Co Fibonacci ani Ludolf netušili

aneb

Jak souvisí čísla Fibonacciho s číslem π

Doc. RNDr. Emil Calda, CSc.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Emil Calda:

Co Fibonacci ani Ludolf netušili
aneb
Jak souvisí čísla Fibonacciho s číslem π

Řekněme si nejprve pár slov o výše jmenovaných:

Italský matematik Fibonacci, vlastním jménem Leonardo Pisánský, žil na rozhraní 12. a 13. století (přibližně v letech 1170 – 1240); byl prvním velkým matematikem evropského středověku, jeho prostřednictvím se do Evropy dostaly arabské číslice, odvodil řadu praktických početních pravidel. V roce 1202 vydal knihu Liber Abacci, v níž je známá úloha o králících vedoucí na posloupnost, která byla po více než sedmi stech letech nazvána posloupností Fibonacciho.

Nizozemský matematik Ludolf van Ceulen žil v letech 1540 – 1610. Je známý tím, že jako první vypočetl číslo π s přesností na dvacet desetinných míst, později dokonce na pětatřicet desetinných míst.

Fibonacciho úloha o králících

Představme si, že máme párek dospělých králíků a že chceme vědět, kolik párů králíků budeme mít po uplynutí jednoho roku; předpokládá se přitom, že

a) každému dospělému páru se každý měsíc narodí jeden pár (tj. sameček a samička);
b) králíci dospějí po uplynutí jednoho měsíce, do té doby žádné mladé nemají;
c) králíků neubývá - nehynou ani se neztrácejí.

Počty králičích párů v prvních pěti měsících jsou znázorněny na obr. 1, v němž kroužky značí králičí páry a šipky míří od rodičovských párů k párům jejich potomků. Označíme-li F_n počet párů na konci n-tého měsíce, platí zřejmě:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8.$$

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat a zjistili bychom, že počet F_{12} párů králíků po uplynutí jednoho roku je 233. Podívejme se na tuto posloupnost z obecnějšího hlediska..

Všimněme si, že počet párů králíků na konci n-tého měsíce je roven počtu párů králíků na konci měsíce (n-1)-ho zvětšenému o počet párů, které v n-tém měsíci přibyly; protože však v n-tém měsíci přibylo tolik párů, kolik párů králíků bylo v měsíci (n-2), pro posloupnost králičích párů platí:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \text{kde } n > 2.$$

Doplníme-li tento rekurentní vzorec počátečními podmínkami $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, je tím určena posloupnost zvaná Fibonacciho, jejíž členy jsou Fibonacciho čísla:

$$(F_n)\text{: } 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots$$

Poznámka. V literatuře se můžete setkat s posloupností, které se také říká Fibonacciho ale která se od „naší“ posloupnosti (F_n) liší jen tím, že počáteční podmínky jsou $F_1 = F_2 = 1$. V dalším textu budeme Fibonacciho posloupností rozumět posloupnost, kterou jsme získali řešením Fibonacciho úlohy, tj. posloupnost, jejíž počáteční podmínky jsou $F_1 = 1$, $F_2 = 2$.

Součty Fibonacciho čísel

(1) **Pro součet $S_1 = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ prvních n členů Fibonacciho posloupnosti platí:**

$$\mathbf{S_1 = F_{n+2} - 2.}$$

Tento součet S_1 dostaneme tak, že do rovnosti $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ dosadíme za k postupně čísla 1, 2, 3, …, n a všech těchto n rovností sečteme.

(2) **Pro součet $S_2 = F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1}$ prvních n členů na lichých místech Fibonacciho posloupnosti platí:**

$$S_2 = F_{2n} - 1.$$

Součet S_2 získáme tím způsobem, že k rovnosti $F_2 = F_1 + F_1$ přičteme všechny rovnosti $F_{2k} = F_{2k-2} + F_{2k-1}$, do nichž dosadíme za k postupně čísla 2, 3, 4,…, n.

(3) **Pro součet $S_3 = F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n}$ prvních n členů na sudých místech Fibonacciho posloupnosti platí:**

$$S_3 = F_{2n+1} - 1.$$

Součet S_3 získáme tak, že od součtu S_1 odečteme součet S_2.

(4) **Pro součet $S_4 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2$ druhých mocnin prvních n členů Fibonacciho posloupnosti platí:**

$$S_4 = F_nF_{n+1} - 1.$$

K získání součtu S_4 vyjdeme z rovnosti

$$F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n.$$

Přičteme-li k rovnosti $F_1^2 = 1$ všech $(n - 1)$ rovností pro F_k^2, do nichž jsme za k dosadili čísla 2, 3, 4, …, n, dostaneme po snadné úpravě uvedený vzorec.

Užitím součtu S_4 budete jistě umět zdůvodnit toto tvrzení:

Každý obdélník, jehož délky sousedních stran jsou rovny sousedním členům Fibonacciho posloupnosti, se dá pokrýt čtverci, které jsou navzájem různé s výjimkou dvou nejmenších, jejichž strany mají délku rovnou jedné. (Viz obr. 2, na němž je znázorněn obdélník o rozměrech $F_7 = 21$, $F_6 = 13$.)

