Komplexní čísla

prof. RNDr. Vlastimil Dlab, DrSc.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

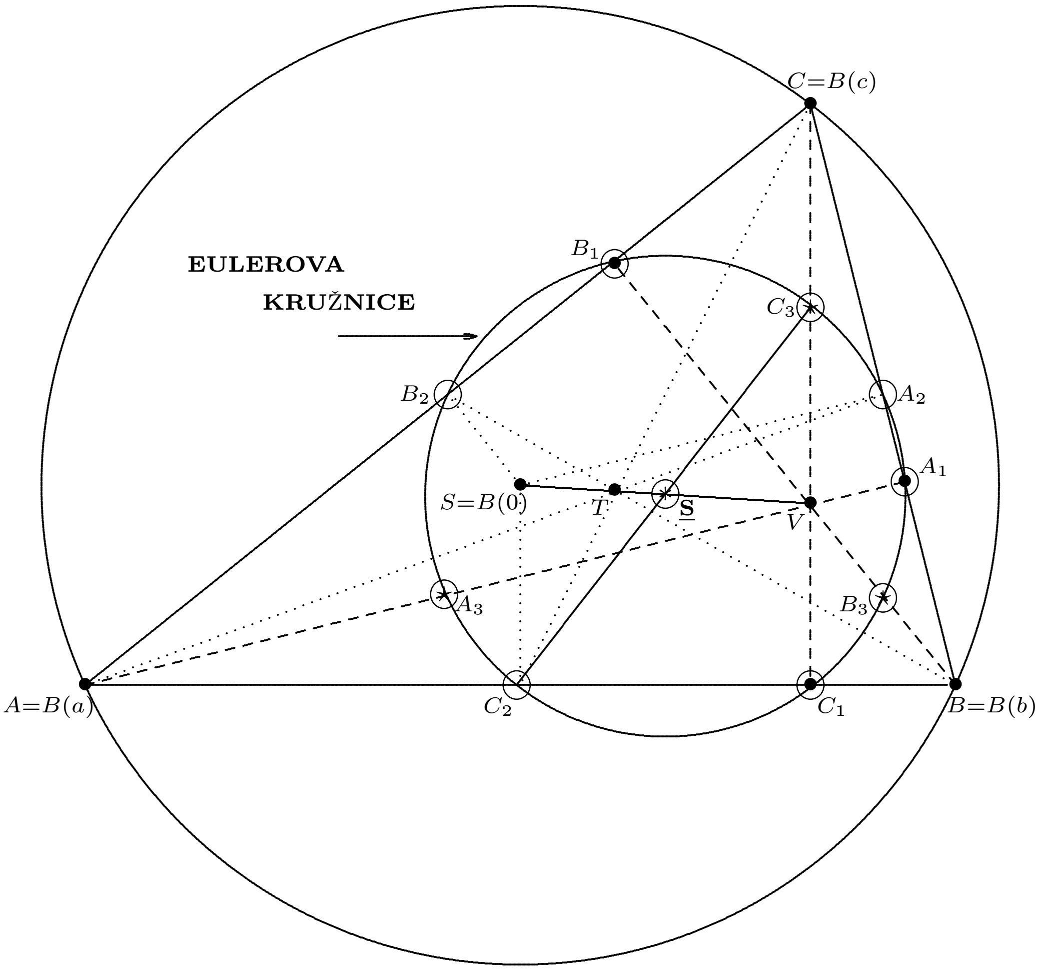
"3-hodinový úvod, či spíše "letmý pohled" do KOMPLEXNÍCH ČÍSEL"
Profesor Vlastimil Dlab, FRSC
(26. května 2010 na MFF KU, Praha)

Předmluva - vysvětlení. *Jelikož jsem byl týden před zahájením kurzu informován, že ne všichni posluchači-studenti znají pojem komplexního čísla, bylo nutné upravit a omezit obsah naší pracovní schůzky. Nicméně doufám, že se nám podaří vyplnit následující program. Přikládám narychlo sepsané poznámky.*

1. Číselné soubory $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$
2. Zrození komplexních čísel (kubické rovnice; Cardano, Bombelli)
3. Definice (dvojice reálných čísel, speciální 2x2 reálné matice či třídy reálných polynomů; Harriot, Girard, Euler, de Moivre, Gauss, Cauchy)
4. Gaussova rovina (Wallis, Argand);

aditivní a multiplikativní struktura komplexních čísel:
sčítání - translace, násobení - rotace a homotetie

5. Rovnostranný trojúhelník, obsah trojúhelníku, výpočet čísla π *à* la Machin, Napoleonova věta, Fermatův bod, Eulerova přímka a kružnice, konstrukce von Aubela



1. Trochu historie

Ačkoliv se sporadicky vyskytují zmínky o úlohách, které vedly k druhým odmocninám ze záporných čísel už před 16-tým stoletím (jedna taková epizoda vzpomíná **Herona z Alexandrie** v prvním století našeho letopočtu v souvislosti s výpočtem obsahu komolého jehlanu), počátky těchto **nových čísel** tak, jak je v současnosti známe, můžeme nalézt až v italské renezanci („Rinascimento“). V té době **italští algebraikové** pořádali soutěže v řešení algebraických rovnic, speciálně stupně 3 jako např.

$$(\star) \qquad x^3 = 15x + 4.$$

Giralomo Cardano (1501 - 1576) publikoval v roce 1547 ve spisu **Ars Magna** následující výsledek:

Rovnice $x^3 = px + q$ má řešení

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

[Ve skutečnosti řešení objevili nezávisle **Scipione del Ferro (1465 - 1526)** a **Nicolo Fontana,** nazývaný **Tartaglia (1500 - 1557)**. Cardano ho získal od Fontany pod slibem mlčenlivosti.]

Tento vzorec dobře funguje, pokud ho použijeme např. pro rovnici $x^3 = 36x + 91$ [**VYPOČÍTEJTE KOŘENY!**] Nicméně v případě rovnice ($\star$) dává jen „formální“ výraz - řešení

$$\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Geniální **Rafaël Bombelli (1526 - 1572)** dokázal ve své **Algebře (1572)**, že systematickým použitím zákonů algebry lze s těmito **„imaginárními“** čísly pracovat, přestože obsahovaly symbol $\sqrt{-1}$, a ukázal, že $\alpha = 4$. Rozeznával totiž „symboly“ $+\sqrt{-1}$ a $-\sqrt{-1}$ a pracoval s nimi stejným způsobem, jako dnes pracujeme se symboly $+i$ a $-i$ ($i^2 = (-i)^2 = -1, (-i)i = 1$), zavedenými později **Leonhardem Eulerem (1707 - 1783)**. Tím se se vyhnul (dodnes tak stále uváděnému naprosto nesmyslnému) „nebezpečí“ $-1 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Bombelli ukázal, v dnešním značení, že

$$(2+i)^3 = 2 + 11i, \quad (2-i)^3 = 2 - 11i, \quad (11i)^2 = -121,$$

a tak stačil už jen malý krůček k výpočtu $\alpha = 4$. Zbývající dva kořeny β a γ rovnice ($\star$) snadno určíme jako kořeny kvadratické rovnice $x^2 + 4x + 1 = 0$, totiž $\beta = -2 + \sqrt{3}$ a $\gamma = -2 - \sqrt{3}$. Poznamenejme, že v 16. století nebyla tato dvě záporná čísla považována za řešení. Odpor nejen k „imaginárním“, ale i k záporným číslům, a akademická nevraživost byly na bíledni (viz např. útok Paolo Bonasoniho v knize „Algebra Geometrica“ (1575) na Bombelliho, že má halucinace, když tvrdí, že odčítání je možné ve všech případech: rovnice $(10 - x)^2 = 9x$ má pouze jeden kořen $x = 4$; $x = 25$ nemůže být kořenem, neboť je „nemožné odečíst 25 od 10“). Teprve **Harriot (1560 - 1621)** a **Girard (1595 - 1632)** běžně počítali se zápornými a komplexními čísly.

