Cesta z roviny do prostoru od vlastností kružnic ke kulové inverzi

RNDr. Šárka Gergelitsova, Ph.D.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Cesta z roviny do prostoru
– od vlastností kružnic ke kulové inverzi

1. Základní geometrické definice a poučky o kružnicích

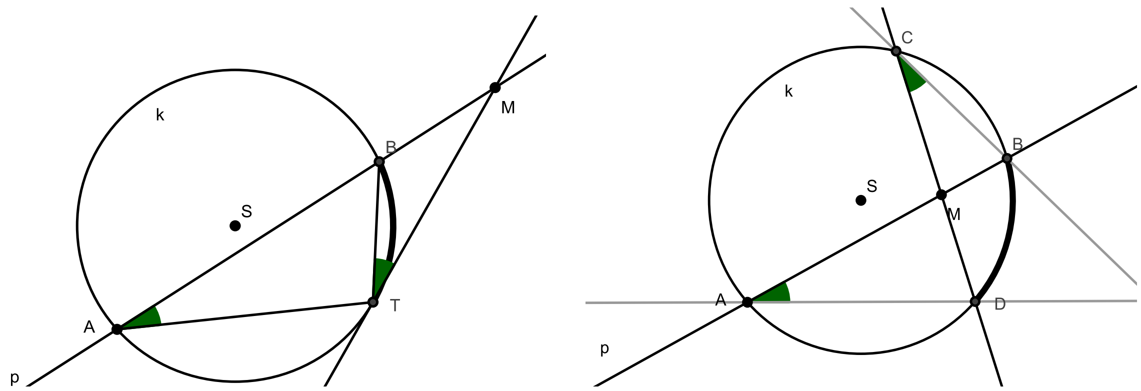
1.1 Kolmé kružnice. Definice. Kružnice k_1, k_2 jsou kolmé právě tehdy, jsou-li kolmé jejich tečny ve společném bodě. *Poznámka.* Fakt, že se dvě kružnice protínají v obou společných bodech pod stejným úhlem (jejich tečny svírají shodný úhel), plyne zřejmě ze symetrie podle přímky určené jejich středy.

Věta. Kružnice k_1, k_2 jsou kolmé právě tehdy, prochází-li tečna (v jejich společném bodě) jedné z nich středem druhé. *Důkaz* plyne z kolmosti tečny k průměru kružnice v bodě dotyku.

1.2 Mocnost bodu ke kružnici. Definice. Pro daný bod M a danou kružnici $k \equiv (S; r)$ se číslo m, pro které platí $m = v^2 - r^2$, kde $v = |SM|$, nazývá *mocnost bodu M ke kružnici k.*

Věta. V rovině je dána kružnice k a bod M. Nechť p je libovolná přímka procházející bodem M a protínající kružnici k v bodech A, B. Potom platí $|AM||BM| = |m|$, kde m je mocnost bodu M ke kružnici k. Pro M vně kružnice k platí $m > 0$, pro bod $M \in k$ platí $m = 0$ a pro bod M uvnitř k platí $m < 0$. Pokud se přímka p dotýká kružnice k v bodě T, platí $|MT|^2 = m$.

Důkaz tohoto tvrzení opírající se o podobnost trojúhelníků najde čtenář v učebnicích planimetrie, ilustraci vidíme na obr. 1a, b. Na obr. 1a: $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle BTM|$ (obvodový a úsekový úhel k oblouku TB), proto $\triangle MAT \sim \triangle MTB$.
Na obr. 1b: $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BCD|$ (obvodové úhly k oblouku DB), proto $\triangle MAD \sim \triangle MCB$.

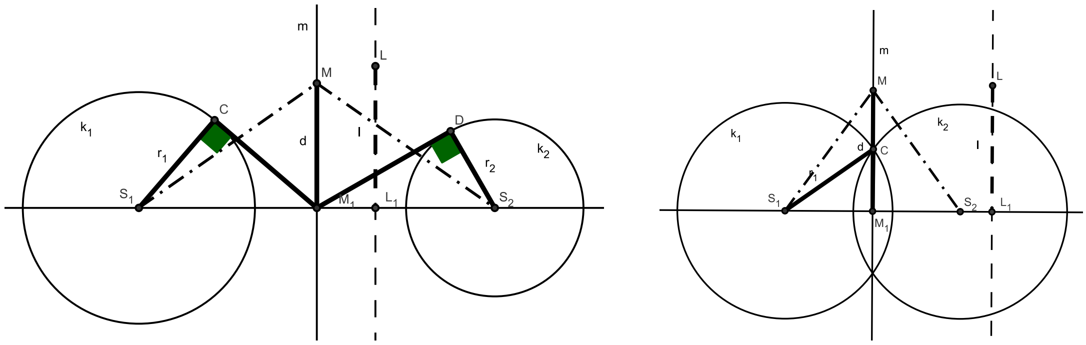


Obr. 1a,b

1.3 Chordála kružnic. Definice. Množina všech bodů v rovině, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím, se nazývá *chordála*.