Dláždění chodby

Na obr. 3 je znázorněno pět způsobů, kterými se dá vydláždit chodba 2 x 4 dlaždicemi 2 x 1. Položme si otázku, kolika způsoby je možné vydláždit dlaždicemi 2 x 1 obdélníkovou chodbu 2 x n, kde n je přirozené číslo; předpokládáme přitom, že těchto dlaždic máme k dispozici potřebný počet.

Označme p_n počet způsobů, kterými lze chodbu délky n vydláždit, a všechny tyto způsoby pro $n > 2$ rozložme do dvou disjunktních tříd podle umístění dlaždic na začátku chodby. Je-li na začátku podle obr. 3a jedna dlaždice, zůstává vydláždit délku $(n - 1)$, což lze provést p_{n-1} způsoby. Začíná-li chodba podle obr. 3b dvěma dlaždicemi, zbývá vydláždit délku $(n - 2)$, což lze provést p_{n-2} způsoby. Protože jiné možnosti umístění dlaždic na začátek chodby nejsou, pro $n > 2$ platí:

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Dále pak vzhledem k tomu, že $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, má posloupnost (p_n) stejný rekurentní vzorec i počáteční podmínky jako posloupnost Fibonacciho, takže platí $p_n = F_n$.

Počet způsobů, kterými lze vydláždit obdélníkovou chodbu 2 x n dlaždicemi 2 x 1, je roven n-tému členu posloupnosti Fibonacciho.

Výstupy schodiště

Na obr. 4a, 4b jsou znázorněny dva z možných způsobů, jak vyjít schodiště s pěti schody tak, že při každém kroku se vynechá nejvýše jeden schod. Položme si otázku, kolika způsoby se dá tímto způsobem vyjít schodiště o n schodech.

Označme p_n počet možností, kterými lze daným způsobem schodiště o n schodech vyjít, a pro $n > 2$ rozložme všechny tyto možnosti do dvou disjunktních tříd podle toho, zda na první schod šlápneme nebo zda ho překročíme a šlápneme na druhý. V případě, že na první schod šlápneme, zůstává (n – 1) schodů, které lze vyjít p_{n-1} způsoby; překročí-li se první schod, zůstává (n – 2) schodů, které lze vyjít p_{n-2} způsoby. Pro $n > 2$ je tedy

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} ,$$

a protože $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, je posloupnost (p_n) posloupností Fibonacciho, takže platí $p_n = F_n$.

Počet možností, jak daným způsobem vyjít schodiště o *n* schodech, je roven *n*-tému členu Fibonacciho posloupnosti.

Předpokládejme nyní, že je dáno schodiště o ($n + m$) schodech, $n > 1$, $m > 1$ (viz obr. 5), které máme opět vyjít tak, že při každém kroku vynecháme nejvýše jeden schod. Podle předchozího je počet možností, jak toto schodiště uvedeným způsobem vyjít, roven Fibonacciho číslu F_{n+m}. Rozložme všechny tyto výstupy do dvou disjunktních tříd podle toho, zda na n-tý schod šlápneme nebo zda ho překročíme. Počet všech možných výstupů schodiště o ($m + n$) schodech je zřejmě

při šlápnutí na n-tý schod roven součinu $F_n F_m$,
při překročení n-tého schodu roven součinu $F_{n-1}F_{m-1}$.

Odtud dostáváme, že pro Fibonacciho čísla F_{n+m}, F_n, F_m , $n > 1$, $m > 1$, platí:

$$\boldsymbol{F_{n+m} = F_nF_m + F_{n-1}\, F_{m-1}.}$$

Z této rovnosti získáme pro Fibonacciho čísla zajímavé vztahy.

Položíme-li v ní $m = n$, dostaneme $F_{2n} = F^2_n + F^2_{n-1}$, neboli:

Součet druhých mocnin dvou sousedních členů Fibonacciho posloupnosti je opět číslo Fibonacciho.

Položíme-li v ní $m = n + 1$, dostaneme: $F_{2n+1} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) =$
$= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}) = F^2_{n+1} - F^2_{n-1}$, což znamená, že platí:

Rozdíl $F^2_{n+1} - F^2_{n-1}$ druhých mocnin členů Fibonacciho posloupnosti, které sousedí s číslem F_n, je Fibonacciho číslo.

Permutace s opakováním a rozmisťování nerozlišitelných předmětů do přihrádek

Připomeňme si nejprve, že pro počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$–krát, platí:

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)! \,/\, k_1!k_2! \ldots k_n!$$

Pomocí tohoto výsledku určíme počet způsobů, kterými se do r přihrádek dá rozmístit n nerozlišitelných předmětů.

