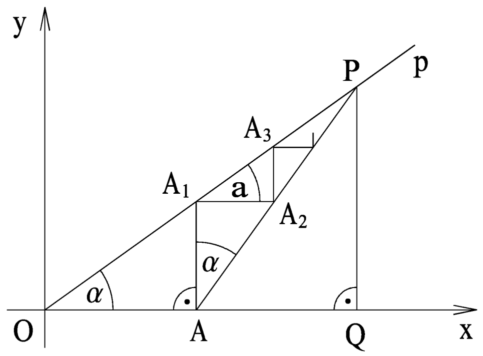
Nekonečná geometrická řada $\sum a_1 q^n$ je pro $|q| < 1$ konvergentní a má součet

$$\boldsymbol{s = \frac{a_1}{1-q}}$$

.

Poznámka. U součtu nekonečné geometrické řady nezapomínejte na podmínku $|q| < 1$. Např. řada $1 + \sin x + \sin^2 x + sin^3 x + \dots$ má součet jen pro taková x, pro něž je $|\sin x| \neq 1$, takže pro $x = 3\pi/2$ její součet neexistuje. (Pro toto x dostaneme řadu $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$).

Uvedený vzorec byl pro $a_1 > 0$ a $1 > q > 0$ odvozen v učebnici B. Bydžovského „Aritmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií", vydané v Praze roku 1911. Protože v tehdejší době se na gymnáziích neučily limity posloupnosti, musel být vzorec pro součet nekonečné geometrické řady odvozen jiným způsobem. Pro zajímavost si tento způsob ukážeme; připomeňme, že odvození je provedeno za předpokladu $a_1 > 0$, $1 > q > 0$.



Obrázek 1:

V souřadnicové soustavě na obrázku 1 je zakreslena přímka p o směrnici $\tan\alpha = q$ a bod $A[a_1, 0]$, kterým je vedena kolmice k ose x protínající přímku p v bodě A_1 a dále přímka, která s touto kolmicí svírá úhel α a protíná přímku p v bodě P (neboť $\alpha < 45^o$). Úsečky OA_1, A_1A_2, A_2A_3, …, vedené mezi přímkami OP a AP střídavě rovnoběžně a kolmo k ose x, mají postupně délky

$$a_1, a_1 \tan\alpha = a_1 q, a_1 \tan^2\alpha = a_1 q^2, a_1 \tan^3\alpha = a_1 q^3, \dots,$$

takže součet s této nekonečné řady je roven součtu délek těchto úseček, tj. délce d lomené čáry $OAA_1A_2 \dots P$. Délku d určíme tak, že k součtu délek úseček rovnoběžných s osou x který je roven délce úsečky OQ, připočteme součet délek úseček k ose x kolmých, který je roven délce úsečky PQ. Platí tedy

$$d = |OQ| + |PQ| = |OP|(cos\alpha + sin\alpha).$$

Délku úsečky OP určíme pomocí sinové věty v trojúhelníku OAP:

$$|OP| = a_1 \frac{\sin(\alpha + 90^o)}{\sin(90^o - 2\alpha)} = a_1 \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = a_1 \frac{\cos\alpha}{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}.$$

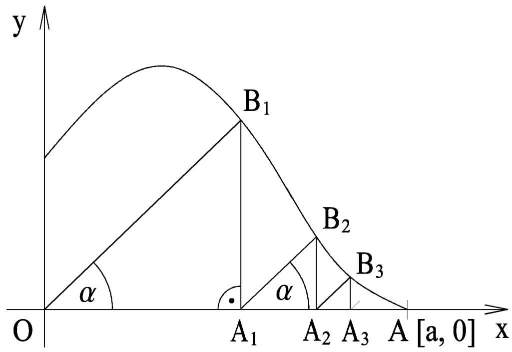
Dosazením do výše uvedeného vztahu pro d dostaneme hledaný vzorec pro součet s dané nekonečné řady:

$$d = a_1 \frac{\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)}{(\cos^2\alpha - sin^2\alpha)} = a_1 \frac{\cos\alpha}{(cos\alpha - \sin\alpha)} = \frac{a_1}{(1 - \tan\alpha)} = \frac{a_1}{(1-q)} = s.$$

Všimněte si však, že v tomto odvození jsme se „dopustili" jistého nedopatření, neboť jsme předpokládali, že platí:

$$|OA| + |AA_1| + |A_1A_2| + |A_2A_3| + \dots = (|OA| + |A_1A_2| + \dots) + (|AA_1| + |A_2A_3| + \dots)$$

Toto nedopatření spočívalo v tom, že jsme v dané nekonečné řadě „přeházeli“ pořadí sčítanců, což však je možné provést pouze u nekonečných řad určitého typu. Naštěstí výše uvedená řada k tomuto typu patří, takže je toto odvození v pořádku. Zdůrazněme však, že přerovnat členy nekonečné řady není obecně možné!