Poznámka. Význam oboru (tělesa) komplexních čísel pro algebru spočívá především v tzv. **„ZÁKLADNÍ VĚTĚ ALGEBRY“**:

Každý komplexní nekonstatní polynom má komplexní kořen.

Ta měla, počínaje **Jean Le Rond d'Alambertem (1717 - 1783)**, v následujících staletích řadu (často neúplných) důkazů. Dnes je nepochybných důkazů této věty celá řada; prvý takový patří **Jean Robert Argandovi (1768 - 1822)**.

========================

Historická poznámka

V dopise Huygensovi (v létech 1674-1675) uvádí Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) "překvapující" vztah

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}.$$

Poznamenejme, že $\sqrt{6}$ je jedna z možných hodnot připsaných tomuto vztahu, neboť z algebraického hlediska $\sqrt{1+\sqrt{3}i}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$ a $\sqrt{1-\sqrt{3}i}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$. V této poznámce se podržíme všeobecné dohody, že v podobných situacích vlivem definice reálné funkce $\sqrt{x}$ pro $x\geq 0$, budeme připisovat takovým výrazům jednu určitou hodnotu.

Je otázkou, zda si Leibniz byl vědom, že jeho výraz je speciálním případem výrazu

$$\sqrt{a+\sqrt{-b}}+\sqrt{a-\sqrt{-b}}=\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b})},$$

kde $a\geq 0$ a $b\geq 0$ jsou reálná čísla. Formulujme příslušné tvrzení takto.

Věta. *Nechť $0<a<c$ jsou reálná čísla. Potom*

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-c^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-c^2}}=\sqrt{2(a+c)}.$$

Poznámka. Leibnizovu rovnost tedy dostáváme pro $a=1, c=2$. Pro $a=1, c=3$ dostáváme $\sqrt{1+\sqrt{-8}}+\sqrt{1-\sqrt{-8}}=\sqrt{8}$ a pro $a=2, c=16$ rovnost $\sqrt{2+6\sqrt{-7}}+\sqrt{2-6\sqrt{-7}}=6$.

Důkaz věty. Položme $\sqrt{a+\sqrt{a^2-c^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-c^2}}=A$. Umocněním ihned dostáváme

$$2a+\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{a^2-c^2}+2\sqrt{a^2-a^2+c^2}=A^2,\quad \text{tj. } A^2=2(a+c).$$

Komplexné čísla byla užívána dlouho bez formální definice (a často bez plného porozumění).**Harriot, Girard, Euler, Gauss, a další** operovali s čísly tvaru $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ s použitím symbolu i s předpisem ($i^2 = -1$) zavedeným **Leonhardem Eulerem (1707 - 1783)** (kde a je **reálná složka** a b **imaginární složka**) a s pravidly Bombelliho.

Formálně zavedl tato čísla (a) **William Rowen Hamilton (1805 - 1865)**: jako dvojice (a, b) reálných čísel: $\mathbf{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ se
sčítáním $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ a
násobením $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$;

a

(b) **Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)**: $\mathbf{C} \simeq \frac{\mathbf{R}}{\langle x^2+1\rangle}$

Poznámka. V literatuře můžeme nalézt zavedení komplexních čísel též jako 2×2 reálné matice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ s obvyklým maticovým sčítáním a násobením.

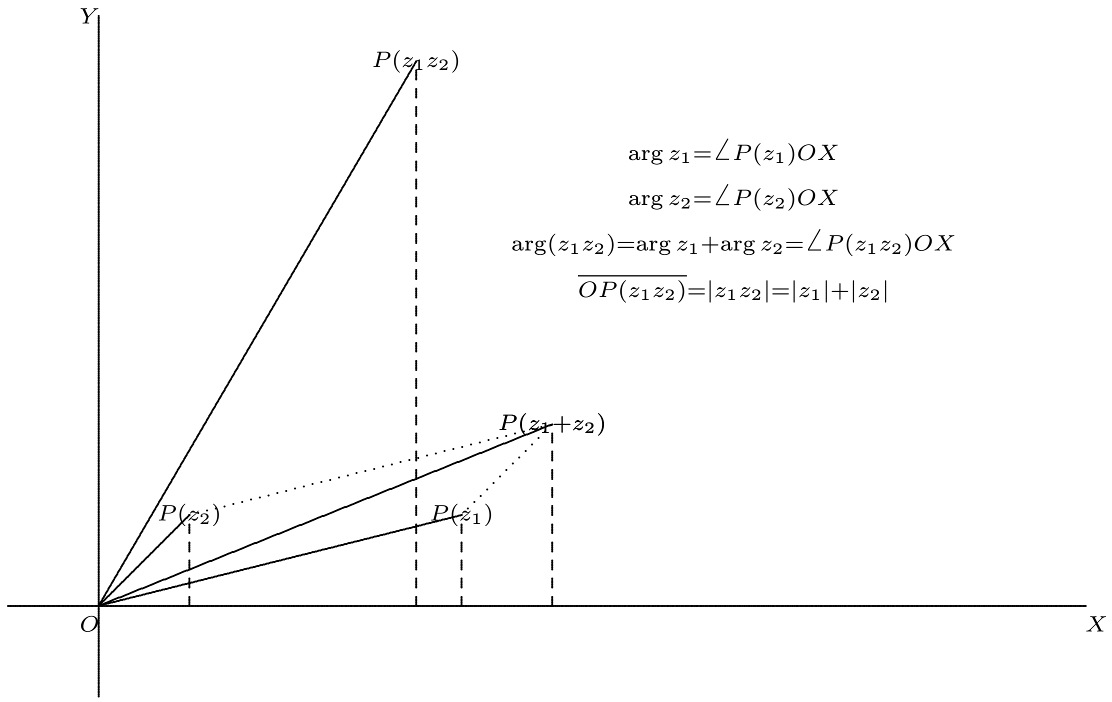
REÁLNÁ ČÍSLA ztotožníme s podmnožinou dvojic $(a, 0)$, zbytkových tříd $\bar{a}$ či matic $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

1. GEOMETRICKÁ REPREZENTACE (naznačená **Wallisem (1616 - 1703)**, vypracovaná **Jeanem Robertem Argandem (1768 - 1822)** a rozvinutá **Karlem Friedrichem Gaussem (1777 - 1855).**

Komplexní čísla lze ztotožnit s body reálné roviny (s ortonormální bazí), přičemž reálná čísla odpovídají bodům na ose x. Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání příslušných bodů (= vektorů). Argand popsal též součin pomocí polárních souřadnic: Součin dvou komplexních čísel, která odpovídají bodům s polárními souřadnicemi (r_1, α_1) a (r_2, α_2), odpovídá bodu s polárními souřadnicemi $(r_1 r_2, \alpha_1 + \alpha_2)$. Zde je

$(0, 0) \neq (a, b) \longleftrightarrow (r, \alpha)$, kde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ a $\sin\alpha = \frac{b}{r}$

$(0, ?) \neq (r, \alpha) \longleftrightarrow (a, b)$, kde $a = r\cos\alpha$ a $b = r\sin\alpha$.