Předpokládejme nejprve, že některé přihrádky mohou být prázdné. Na obr. 6 jsou některá tato rozmístění znázorněna, a to pro $n = 6$ nerozlišitelných předmětů (znázorněných kroužky) a pro r = 4 přihrádky, které jsou realizovány r – 1 = 3 přepážkami (znázorněných svislými čárkami). Všimněme si, že každé takovéto schéma představuje permutaci s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden (kroužky) se opakuje n-krát a druhý (svislé čárky) (r – 1)-krát. Protože také naopak každé z těchto permutací odpovídá právě jedno takové schéma, platí:

Počet způsobů rozmístění *n* nerozlišitelných předmětů do *r* přihrádek, z nichž některé mohou být prázdné, je roven $P'(n, r - 1) = (n + r - 1)! \,/\, n!(r - 1)!$

Nemá-li žádná přihrádka zůstat prázdná, vložíme do každé z r přihrádek právě jeden předmět a zbývajících $n - r$ rozmístíme do r přihrádek zcela libovolně.

Počet způsobů rozmístění n nerozlišitelných předmětů do r přihrádek tak, aby v každé byl aspoň jeden, je roven $P'(n-r, r-1) = (n-1)! \,/\, n-r)!(r-1)!$

Kombinace s nesousedními členy

K tomu, abychom ukázali souvislost Fibonacciho čísel s čísly kombinačními, je dále nutné, abychom se seznámili s kombinacemi, kterým budeme říkat **kombinace s nesousedními členy**.

Představme si, že je dána n-prvková množina a mysleme si, že její prvky jsou očíslovány čísly 1, 2, 3, .., n; **k-člennou kombinací s nesousedními členy z těchto n prvků budeme rozumět takovou k-prvkovou podmnožinu dané množiny, jejíž každé dva prvky jsou označeny čísly, která se liší aspoň o dvě.** Jejich počet budeme značit $K_{nes}(k, n)$.

Pro ilustraci určíme výčtem všechny dvojčlenné, resp. tříčlenné kombinace s nesousedními členy z pěti, resp. ze sedmi prvků:

Pro $n = 5$, $k = 2$ … (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5) ……… $K_{nes}(2, 5) = 6$;

pro $n = 7$, $k = 3$ … (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 3, 7), (1, 4, 6), (1, 4, 7),
(1, 5, 7), (2, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 5, 7) …. $K_{nes}(3, 7) = 10$.

Určíme nyní obecný vzorec pro $K_{nes}(k, n)$. Každé k-členné kombinaci s nesousedními členy z n prvků přiřadíme uspořádanou n-tici tvořenou k svislými čárkami a $(n-k)$ stejnými kroužky tak, že svislé čárky budou na místech prvků, které k-členná kombinace obsahuje, a kroužky na místech prvků, které neobsahuje. K ilustraci tohoto postupu použijeme výše uvedeného výčtu kombinací pro $n = 7$, $k = 3$:

kombinaci (2, 4, 7) přiřadíme uspořádanou sedmici (o / o / o o /),
kombinaci (1, 4, 6) přiřadíme uspořádanou sedmici (/ o o / o / o),
kombinaci (3, 5, 7) přiřadíme uspořádanou sedmici (o o / o / o /).

Všimněte si, že v žádné takovéto uspořádané n-tici tvořené k svislými čárkami a $(n-k)$ kroužky nejsou vedle sebe dvě svislé čárky – jinak by příslušná kombinace obsahovala dvě „sousední“ čísla. Je vidět, že každé takovéto schéma představuje rozmístění $(n-k)$ nerozlišitelných předmětů (kroužků) do $(k+1)$ přihrádek tak, že žádná vnitřní přihrádka není prázdná. Tato rozmístění získáme tak, že do všech vnitřních přihrádek, kterých je $(k-1)$, vložíme právě jeden předmět a ty zbývající, kterých je $(n-k)-(k-1) = (n-2k+1)$, rozmístíme do $(k+1)$ přihrádek libovolně. Jak už víme, počet těchto rozmístění je

$$P'(n-2k+1, k) = (n-k+1)! \,/\, (n-2k+1)!k!$$

Vyjádříme-li ještě tento zlomek ve tvaru kombinačního čísla, dostáváme tento výsledek:

Pro počet $K_{nes}(n, k)$ k-členných kombinací s nesousedními členy z n prvků platí

$$K_{nes}(n, k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

Kombinační čísla a čísla Fibonacciho

Vraťme se nyní ke schodišti o n schodech, po němž půjdeme opět tak, že při každém kroku vynecháme nejvýše jeden schod; jak jsme zjistili výše, je počet možných výstupů roven Fibonacciho číslu F_n. Rozložme všechny tyto způsoby disjunktních tříd podle toho, kolik schodů při výstupu vynecháme; uvědomte si však, že nelze vynechat poslední schod ani žádnou dvojici schodů sousedních! Máme tedy tyto možnosti:

Počet vynechaných schodů		Počet možných způsobů výstupu
žádný	…………	$1 = \binom{n}{0}$

právě jeden .... $n - 1 = \binom{n-1}{1}$ …(poslední vynechat nelze)

právě dva (nesousední) .... $\binom{(n-1)-2+1}{2} = \binom{n-2}{2}$

právě tři (žádné dva nesousední) …. $\binom{(n-1)-3+1}{3} = \binom{n-3}{3}$

právě čtyři (žádné dva nesousední) … $\binom{(n-1)-4+1}{4} = \binom{n-4}{4}$

………………. ………….