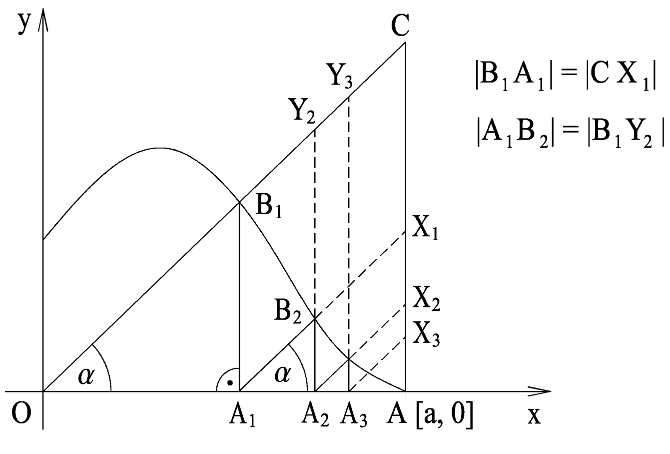


Obrázek 2:

Příklad 12 *Na obrázku 2 je znázorněna lomená čára* $OB_1A_1B_2A_2B_3\ldots$, *jejíž vrcholy* A_i *leží na ose* x *a vrcholy* B_i *na křivce, která je grafem spojité funkce na intervalu* $< 0, a >$. *Jednotlivé úsečky, z nichž je tato lomená čára složena, jsou střídavě rovnoběžné s úsečkou* OB_1 *a s úsečkou* A_1B_1, *která je kolmá na osu* x. *Určete délku* d *této lomené čáry, znáte-li úhel* α *a délku* a.

Řešení. Sestrojíme průsečík C přímky OB_1 a kolmice k ose x vedené bodem A; z obrázku 3 je vidět, že délka úsečky OC je součet délek úseček svírajících s osou x úhel α a délka úsečky AC je součet délek úseček k ose x kolmých. Podobně jako v předcházejícím odvození dostaneme

$$d = |OC| + |AC| = \frac{a}{\cos\alpha} + a\tan\alpha = \frac{a(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}.$$



Obrázek 3:

Všimněte si, že délka této čáry závisí jen na velikosti úhlu α a na délce intervalu $< 0, a >$. Vezmeme-li na tomto intervalu graf jiné spojité funkce ležící v 1. kvadrantu - např. kruhový oblouk se středem v počátku - a sestrojíme-li stejným způsobem jako v příkladu 12 lomenou čáru s týmž úhlem α, bude délka této lomené čáry stejná.

Úloha 39 *Vyjádřete periodické desetinné číslo* $0,5\overline{47}$*, jehož předperioda je* 5 *a perioda* 47*, jako podíl dvou přirozených čísel.*

Příklad 13 *Určete součet nekonečné řady* $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + (2n-1)x^{n-1} + \ldots$

Řešení. U této aritmeticko-geometrické řady určíme známým způsobem součet s_n jejích prvních n členů

$$s_n = \frac{2nx^n(x-1) - (x+1)(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

a vypočteme $\lim s_n$ pro $|x| < 1$. Za tohoto předpokladu pro součet s dané řady dostaneme

$$s = \frac{x+1}{(x-1)^2}.$$

Úloha 40 *Ukažte, že pro součet* s *nekonečné aritmeticko-geometrické řady* $\sum a_n b_n$*, kde* (a_n) *je aritmetická posloupnost s prvním členem* a_1 *a diferencí* d*,* (b_n) *je geometrická posloupnost s prvním členem* b_1 *a kvocientem* q*, za předpokladu* $|q| < 1$ *platí:*