Ke každému komplexnímu číslu $z = a + bi$ přísluší **komplexně sdružené** číslo $\overline{z} = a - bi$. Zřejmě $z\overline{z}$ je reálné číslo ≥ 0, které je rovno 0 právě když $z = 0$. Jeho odmocnina $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ se nazývá **modulus** nebo **absolutní hodnota** $|z|$ čísla z. Úhel α $(0 \leq \alpha < 2\pi)$, pro který $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ a $\sin\alpha = \frac{b}{r}$, se nazývá **argument** z (a značí se $\alpha = \ arg\, z$).

Definujme nyní zobrazení $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ vztahem $g(z) = \overline{z}$. Potom g je **automorfismus** tělesa $\mathbf{C}$, tj.

$$g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2) \quad \text{a} \quad g(z_1z_2) = g(z_1)g(z_2).$$

CVIČENÍ:

Inverzní prvek k číslu $z = a + bi \neq 0$ je $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$.

VĚTA (Včetně trojúhelníkové nerovnosti). *Nechť z a z' jsou komplexní čísla. Potom platí:*
(i) *$z = \overline{z}$ právě tehdy, když z je reálné; ekvivalentně kdyť z^2 je nezáporné reálné číslo.*
(ii) *$z = -\overline{z}$ právě tehdy, kdyť z je ryze imaginární; ekvivalentně když z^2 je nekladné reálné číslo.*
(iii) *$\overline{z}z'$ je reálné právě tehdy, kdyť $z = 0$ nebo $z' = tz$ pro reálné číslo t.*
(iv) *$|z + z'| \leq |z| + |z'|$, přičemž rovnost platí právě tehdy, když $\overline{z}z'$ je reálné.*

Důkaz.(i) a (ii) plynou přímo. K důkazu (iii) uvažujme $z = a + bi$ a $z' = a' + b'i$. Potom $(a - bi)(a' + b'i) = aa' + bb' + (ab' - a'b)i$. Je-li $\overline{z}z'$ reálné, potom $ab' = a'b$, tj. $b'z = bz'$. Předpokládejme, že $z \neq 0$. Jestliže $b \neq 0$, vezmeme $t = \frac{b'}{b}$. V opačném případě jsou z i z' reálná. Opačná část tvrzení je zřejmá.

K důkazu (iv) si stačí uvědomit následující: z (ii) vyplývá, že $\overline{z}z' - z\overline{z'}$ je ryze imaginární. Proto je druhá mocnina reálná a nekladná, tedy $(\overline{z}z' - z\overline{z'})^2 \leq 0$. Odtud plyne, že $(\overline{z}z')^2 + (z\overline{z'})^2 \leq 2zz'\overline{z}\overline{z'}$, tedy $(\overline{z}z' + z\overline{z'})^2 \leq 4zz'\overline{zz'}$. Toto již implikuje nerovnost $z\overline{z} + z'\overline{z'} + \overline{z}z' + z\overline{z'} \leq z\overline{z} + z'\overline{z'} + 2\sqrt{zz'\overline{zz'}}$, a tedy i

$$\sqrt{(z+z')\overline{(z+z')}} \leq \sqrt{z\overline{z}} + \sqrt{z'\overline{z'}},$$

čímž je tvrzení dokázáno.

VĚTA. *Nechť* $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. *Potom platí*

$$(a^2+b^2)\,(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

Důkaz. Rovnost $|z|^2\,|z'|^2 = |zz'|^2$ zapíšeme v algebraickém tvaru.

2. GONIOMETRICKÝ (TRIGONOMETRICKÝ) TVAR

Každé komplexní číslo z lze zapsat ve tvaru

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

kde $r = |z|$ je modulus z and α je úhel takový, ľe $\alpha = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (tento vztah označíme $\alpha = \arg z[2\pi]$; obecně zápis $\alpha = \alpha'[2k\pi]$ znamená, že $\alpha - \alpha' = 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbf{Z}$).

PŘÍKLADY. Goniometrický tvar čísla $-1 + i\sqrt{3}$ je $2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$, ale také např. $2(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3})$. Uvědomte si, že $\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}})$ je goniometrický tvar $2+i$. Goniometrický tvar čísla $-2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ je $2((\cos(\alpha+\pi) + i\sin(\alpha+\pi))$. Je-li $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, potom goniometrický tvar čísla $\frac{1}{z}$ je $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$.

VĚTA. *Nechť* $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *a* $z' = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$. *Potom*
$zz' = rr'(\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha'))$
Jestliže $z \neq 0$, *potom* $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha-\alpha') + i\sin(\alpha-\alpha'))$.

DŮSLEDEK. Pro libovolná dvě komplexní čísla z a z' ($z \neq 0$, $z' \neq 0$, je-li třeba) platí:

SOUČIN	$\lvert z \times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = (\arg z + \arg z')[2\pi]$
MOCNINA	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n, n \in \mathbf{N}$	$\arg(z^n) = n\arg z[2\pi]$
INVERZNÍ PRVEK	$\lvert\frac{1}{z}\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg(\frac{1}{z}) = -\arg z[2\pi]$
PODÍL	$\lvert\frac{z}{z'}\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg(\frac{z}{z'}) = (\arg z - \arg z')[2\pi]$
KOMPL. SDRUŽ.	$\lvert\overline{z}\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(\overline{z}) = -\arg z[2\pi]$
OPAČNÝ PRVEK	$\lvert -z\rvert = \lvert z\rvert$	$\arg(-z) = \pi + \arg z[2\pi]$

PŘÍKLAD. Vypočítejte $(1+i\sqrt{3})^5$. Goniometrický tvar čísla $z = 1 + i\sqrt{3}$ je $z = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, a tedy $\arg z = \frac{\pi}{3}$. Modulus čísla z^5 je 32 a argument je $\frac{5\pi}{3}$. Odtud

$$(1+i\sqrt{3})^5 = 32(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 16(1 - i\sqrt{3}).$$

3. EXPONENCIÁLNÍ TVAR

DEFINICE. *Pro reálné α definujeme*

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

a $z = re^{i\alpha}$ nazýváme exponenciální tvar komplexního čísla $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

PŘÍKLADY. $e^{i0} = 1$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $(1-i)^8 = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^8 = (\sqrt{2})^8 e^{-8i\frac{\pi}{4}} = 16$.

CVIČENÍ:

VĚTA (Moivreova věta a Eulerovy tvary). *Pro libovolné reálné α a libovolné celé n platí*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) \quad a \quad (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) - i\sin(n\alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad a \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

PŘÍKLAD. Vypočítejte $(\sqrt{3} - i)^7$.

$$(\sqrt{3} - i)^7 = [2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2})\,i)]^7 = 2^7\,(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,(\sin\frac{11\pi}{6})^7 = 2^7\,(\cos\frac{77\pi}{6} + i\sin\frac{77\pi}{6}) =$$

$$128\,(\cos\frac{5\pi}{6} + i\ \sin\frac{5\pi}{6}) = 64\,(-\sqrt{3} + i).$$

4. n-té ODMOCNINY Z KOMPLEXNÍHO ČÍSLA - ODMOCNINY Z JEDNÉ

VĚTA. *Nechť n je libovolné přirozené číslo. Potom každé nenulové komplexní číslo $z = re^{i\alpha}$ má n různých n-tých odmocnin*

$$\sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}} \quad pro \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Důkaz. Kořeny lze zřejmě zapsat ve tvaru $\sqrt[n]{r}\ (\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n})$, kde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, což plyne z Moivreovy věty.