Protože celkový počet výstupů je roven Fibonacciho číslu F_n, platí:

$$\boldsymbol{F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \ldots}$$

Poznámka. Uvědomte si, že v součtu na pravé straně poslední rovnosti se všichni sčítanci počínaje kombinačním číslem $\binom{n}{k}$, v němž je $k > n$, rovnají nule.

Uvedený vztah mezi kombinačními čísly a čísly Fibonacciho se objevuje i v Pascalově trojúhelníku, který je – poněkud v netradiční podobě – znázorněn na obr. 7; jednotlivá Fibonacciho čísla dostaneme jako součet kombinačních čísel v šikmých řádcích.

Posloupnosti z nul a jedniček

S výstupy po schodišti úzce souvisí úloha, která požaduje určit počet n-členných posloupností sestavených z nul a jedniček, ve kterých žádné dvě jedničky nestojí vedle sebe.

Všechny tyto n-členné posloupnosti rozložíme do disjunktních tříd podle toho, kolik jedniček obsahují:

Počet jedniček v n-členné posloupnosti		Počet možných posloupností
žádná	…..	$1 = \binom{n+1}{0}$
právě jedna	…..	$n = \binom{n}{1}$
právě dvě (nesousední)	…..	$\binom{n-2+1}{2} = \binom{n-1}{2}$
právě tři (žádné dvě sousední)	…..	$\binom{n-3+1}{3} = \binom{n-2}{3}$

………………………………

Celkový počet těchto posloupností je tedy roven součtu $\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \ldots$.. o kterém už víme, že je roven číslu F_{n+1}.

Počet n-členných posloupností sestavených z nul a jedniček, ve kterých žádné dvě jedničky nestojí vedle sebe, je roven číslu F_{n+1}.

Vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti

Nejprve dokážeme následující větu, která nám umožní vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti určit:

V posloupnosti (a_n) určené prvními dvěma členy a_1, a_2 a rekurentním vzorcem

$$a_{n+2} + k_1 a_{n+1} + k_2 a_n = 0, \text{ kde } k_1, k_2 \text{ jsou reálná čísla, } k_2 \neq 0,$$

platí pro n-tý člen

$$a_n = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1},$$

kde x_1, x_2 jsou různé kořeny charakteristické rovnice $x^2 + k_1 x + k_2 = 0$ a c_1, c_2 jsou konstanty určené počátečními podmínkami posloupnosti (a_n).

Dokážeme nejprve, že člen $a_n = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-2}$ vyhovuje rekurentnímu vzorci dané posloupnosti; dosazením do levé strany tohoto rekurentního vzorce dostaneme:

$$(c_1 x_1^{n+1} + c_2 x_2^{n+1}) + k_1(c_1 x_1^{n} + c_2 x_2^{n}) + k_2(c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1}) =$$
$$= (c_1 x_1^{n+1} + c_2 x_2^{n+1}) + c_1 x_1^{n-1}(k_1 x_1 + k_2) + c_2 x_2^{n-1}(k_1 x_2 + k_2);$$

vzhledem k tomu, že x_1, x_2 jsou kořeny charakteristické rovnice, platí

$$k_1x_1 + k_2 = -x_1^2,\ \ k_1x_2 + k_2 = -x_2^2,$$

takže

$$(c_1x_1^{n+1} + c_2x_2^{n+1}) + c_1x_1^{n-1}.(-x_1^2) + c_2x_2^{n-1}.(-x_2^2) = 0.$$

Zbývá dokázat, že konstanty c_1, c_2 jsou jednoznačně určeny počátečními podmínkami a_1, a_2; tento požadavek plyne z toho, že soustava rovnic

$$a_1 = c_1 + c_2$$
$$a_2 = c_1x_1 + c_2x_2$$

s neznámými c_1, c_2 má – vzhledem k tomu, že $x_1 \neq x_2$ – jediné řešení. Přesvědčíte se o tom jistě sami.