$$s = \frac{a_1 b_1}{1-q} + \frac{b_1 dq}{(1-q)^2}.$$

Achilles a želva

Podle známé Zenónovy aporie Achilles nedohoní želvu, i když jeho rychlost je větší než rychlost želvy. Přiběhne-li totiž Achilles do bodu, ve kterém želva byla, než ji začal pronásledovat, želva už v něm nebude, protože za dobu, kterou Achilles k doběhnutí do tohoto budu potřeboval, se přemístila. Achilles vždy přibíhá do bodu, ve kterém už želva není, protože mezitím se z tohoto bodu vzdálila. I když se Achilles želvě neustále přibližuje, nikdy ji nedohoní, praví Zenón. Pokuste se pomocí součtu nekonečné geometrické řady určit, za jak dlouho Achilles želvu dohoní, jsou-li dány rychlosti u, v Achilla a želvy a jejich počáteční vzdálenost d.

Poznámka. Zjistit, za jak dlouho Achilles želvu dohoní, je podstatně jednodušší, když si představíme, že želva stojí a Achilles se k ní přibližuje rychlostí $u - v$. Žádný z obou způsobů výpočtu však nevysvětluje, kde je v Zenónově úvaze chyba.

Harmonická řada

V příkladu 11 byla ukázána řada, která diverguje k $+\infty$, i když její členy konvergují k nule. Podobnou vlastnost má i řada $\sum 1/n$, která se nazývá harmonická. (Tento název má původ v tom, že každý člen této řady s výjimkou prvního je harmonickým průměrem svých členů sousedních.) Ukážeme nyní, že harmonická řada diverguje k $+\infty$.

Vyjdeme z toho, že víme, že posloupnost $(1 + 1/n)^n$ je rostoucí a že má za limitu číslo e. Znamená to, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

neboli

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1, \text{ tj. } \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Z této poslední nerovnosti dostáváme, že pro všechna přirozená n platí:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n} = \ln(n+1).$$

Tento výsledek znamená, že rostoucí posloupnost částečných součtů harmonické řady není shora omezená, takže tato řada diverguje k $+\infty$.

Položme si ještě otázku, zda n-tý částečný součet s_n harmonické řady je pro nějaké n celé číslo. K jejímu zodpovězení vyšetříme součet

$$s_n - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Všimněme si nejprve, že mezi všemi těmito sčítanci existuje aspoň jeden zlomek, jehož jmenovatel je mocnina dvou, a vyberme z nich ten, v jehož jmenovateli má číslo dvě největší exponent - nechť je to zlomek $1/2^k$. V součtu

$$s_n - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^k-1} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

proto platí

$$\frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Vyjádříme nyní každý zlomek $1/i$, $i = 2, 3, \ldots, n$, ve tvaru $1/(2^j \cdot m_i)$, kde 2^j je jedna z mocnin $2^0, 2^1, , 2^k$ a m_i je liché číslo, a za jejich společného jmenovatele vezmeme výraz $2^k \cdot m$, kde $m = m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_n$. Převedeme-li dále všechny sčítance zkoumaného součtu na tento společný jmenovatel a sečteme-li je, bude součet $s_n - 1$ roven zlomku, jehož čitatel je

$$\frac{2^k\cdot m}{2} + \frac{2^k\cdot m}{3} + \frac{2^k\cdot m}{4} + \cdots + \frac{2^k\cdot m}{2^k-1} + \frac{2^k\cdot m}{2^k} + \frac{2^k\cdot m}{2^k+1} + \cdots + \frac{2^k\cdot m}{n}.$$

Protože číslo $2^k \cdot m$ je dělitelné každým z čísel $2, 3, 4, .., n$, je každý z těchto $n-1$ sčítanců celé číslo a podíváme-li se pozorně, zjistíme, že všechna až na jedno jsou sudá; jediným lichým číslem je číslo $2^k \cdot m/2^k = m$. Čitatel zlomku $s_n - 1$ je tedy číslo liché, a vzhledem k tomu, že jeho jmenovatel $2^k \cdot m$ je číslo sudé, není tento zlomek celé číslo.

Tím jsme dokázali: Součet $s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n$ prvních n členů harmonické řady není pro žádné přirozené $n > 1$ celé číslo.

Uveďme ještě, že harmonická řada se často používá k důkazům konvergence nebo divergence jiných nekonečných řad, které jsou založeny na tzv. srovnávacím kritériu.