DŮSLEDEK. *Pro libovolné přirozené číslo n existuje n různých n-tých odmocnin z jedné:*

$$\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad pro \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Označme G_n množinu všech těchto odmocnin a definujme zobrazení $f : \mathbf{Z_n} \to G_n$ vztahem $f(k) = \omega_k$. Potom f je vzájemně jednoznačná korespondence mezi $\mathbf{Z_n}$ a G_n splňující

$f(k_1+k_2)=\omega_{k_1}\times\omega_{k_2}$. *Řekneme, že f je* **izomorfismus** *(aditivní) grupy* $\mathbf{Z_n}$ *a (multiplikativní) grupy* G_n.

PŘÍKLAD. G_3 sestává z prvků $\omega_0=1, \omega_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ a $\omega_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Proto třetí odmocniny $z=re^{i\alpha}$ jsou $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\alpha}{3}}$, $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\alpha+2\pi}{3}}$ a $\sqrt[3]{r}e^{i\frac{\alpha+4\pi}{3}}$.

CVIČENÍ. Nakreslete n-té odmocniny z jedné v komplexní (Gaussově či Argandově) rovině.

5. KVADRATICKÉ ROVNICE S KOMPLEXNÍMI KOEFICIENTY

VĚTA. *Libovolné nenulové komplexní číslo $z=a+bi$ má dvě různé druhé odmocniny $x+yi=\pm\sqrt{a+bi}$, kde*

$$(\star)\qquad x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\quad\text{a}\quad y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}};$$

znaménka x a y jsou určena rovností $2xy=b$.

Důkaz. Jestliže $x+yi=\pm\sqrt{a+bi}$, potom $x^2-y^2=a$ a $2xy=b$. Tedy $(x^2-y^2)^2=x^4+y^4-2x^2y^2=a^2$ a $4x^2y^2=b^2$. Proto $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ (**kladné** reálné číslo!). Odtud $x^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ a $y^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

PŘÍKLAD. (i) Vypočítejte $\sqrt{5-12i}$. Zde $x^2-y^2=5$ a $2xy=-12$. Tedy $x^2+y^2=\sqrt{169}=13$. Proto $x^2=9$, tj. $x=\pm3$ a $y=\pm2$. Jelikož $xy=-6<0$, odmocniny jsou $3-2i$ a $-3+2i$.

(ii) Najděte kořeny rovnice $x^2-4ix-(9-12i)=0$. Máme $(x-2i)^2=-4+9-12i=5-12i$; tedy $x-2i=\pm(3-2i)$ a kořeny jsou $x_1=3$ a $x_2=-3+4i$.

6. GEOMETRIE KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Označme $\mathbf{R^2}$ Gaussovu rovinu (s ortonormální soustavou souřadnic): Každý bod $B=(a,b), a,b\in\mathbf{R^2}$, odpovídá (jednoznačným způsobem) komplexnímu číslu $z=a+bi$; budeme psát $B=B(z)$. Tuto korespondenci využijeme k popisu některých geometrických jevů.

VĚTA. *Nechť $B_1=B(z_1)$ a $B_2=B(z_2), z_1\neq z_2$. Potom všechny body přímky $\overline{B_1\,B_2}$ odpovídají číslům*

$$z=z_1+t(z_1-z_2), t\in\mathbf{R}.$$

Bod B úsečky $[B_1,B_2]$, pro který $[B_1,B]:[B,B_2]=1:r$, odpovídá číslu

$$z=z_1+\frac{1}{r+1}(z_2-z_1);$$

speciálně středový bod $[B_1,B_2]$ odpovídá $z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

Těžiště *trojúhelníka B_1,B_2 a $B_3=B(z_3)$ odpovídá číslu $\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$.*

[Připomeňte si, že těžiště trojúhelníka je průsečíkem jeho těžnic.]

Připomeňte si, že **izometrie** je vzájemně jednoznačné zobrazení Gaussovy roviny, které zachovává vzdálenost mezi dvojicemi bodů. Následující tři transformace jsou příklady izometrií.

DEFINICE.

Nechť w je pevné komplexní číslo. Zobrazení $T : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ takové, že

$$T(B(z)) = B(z + w),$$

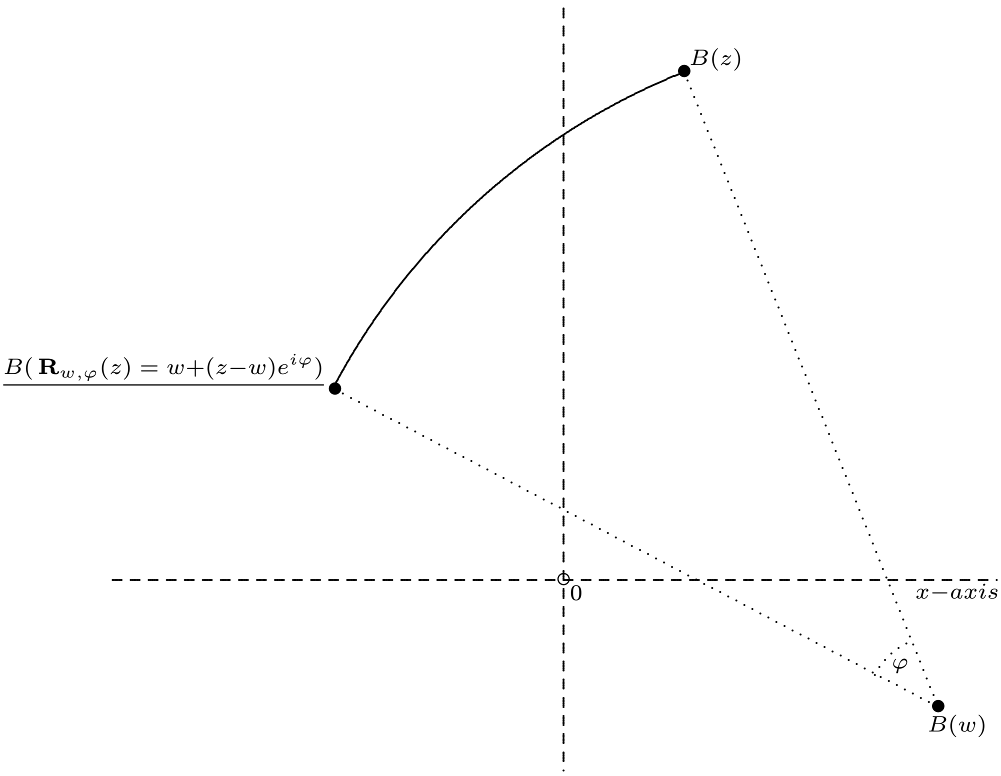
se nazývá **translace (posunutí)** *roviny $\mathbf{R^2}$ ve směru w. Označíme jej T_w.*