Na základě této věty odvodíme vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, která je dána rekurentním vzorcem $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ a počátečními podmínkami $F_1 = 1, F_2 = 2$.
Protože charakteristická rovnice $x^2 - x - 1 = 0$ má různé kořeny

$$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2,\ \ x_2 = (1 - \sqrt{5})/2,$$

platí pro n-tý člen

$$F_n = c_1[(1 + \sqrt{5})/2]^{n-1} + c_2[(1 + \sqrt{5})/2]^{n-1}.$$

Ze soustavy rovnic

$$1 = c_1 + c_2$$
$$2 = c_1(1 + \sqrt{5})/2 + c_2(1 - \sqrt{5})/2$$

vypočteme neznámé c_1, c_2 a dostaneme:

Pro n-tý člen F_n Fibonacciho posloupnosti (s prvními dvěma členy $F_1 = 1, F_2 = 2$) platí:

$$\mathbf{F_n = \left([(1 + \sqrt{5})/2]^{n+1} - [(1 - \sqrt{5})/2]^{n+1}\right)/\sqrt{5}\,.}$$

Poznámka. Protože všechny členy Fibonacciho posloupnosti jsou přirozená čísla, je pro každé přirozené číslo n výraz určující n-tý člen posloupnosti Fibonacciho přirozené číslo, i když se v tomto výrazu vyskytují iracionální odmocniny z pěti.

Vzorec pro n-tý člen posloupnosti Fibonacciho použijeme k určení limity posloupnosti

$$2/1,\ 3/2,\ 5/3,\ 8/5,\ 13/8,\ \ldots,\ F_{n+1}/F_n,\ \ldots$$

Označíme-li

$$a = (1 + \sqrt{5})/2,\ \ b = (1 - \sqrt{5})/2,$$

pro hledanou limitu platí:

$$\lim F_{n+1}/F_n = \lim (a^{n+2} - b^{n+2})/(a^{n+1} - b^{n+1}) =$$
$$= \lim [a - (b/a)^{n+1}.b]/[1 - (b/a)^{n+1}] = a,$$

protože $|b/a| < 1$, takže $\lim(b/a)^{n+1} = 0$.

Zjistili jsme tak:
Limita posloupnosti 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8,…, F_{n+1}/F_n …. je rovna číslu $(1 + \sqrt{5})/2$.
Čím je toto číslo zajímavé, zjistíte hned v následujícím odstavci.

Fibonacciho posloupnost, zlatý řez a zlaté číslo

Rozdělit danou úsečku zlatým řezem znamená rozdělit ji na dvě části tak, aby poměr délky celé úsečky k délce její větší části byl stejný jako poměr délky této větší části k délce části menší. Je-li zlatým řezem rozdělena jednotková úsečka, jejíž větší část má délku x, platí:

$$1/x = x/(1 - x)\ \text{ neboli }\ x^2 + x - 1 = 0.$$

Této rovnici – vzhledem k tomu, že x je kladné – vyhovuje pouze kořen $x = (-1 + \sqrt{5})/2$, odkud dostaneme:

$$1/x = 2/(-1 + \sqrt{5}) = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Tento poměr $1/x = x/(1 - x)$, který je roven číslu $(1 + \sqrt{5})/2$, se nazývá **zlaté číslo**.

Na obr. 8 je bod X dělící jednotkovou úsečku AB v poměru zlatého sestrojen touto konstrukcí: Na kolmici k přímce AB v bodě B je sestrojen bod C tak, že $|BC| = 1/2$; kružnice se středem v bodě C o poloměru $|BC|$ protne úsečku AC v bodě D a kružnice se středem v bodě A o poloměru $|AD|$ protne úsečku AB v bodě X, pro který platí $|AB|/|AX| = (1 + \sqrt{5})/2$. Přesvědčíme se o tom snadno:

$x = |AX| = |AD| = |AC| - |DC| = \sqrt{(1 + 1/4)} - 1/2 = (\sqrt{5} - 1)/2$, takže vskutku

$$1/x = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Ukážeme si ještě, že zlaté číslo, tj. číslo $(1 + \sqrt{5})/2$, je limitou posloupnosti

$$(a_n): \sqrt{1}.\ \sqrt{(1+\sqrt{1})},\ \sqrt{(1+\sqrt{(1+\sqrt{1})})},\ \dots$$

Tato posloupnost je rostoucí, neboť pro všechna přirozená čísla n je $a_{n+1} > a_n$; dokážeme-li, že je shora omezená, potom podle známé věty o monotónní posloupnosti bude mít limitu.

Uvědomme si nejprve, že pro všechna $n \geq 2$ je $a_n^2 = 1 + a_{n-1}$ neboli $a_n^2 - a_{n-1} - 1 = 0$. Vzhledem k tomu, že $a_n > a_{n-1} > 0$, platí

$$a^2_{n-1} - a_{n-1} - 1 < 0.$$

Vyjádříme-li výraz na levé straně známým způsobem jako součin, dostaneme

$$[a_{n-1} - (1 + \sqrt{5})/2]\ [a_{n-1} - (1 - \sqrt{5})/2] < 0.$$

Protože v tomto součinu je výraz ve druhé závorce pro všechna a_{n-1} kladný, dostáváme odtud, že pro všechna $n \geq 2$ platí

$$a_{n-1} < (1 + \sqrt{5})/2.$$

Tato nerovnost znamená, že posloupnost (a_n) je shora omezená, a protože je rostoucí, má vlastní limitu.