Srovnávací kritérium
Pro nekonečné řady $\sum a_n$, $\sum b_n$, jejichž členy jsou nezáporná čísla taková, že pro všechna přirozená n je $a_n \leq b_n$, platí:

a) Konverguje-li řada $\sum b_n$, konverguje i řada $\sum a_n$.

b) Diverguje-li řada $\sum a_n$, diverguje i řada $\sum b_n$.

Důkaz.

a) Jestliže řada $\sum b_n$ s nezápornými členy konverguje, jsou všechny její částečné součty menší než určité kladné číslo K. Vzhledem k tomu, že pro každé přirozené číslo n je $a_n \leq b_n$, jsou menší než K také všechny částečné součty řady $\sum a_n$. Posloupnost těchto částečných součtů je proto shora omezená, a protože je neklesající (všechna a_n jsou nezáporná), má vlastní limitu. Znamená to, že řada $\sum a_n$ konverguje.

b) Předpokládejme, že řada $\sum a_n$ diverguje a řada $\sum b_n$ konverguje. Konverguje-li však řada $\sum b_n$, pak podle a) konverguje i řada $\sum a_n$, což je spor s naším předpokladem.

Řada $\sum b_n$ se nazývá majoranta řady $\sum a_n$, řada $\sum a_n$ je minoranta řady $\sum b_n$. Uvedenou větu si můžeme pamatovat ve zkráceném znění: Konverguje-li majoranta, konverguje i minoranta; diverguje-li minoranta, diverguje i majoranta.

Příklad 14 *Dokažte, že řada* $\sum 1/\sqrt{n} = 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + 1/\sqrt{4} + \dots$ *diverguje.*

Řešení. Pro všechny členy harmonické řady je $1/n \leq 1/\sqrt{n}$, a protože harmonická řada diverguje, diverguje i řada $\sum 1/\sqrt{n}$.

Příklad 15 *Dokažte, že řada* $\sum 1/[(2n-1).2^{2n-1}] = 1/(1.2)+1/(3.2^3)+(1/5.2^5)+\dots$ *konverguje.*

Řešení. Pro všechny členy geometrické řady $\sum 1/2^{2n-1} = 1/2 + 1/2^3 + 1/2^5 + \dots$ je

$$1/2^{2n-1} \geq 1/(2n-1).2^{2n-1},$$

a protože geometrická řada s kvocientem q $= 1/4$ konverguje, konverguje i řada $\sum 1/[(2n-1).2^{2n-1}]$.

10 Deset úloh na závěr

Úloha 41 *Nechť a je dané přirozené číslo. Určete* $\sum_{k=0}^{n} [k/n]$, *kde* $[x]$ *značí celou část čísla* x.

Úloha 42 *Určete n-tý člen posloupnosti přirozených čísel, v jejichž zápisu jsou na posledních dvou místech stejné nenulové číslice.*

Úloha 43 *Určete počet všech přirozených čísel, v jejichž zápisu jsou na posledních dvou místech nenulové číslice, která jsou nejvýše rovna danému přirozenému číslu* n.

Úloha 44 *Určete součet všech přirozených čísel z úlohy 43.*

Úloha 45 *Určete součet* $\sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot k(k+1)!$

Úloha 46 *Určete součet* $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2+1)$.

Úloha 47 *Tvoří-li čísla* $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$, *kde* $x \neq 1$ *aritmetickou posloupnost, potom platí:* $n^2 = (kn)^{\log m}$, *kde logaritmus v exponentu posledního výrazu má základ* k.

Úloha 48 *Součin prvních n členů geometrické posloupnosti* (a_n) *je roven* $(s_n/S_n)^{n/2}$, *kde* s_n *je součet prvních n členů posloupnosti* (a_n) *a* S_n *je součet prvních n členů posloupnosti* (b_n), *pro jejíž členy platí* $b_n = 1/a_n$. *Dokažte.*

Úloha 49 *Je dána aritmetická posloupnost* (a_n) *s prvním členem* a_1 *a diferencí d, kde* a_1, d *jsou přirozená čísla, pro která platí* $d = a_1 - 1$. *Dokažte, že v této aritmetické posloupnosti existuje člen, který je roven* a_1^p, *kde p je dané přirozené číslo.*

Úloha 50 *Určete součet prvních n členů posloupnosti* (a_n) *určené rekurentním vzorcem* $a_{n+1} = a_n + 24n + 28$ *a počáteční podmínkou* $a_1 = 25$.