Nechť ϕ je pevný reálný úhel. Zobrazení $R : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ takové, že

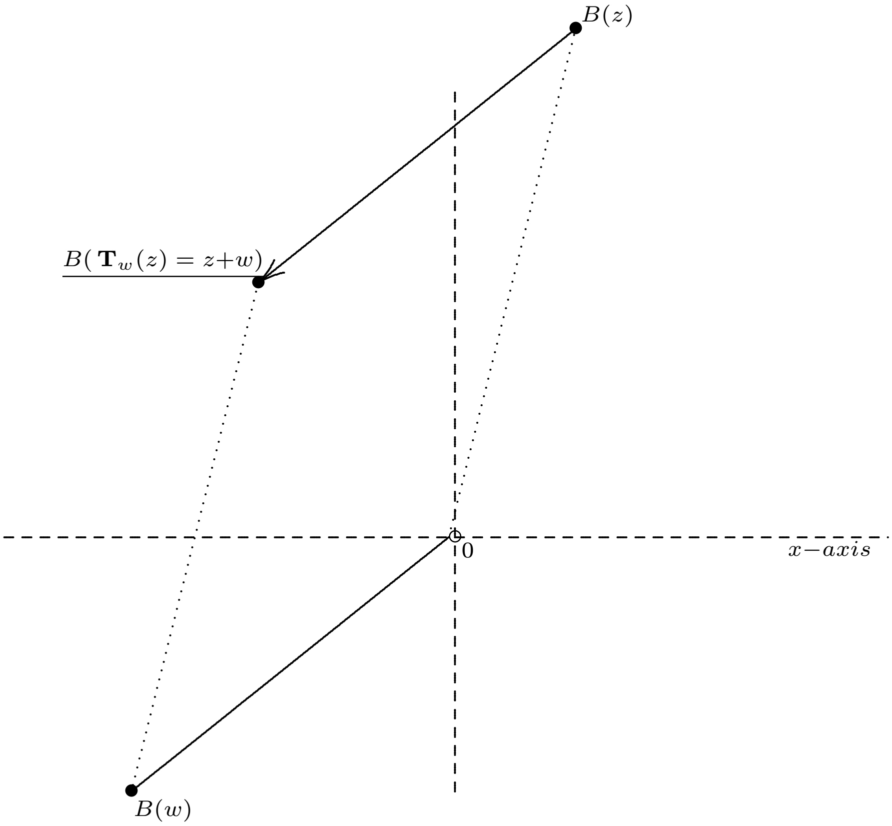
$$R(B(z)) = B(ze^{i\phi}),$$

se nazývá **rotace (otočení)** *roviny kolem počátku $P(0)$ o úhel ϕ. Obecněji $R(B(z)) = B(w + (z - w)e^{i\phi})$ je rotace kolem bodu $B(w)$ o úhel ϕ. Označíme jej $R_{(w,\phi)}$.*

Zobrazení $C : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ definované vztahem $C(B(z)) = B(\overline{z})$ se nazývá **osová souměrnost** *podle osy x.*



Rotace kolem bodu $B(w)$ o úhel φ



Translace ve směru w

VĚTA (Rovnostranné trojúhelníky). Trojúhelník $\Delta = B(z_1)\ B(z_2)\ B(z_3)$, jehož vrcholy jsou uspořádány proti směru hodinových ručiček, je rovnostranný právě tehdy, když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek:

$$z_3 - z_1 = -\omega^2(z_2 - z_1), \text{ nebo } z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0;$$

zde $\omega^3 = 1$ a $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Důkaz. Trojúhelník Δ je rovnostranný právě tehdy, když

$$(*) \qquad z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)\ e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Připomeňte si, že $1, \omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ a $\omega^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ jsou třetí odmocniny z jedné; tedy $1+\omega+\omega^2 = 0$ a $-\omega^2 = 1 + \omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Zřejmě $(*)$ lze přepsat jako

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\ (-\omega^2)$$

nebo

$$z_1(1 - 1 - \omega) + z_2(1 + \omega) - z_3 = 0.$$

Vynásobením druhé rovnosti číslem $-\omega^2$ dostáváme

$$z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0.$$

OBECNĚ. *Trojúhelník $\Delta = B(z_1)\ B(z_2)\ B(z_3)$ je rovnostranný právě tehdy, když*

$$\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2 + \omega_3 z_3 = 0,$$

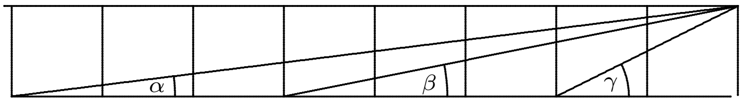
kde ω_1, ω_2 a ω_3 jsou (různé) třetí odmocniny z jedné.

Výpočty à la Machin

V roce 1844, John Dahse užil následující vzorec Strassnitského k výpočtu čísla π na 205 *správných* desetinných míst:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}.$$

Důkaz tohoto vztahu obdržíme ihned následujícím známým trikem: Uvažujme následující "osmi-čtvercový model" a ukažme, že $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.



Skutečně, vyjádříme-li příslušná komplexní čísla v trigonometrické formě

$$z_1 = 8 + i = r_1 e^{i\alpha}, z_2 = 5 + i = r_2 e^{i\beta}, z_3 = 2 + i = r_3 e^{i\gamma},$$

dostáváme ihned

$$z_1 z_2 z_3 = r_1 r_2 r_3 e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = (8+i)(5+i)(2+i) = 65\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}},$$

a tedy $0 \le \alpha + \beta + \gamma < 2\pi$, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

Poznámka. Pro zajímavost, uveďme zde ještě některé další podobné vzorce:

Eulerův vzorec

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{70} + \arctan\frac{1}{99},$$

Gaussův vzorec

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + \arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}$$

a poněkud pozoruhodný Takanův vzorec,

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{49} + 32\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239} + 12\arctan\frac{1}{110443}.$$

S myšlenkou využít rovnost

$$\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2 + 2i \tag{$\star$}$$

k výpočtu čísla π přišel **John Machin (1680 - 1752)** v 1706. Ze vztahu ($\star$) totiž obdržel

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

a užitím této rovnosti vyčíslil π na 100 desetinných míst. Prostě využil trigonometrického tvaru komplexních čísel a aplikoval vztah