Označme $A = \lim a_n$ a vezměme v úvahu, že je rovněž $\lim a_{n-1} = A$ a dále $\lim a_n^2 = A^2$; ze vztahu $a_n^2 - a_n - 1 = 0$ vyplývá, že je také

$$\lim (a_n^2 - a_n - 1) = 0, \text{ neboli } A^2 - A - 1 = 0.$$

Vzhledem k tomu, že A je kladné číslo, má tato rovnice jediný kořen, a to

$$A = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Tím je limita posloupnosti (a_n) nalezena: je to číslo $(1 + \sqrt{5})/2$.

Posloupnost posledních číslic členů Fibonacciho posloupnosti

Utvoříme-li z Fibonacciho posloupnosti posloupnost posledních číslic jejích členů, dostaneme posloupnost

$$(f_n):\ 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, \dots.$$

Na tuto posloupnost se můžeme dívat jako na posloupnost s prvním členem $f_1 = 1$, s druhým členem $f_2 = 2$ a jejíž každý další člen je roven „součtu“ předchozích dvou; slovo „součtu“ je v uvozovkách, protože nebudeme sčítat obvyklým způsobem, ale takto:

je-li $a + b < 10$, je "součet" těchto dvou čísel roven $a + b$;

je-li $a + b \geq 10$, je „součet“ těchto dvou čísel roven $a + b - 10$.

Abychom toto nové sčítání odlišili od obvyklého, budeme místo + používat * ; je tedy např.

$$2*3 = 5,\ 3*5 = 8,\ 5*8 = 3,\ 8*3 = 1,\ 3*7 = 0.$$

V posloupnosti (f_n) tedy pro všechna n platí: $f_n * f_{n+1} = f_{n+2}$; znamená to, že v této posloupnosti každá dvojice sousedních členů určuje všechny členy následující.

Této vlastnosti využijeme k tomu, abychom dokázali, že posloupnost (f_n) je periodická; stačí zřejmě ukázat, že v ní jsou dvě stejné dvojice sousedních členů.

Vezměme prvních 101 členů posloupnosti (f_n) a z jejích sousedních členů utvořme 100 dvojic:

$$(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), (8, 3), (3, 1), (1, 4), \dots$$

Mezi těmito dvojicemi není dvojice (0,0) – jinak by všechny členy posloupnosti (f_n) byly rovny nule. Je však zřejmé, že všech možných dvojic (a, b) sestavených z čísel 0, 1, 2, …, 9 a různých od dvojice (0,0) je pouze 99; znamená to, že mezi stem dvojic sestavených ze sousedních členů posloupnosti (f_n) jsou aspoň dvě stejné. Posloupnost (f_n) je tedy periodická. uvedená úvaha sice zaručuje, že tato perioda obsahuje nejvýše 99 čísel, ale přesný počet podle ní nezjistíme. Víme-li však, že jich je nejvýše 99, nedá velkou práci je vypsat a zjistit, od kterého místa se členy posloupnosti (f_n) opakují: Tímto způsobem se můžete přesvědčit, že to nastane od 61. místa, neboť je $f_{61} = 1 = f_1$, $f_{62} = 2 = f_2$.

V další části tohoto textu se budeme (konečně!) zabývat tím, jak souvisejí členy Fibonacciho posloupnosti s číslem π. K tomu však potřebujeme znát ještě následující dvě vlastnosti zmíněné posloupnosti.

(1) **Pro všechna přirozená čísla n platí: $F^2_{n+1} = F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1}$.**

Větu dokážeme indukcí:

a) pro $n = 1$ věta platí, neboť: $F^2_2 = 4$, $F_1F_3 + (-1)^2 = 4$;

b) ukážeme, že z platnosti této věty pro n plyne její platnost i pro $n + 1$, tj. že platí:

$$F^2_{n+2} = F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+2}.$$

K oběma stranám rovnosti

$$F^2_{n+1} = F_nF_{n+2} + (-1)^{n+1},$$

která podle předpokladu platí, přičteme součin $F_{n+1}F_{n+2}$ a postupnými úpravami dostaneme:

$$F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n+2}(F_n + F_{n+1}) + (-1)^{n+1},$$

$$F_{n+1}F_{n+3} = F^2_{n+2} + (-1)^{n+1},$$

$$F^2_{n+2} = F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+2},$$ což jsme chtěli dokázat.

.

(2) **Pro všechna přirozená čísla n platí: $F_{n+1}F_{n+2} = F_nF_{n+3} + (-1)^{n+1}$.**

Dokážeme, že rozdíl $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3}$ je roven $(-1)^{n+1}$. Úpravou tohoto rozdílu dostaneme:

$$F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = F_{n+1}F_{n+2} - F_n(F_{n+1} + F_{n+2}) = F_{n+1}(F_{n+2} - F_n) - F_nF_{n+2} = F^2_{n+1} - F_nF_{n+2};$$

podle (1) je tento rozdíl roven $(-1)^{n+1}$, čímž je důkaz (2) proveden.