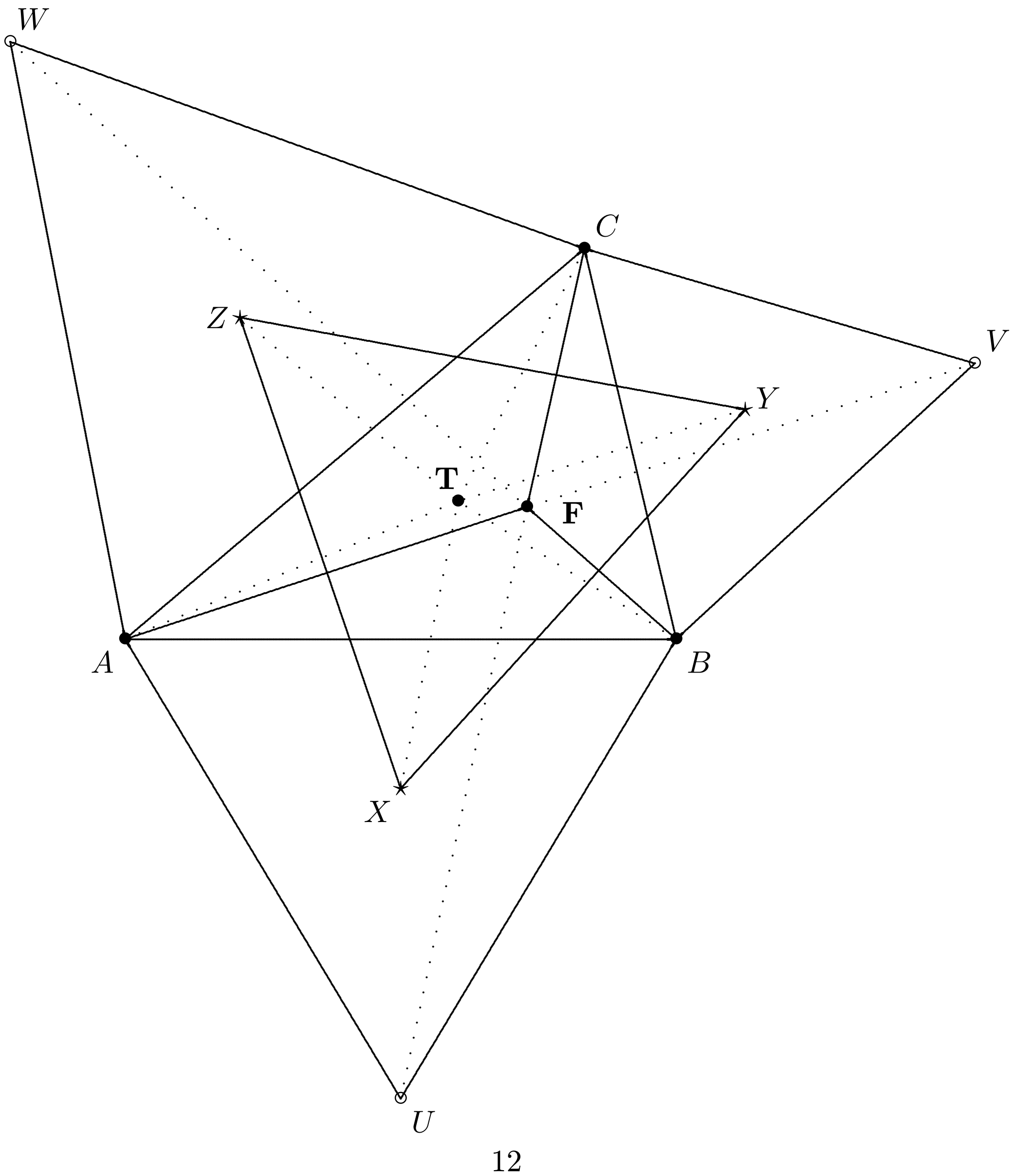
$$\arg(x + yi) = \arctan\frac{y}{x}.$$

Napoleonův trojůhelník a Fermat-Torricelliho bod

Nechť $\triangle = ABC$ *je libovolný trojúhelník. Nad jeho stranami sestrojme (vně) rovnostranné trojúhelníky* $\triangle_1 = AUB$, $\triangle_2 = BFC$ *a* $\triangle_3 = CWA$. *Označme písmeny* X, Y *a* Z *těžiště těchto trojúhelníků. Potom je trojúhelník* $\triangle_{NAP} = XYZ$ *rovnostranný a jeho těžiště* T *splývá s těžištěm původního trojúhelníku* $\boldsymbol{\Delta}$; *ve skutečnosti, těžiště trojúhelníku* $\triangle_0 = UVW$ *též splývá s* T.

Navíc, úsečky $\overline{AV}$, $\overline{BW}$ *a* $\overline{CU}$ *se protnou v bodě* F, *bodě Fermat-Torricelliho, který má vlastnost, že součet* $\overline{AV} + \overline{BW} + \overline{CU}$ *vzdáleností bodu* F *od vrcholů původního trojúhelníku je minimální (vzhledem k součtům těchto vzdáleností z kteréhokoliv jiného bodu) a všechny úhly* $\angle AFU, \angle UFB, \angle BFV, \angle VFC, \angle CFW$ *a* $\angle WFA$ *jsou si rovny. Bod* F *je též společným bodem opsaných kružnic trojúhelníků* $\triangle_1, \triangle_2$ *a* $\triangle_3$.

Poznámka. Zatímco tvrzení týkající se Napoleonova trojúhelníku platí pro libovolný trojúhelník, tvrzení o Fermat-Toricelliho bodě vyžaduje, aby žádný z úhlů původního trojúhelníku nepřesahoval 120^0.



Důkaz. Pišme $A = B(z_1)$, $B = B(z_2)$, $C = B(z_3)$, $U = B(w_3)$, $V = B(w_1)$, $W = B(w_2)$. Číslo z_T odpovídající těžišti T původního trojúhelníka splňuje $z_T = \frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$. Podle předchozí věty, která charakterizuje rovnostranné trojúhelníky, máme

$$w_1 + z_3\omega + z_2\omega^2 = 0, w_2 + z_1\omega + z_3\omega^2 = 0 \text{ a } w_3 + z_2\omega + z_1\omega^2 = 0.$$

Po sečtení těchto rovností dostáváme, se zřetelem ke vztahu $\omega + \omega^2 = -1$, rovnost $w_1 + w_2 + w_3 = z_1 + z_2 + z_3$. Proto je těžiště trojúhelníka $\Delta_0 = UVW$ shodné s těžištěm T původního trojúhelníka.

Tedy

$$\begin{aligned}
&z_X = \tfrac{1}{3}(w_1 + z_2 + z_3) = \tfrac{1}{3}(-z_3\omega - z_2\omega^2 + z_2 + z_3),\\
&z_Y = \tfrac{1}{3}(-z_1\omega - z_3\omega^2 + z_3 + z_1),\\
&z_Z = \tfrac{1}{3}(-z_2\omega - z_1\omega^2 + z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

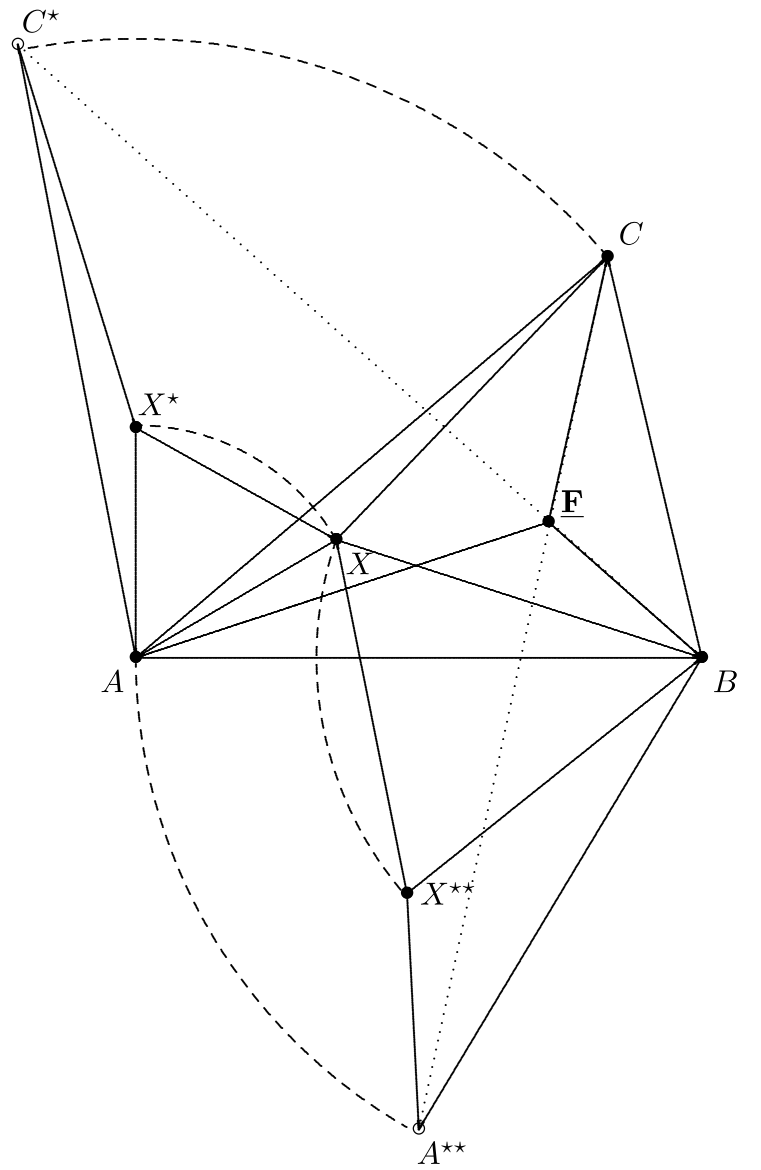
a $3\,(z_X + z_Y + z_Z) = (z_1 + z_2 + z_3)(-\omega - \omega^2 + 2) = z_1 + z_2 + z_3$, tj. těžiště Δ_{NAP} splývá s T. Navíc

$$3(z_X + z_Y\omega + z_Z\omega^2) = z_3(-\omega+1-1+\omega) + z_2(-\omega^2+1-1+\omega^2) + z_3(-\omega^2+\omega-\omega+\omega^2) = 0,$$

a proto je Δ_{NAP} rovnostranný, čímž je první část věty dokázána.

Důkaz druhé části zde nastíníme následujícím obrázkem.

Fermat-Toricelliho bod; (1601-1665)-(1608-1647)



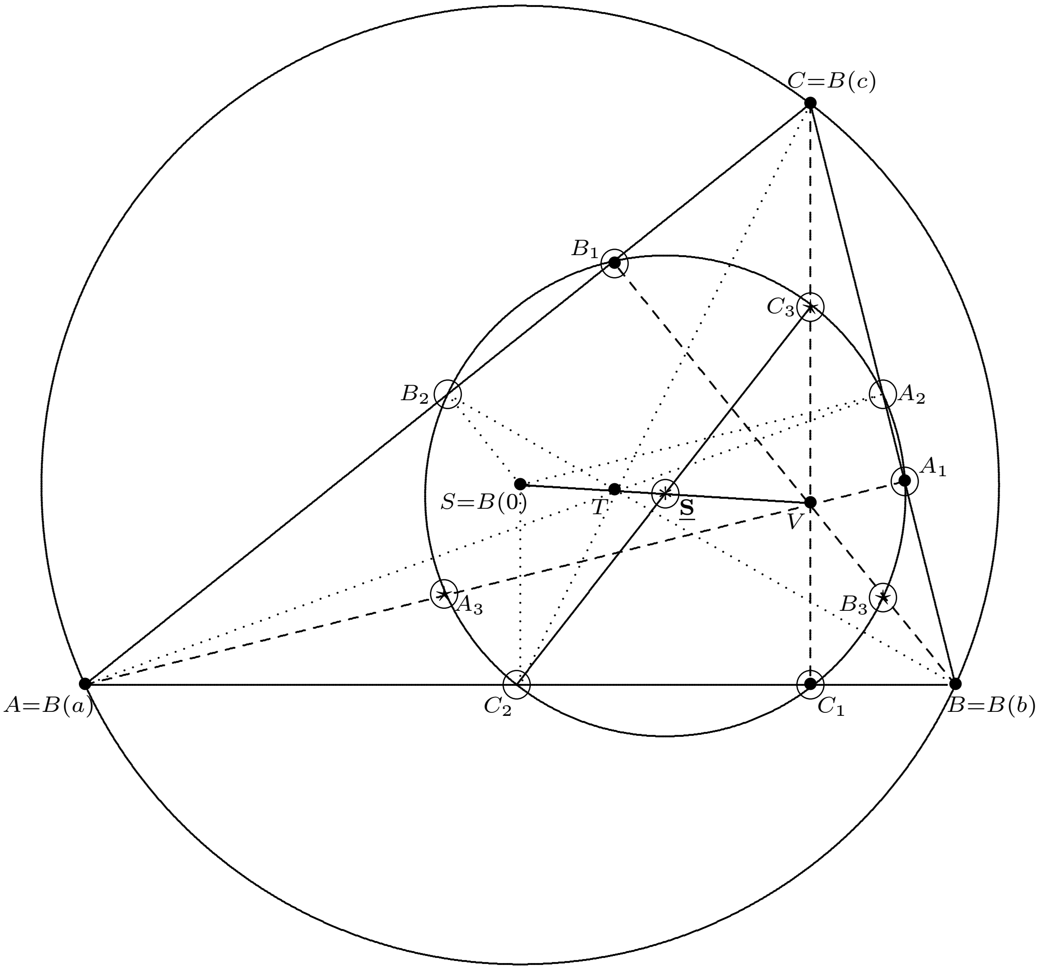
$$\angle ACC^\star = \angle BAA^{\star\star} = 60^o$$

$$D = \overline{C^\star X^\star} + \overline{X^\star X} + \overline{XB} = \overline{CX} + \overline{AX} + \overline{BX} = \overline{CX} + \overline{A^{\star\star}X^{\star\star}} + \overline{X^{\star\star}X}$$

zřejmě splňuje

$$D \geq \overline{C^\star F} + \overline{FB} \ \text{ a } \ D \geq \overline{A^{\star\star}F} + \overline{FC}.$$

Eulerova přímka a kružnice



$S = B(0)$
$V = B(a+b+c)$
$\underline{\mathbf{S}} = B(\frac{a+b+c}{2})$
$T = B(\frac{a+b+c}{3})$
$A_2 = B(\frac{b+c}{2}),\ B_2 = B(\frac{a+c}{2}),\ C_2 = B(\frac{a+b}{2})$
$A_3 = B(a + \frac{b+c}{2}),\ B_3 = B(b + \frac{a+c}{2}),\ C_3 = B(c + \frac{a+b}{2})$
Legenda.
S = střed kružnice opsané; V = průsečník výšek; T = těžiště;