Z rovnosti (2) vypočteme:

$$F_{n+3} = [F_{n+1}F_{n+2} + (-1)^{n+2}] / F_n = [F_{n+1}F_{n+2} + (-1)^{n+1}] / (F_{n+2} - F_{n+1})$$

a v získaném vztahu položíme $n = 2k$:

$$F_{2k+3} = (F_{2k+1}F_{2k+2} + 1) / (F_{2k+2} - F_{2k+1}).$$

Vysvětlíme si nyní, proč jsme tuto poslední úpravu prováděli.

Jak jistě víte, ke každé funkci, která je v určitém intervalu prostá, existuje v tomto intervalu funkce inverzní. Funkce cotg x je prostá v intervalu (0, π), takže k ní v tomto intervalu existuje funkce inverzní; nazývá se arkuskotangens a značí se arccotg. Její definiční obor je interval $(-\infty, \infty)$, oborem hodnot je interval $(0, \pi)$; její graf je na obr. 9. Pro naše účely je důležitý následující vztah, který platí pro všechna $x_2 > x_1$:

$$\operatorname{arccotg} x_1 - \operatorname{arccotg} x_2 = \operatorname{arccotg} (x_2 x_1 + 1)/(x_2 - x_1).$$

Položme nyní v této rovnosti $x_1 = F_{2k+1}$, $x_2 = F_{2k+2}$; podmínka $x_1 < x_2$ je splněna, takže platí:

$$\operatorname{arccotg} F_{2k+1} - \operatorname{arccotg} F_{2k+2} = \operatorname{arccotg} (F_{2k+2} F_{2k+1} + 1) / (F_{2k+2} - F_{2k+1});$$

protože však pravá strana této rovnosti je rovna $\operatorname{arccotg} F_{2k+3}$, platí pro všechna celá nezáporná čísla k:

$$\mathbf{arccotg}\ \boldsymbol{F_{2k+3}} = \mathbf{arccotg}\ \boldsymbol{F_{2k+1}} - \mathbf{arccotg}\ \boldsymbol{F_{2k+2}}.$$

V tomto vztahu položíme za k postupně čísla 0, 1, 2, ..., n, čímž vznikne $(n + 1)$ následujících rovností:

$$\begin{array}{lllll}
k = 0 & \ldots.. \operatorname{arccotg} F_3 & = \operatorname{arccotg} F_1 & - & \operatorname{arccotg} F_2 \\
k = 1 & \ldots.. \operatorname{arccotg} F_5 & = \operatorname{arccotg} F_3 & - & \operatorname{arccotg} F_4 \\
k = 2 & \ldots.. \operatorname{arccotg} F_7 & = \operatorname{arccotg} F_5 & - & \operatorname{arccotg} F_6 \\
\ldots.. & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...... & & & \\
k = n & \ldots.. \operatorname{arccotg} F_{2n+3} & = \operatorname{arccotg} F_{2n+1} & - & \operatorname{arccotg} F_{2n+2}.
\end{array}$$

Sečteme-li je, dostaneme:

$$\operatorname{arccotg} F_{2n+3} = \operatorname{arccotg} F_1 - (\operatorname{arccotg} F_2 + \operatorname{arccotg} F_4 + \operatorname{arccotg} F_6 + \ldots + \operatorname{arccotg} F_{2n+2}) =$$

$$= \pi/4 - \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arccotg} F_{2k},$$

neboť

$$\operatorname{arccotg} F_1 = \operatorname{arccotg} 1 = \pi/4.$$

Utvoříme-li nyní limitu pro n jdoucí do nekonečna výrazu na levé i pravé straně této rovnosti, vznikne rovnost

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{arccotg} F_{2n+3} = \pi/4 - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arccotg} F_{2k},$$

odkud s ohledem na to, že $\lim_{n \to \infty} \operatorname{arccotg} F_{2n+3} = 0$ a $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n+1} \operatorname{arccotg} F_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg} F_{2k}$,

.

dostáváme

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty}} \mathbf{arccotg}\ \boldsymbol{F_{2k}} = \mathbf{arccotg}\ \boldsymbol{F_2} + \mathbf{arccotg}\ \boldsymbol{F_4} + \mathbf{arccotg}\ \boldsymbol{F_6} + \ldots\ldots = \boldsymbol{\pi/4},$$

neboli

$$\boldsymbol{\pi/4} = \mathbf{arccotg\ 2 + arccotg\ 5 + arccotg\ 13 + arccotg\ 34 + \ldots\ldots,}$$

kde k-tým členem této nekonečné řady je arkuskotangens čísla, které je $2k$-tým členem Fibonacciho posloupnosti.

Získaný výsledek je nepochybně pozoruhodný; autor tohoto textu se domnívá – i když to s naprostou jistotou tvrdit nemůže – že Fibonacci ani Ludolf o souvislosti čísla π s čísly stojícími na sudých místech Fibonacciho posloupnosti neměli nejmenší tušení.