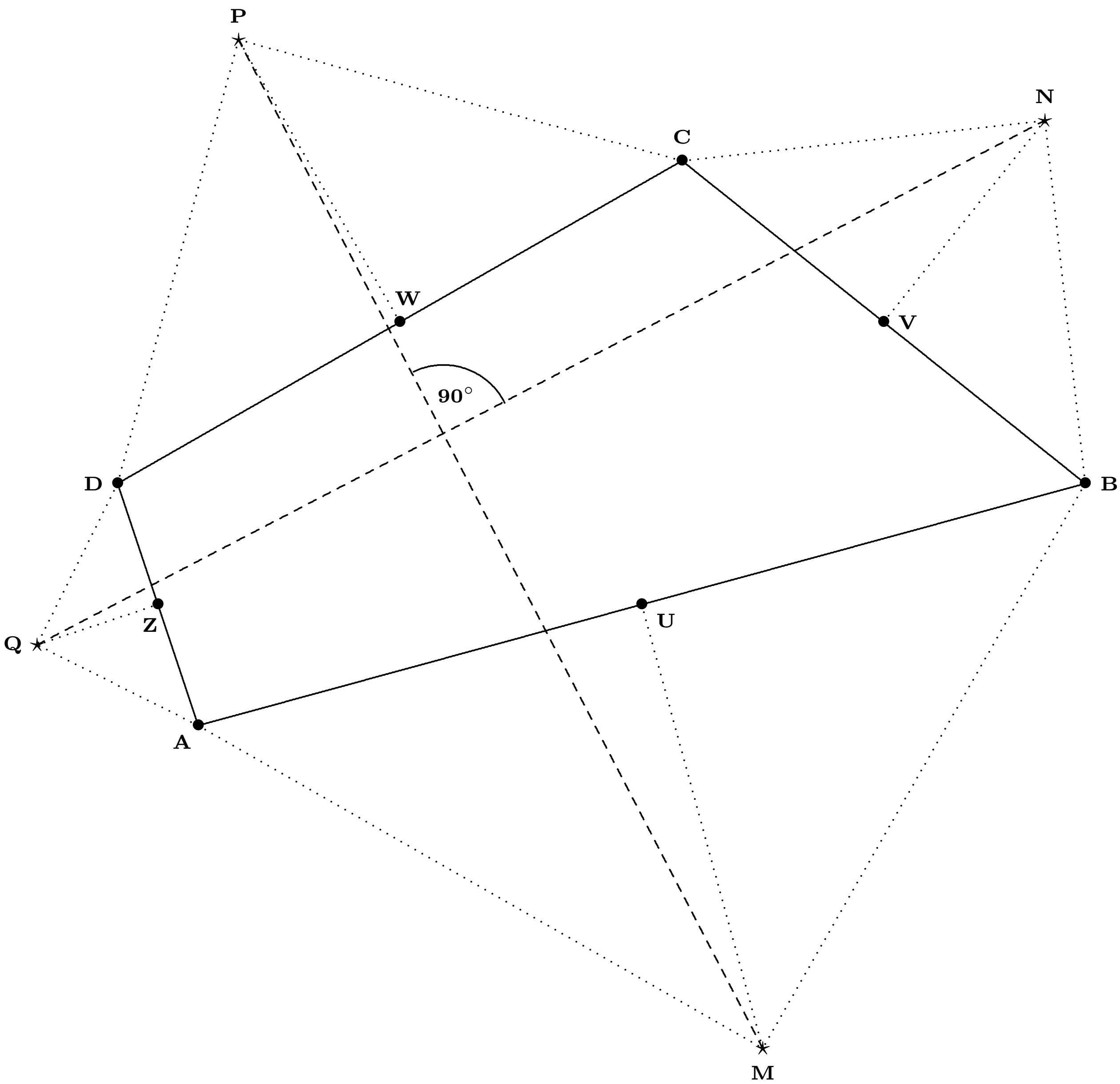
Důkaz, že $V = B(a+b+c)$ plyne z toho, že přímky určené úsečkami $\overline{VC}$ a $\overline{AB}$ jsou kolmé. Skutečně, komplexní číslo

$$\frac{a+b+c-c}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)(\bar{a}-\bar{b})}{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})} = \frac{1}{\|a-b\|^2}(b\bar{a}-a\bar{b})$$

je ryze imaginární. Dokázat, že na kružnici o středu $\underline{\mathbf{S}} = B(\frac{a+b+c}{2})$ leží 9 vyznačených bodů, spočívá v jednoduchých výpočtech.

Konstrukce a là Von Aubel

Nad stranami **libovolného** čtyřúhelníku $ABCD$ sestrojme čtverce a označme jejich středy písmeny M, N, P, Q. Potom úsečky $\overline{MP}$ a $\overline{NQ}$ jsou stejně dlouhé a na sebe kolmé.



Důkaz spočívá ve snadných výpočtech: $A = B(a)$, $U = B(\frac{a+b}{2})$, $M = B(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}i)$; $B = B(b)$, $V = B(\frac{b+c}{2})$, $N = B(\frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2}i)$;

$C = B(c)$, $W = B(\frac{c+d}{2})$, $P = B(\frac{c+d}{2} + \frac{c-d}{2}i)$; $D = B(d)$, $Z = B(\frac{d+a}{2})$, $Q = B(\frac{d+a}{2} + \frac{d-a}{2}i)$;

$\overline{MP} = \frac{c+d-a-b}{2} + \frac{c-d-a+b}{2}i$; $\overline{NQ} = \frac{d+a-c-b}{2} + \frac{d-a-b+c}{2}i$

a tedy $\overline{MP}\,i = \frac{a+d-b-c}{2} + \frac{c+d-a-b}{2}i = \overline{NQ}$.

5 úloh pro účastníky kurzu

Úloha č. 1. *Rozřešte kvadratické rovnice*

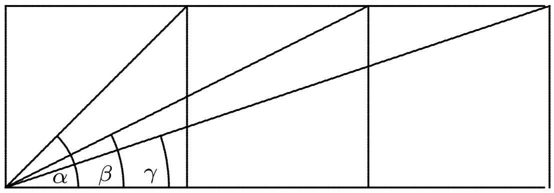
$$z^2 - 4iz + 1 - 12i = 0$$

a

$$z^2 - 4iz - 9 + 12i = 0$$

a ukažte, že body reprezentující kořeny v Argand-Gaussově rovině tvoří čtverec.

Úloha č. 2. *Užitím myšlenky Johna Machina, v následujícím obrázku 3 čtverců dokažte, že* $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, *a vypočítejte aproximaci čísla* π.



Úloha č. 3. *Aplikací věty de Moivreho, určete* n *komplexních čísel* z *takových, že*

$$(z+i)^n + (z-i)^n = 0.$$

Co je na řešeních zvláštního? Vypište pro $1 \leq n \leq 5$ *ta řešení, která mají největší absolutní hodnotu.*

Úloha č. 4. *Využitím faktu, že číslo*

$$z = \bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1$$

se nezmění otočením roviny kolem počátku 0 a že reálné číslo $\Im\, z$ *(tj. imaginární část čísla* z*) se nezmění posunutím roviny, dokažte, že obsah* $\mathbf{A}$ *(orientovaného) trojúhelníku* $B(z_1)B(z_2)B(z_3)$ *je roven*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\Im\, z = \frac{1}{2}\Im\,(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1).$$

Úloha č. 5. *Dva čtverce* $\mathbf{P} = ABCD$ *a* $\mathbf{Q} = AEFG$ *mají společný bod. Doplňte* EAD *do rovnoběžníku* $\mathbf{R} = EADH$ *a* BAG *do rovnoběžníku* $\mathbf{S} = BAGK$. *Dokažte, že středy* U, V, W, Z *rovnoběžníků* $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$ *tvoří čtverec.*