Úlohy

1. Dokažte, že platí: $F_1 + 2F_2 + 3F_3 + ... + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 3$.

2. Užitím vztahu $F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F^2_{n+1} - F^2_{n-1}$ dokažte, že platí:

   a) $F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + ... + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n-1}F_{2n+1} - 1$,
   b) $F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + ...+ F_{2n}F_{2n+1} = F^2_{2n+1} - 1$.

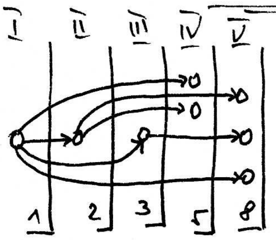
3. Dokažte, že každé dva členy Fibonacciho posloupnosti jsou čísla nesoudělná. (Odvoďte spor z předpokladu, že soudělná jsou.)

4. Dokažte matematickou indukcí, že pro všechna přirozená čísla n je výraz
$$\left([(1 + \sqrt{5})/2]^{n+1} - [(1 - \sqrt{5})/2]^{n+1}\right) / \sqrt{5}$$
přirozené číslo.

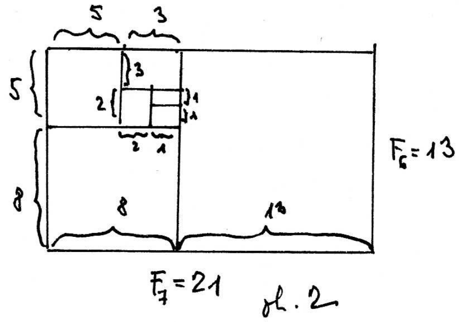
5. Užitím vzorce pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti dokažte, že platí:
$$F_3 + F_6 + F_9 + ... + F_{3n} = (F_{3n+2} - 2) /2.$$

Co Fibonacci ani Ludolf....

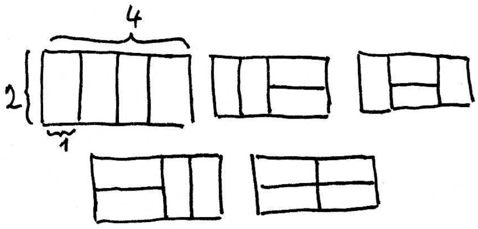
OBRÁZKY



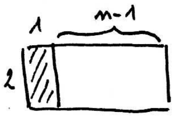
ob. 1



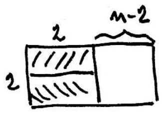
ob. 2



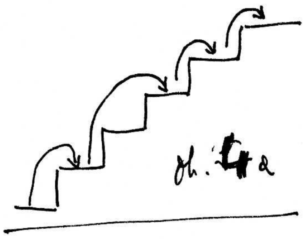
ob. 3



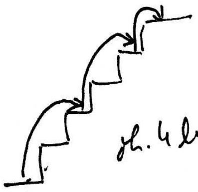
ob. 3a



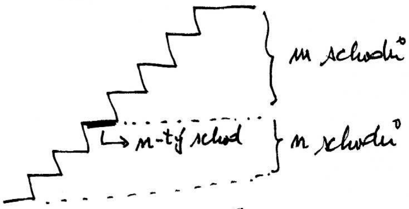
ob. 3b



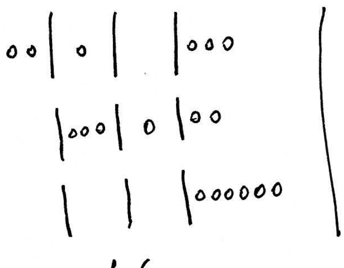
ob. 4a



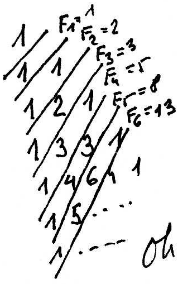
ob. 4b



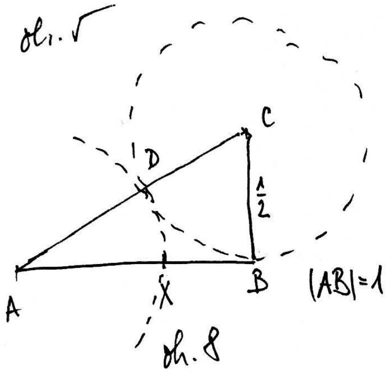
ob. 5



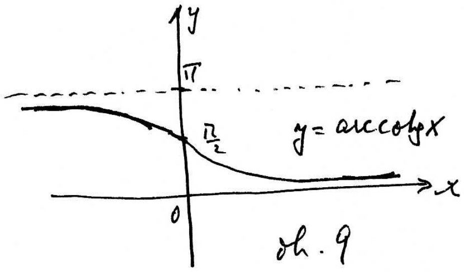
ob. 6



ob. 7



ob. 8



ob. 9