Věta. Chordála nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů. Pro dvojici různých soustředných kružnic je chordála prázdná množina (někdy se též říká, že chordála takových kružnic neexistuje).

Důkaz prvého tvrzení vyplývá z Pythagorovy věty a ilustraci vidíme na obr. 2a,b. Pro protínající se kružnice je tvrzení zřejmé. Druhá část tvrzení je zřejmá z definice mocnosti bodu ke kružnici a nerovnosti poloměrů daných soustředných kružnic.



Obr. 2a,b

Platí $|S_1M|^2 = |S_1M_1|^2 + d^2, \quad |S_2M|^2 = |S_2M_1|^2 + d^2$, proto

$|S_1M|^2 - r_1^2 = |S_1M_1|^2 + d^2 - r_1^2, \quad |S_2M|^2 - r_2^2 = |S_2M_1|^2 + d^2 - r_2^2$ a tedy

$|S_1M|^2 - r_1^2 = |S_2M|^2 - r_2^2 \Leftrightarrow |S_1M_1|^2 - r_1^2 = |S_2M_1|^2 - r_2^2$, tedy všechny body přímky kolmé na střednou kružnic mají stejnou mocnost k oběma kružnicím právě tehdy, má-li ji pata této kolmice (body M_1, L_1). Bod s touto vlastností je na středné kružnic zřejmě jediný.

Poznámka. Z bodů chordály, které leží vně kružnic, lze vést k oběma kružnicím stejně dlouhé tečny.

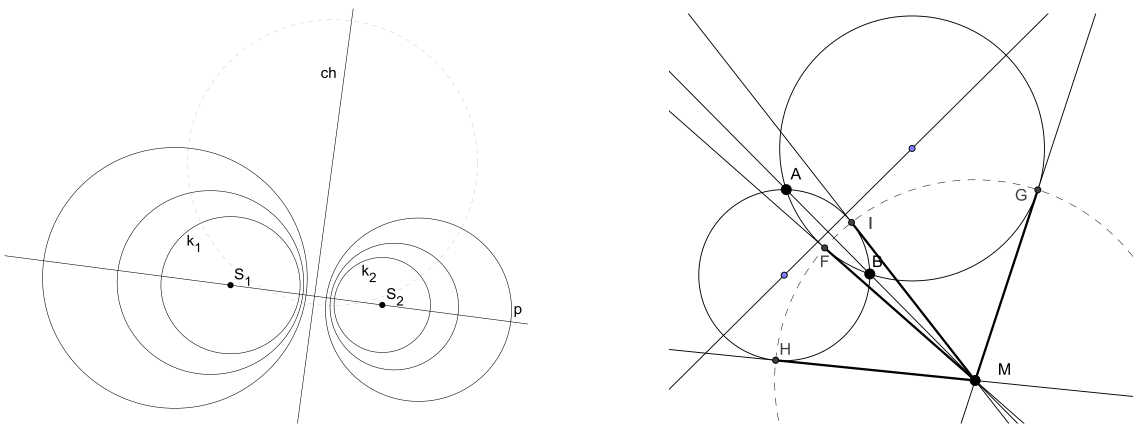
Poznámka. Chordála dvou dotýkajících se kružnic je jejich společná tečna.

Poznámka. Chordála dvou protínajících se kružnic prochází jejich společnými body.

1.4 Svazek kružnic. Definice. Množina všech kružnic, které mají společnou chordálu, se nazývá *svazek kružnic*. (Obr. 3a) *Speciálně:* Všechny kružnice, které procházejí danými dvěma různými body *A*, *B* tvoří svazek kružnic.

Poznámka. Kterýkoliv bod dané přímky *AB* má stejnou mocnost ke všem kružnicím svazku *AB*. (Body společné chordály svazku mají stejnou mocnost ke všem kružnicím svazku.)

Důsledek. (Obr. 3b) Tečny z bodu *M* na přímce *AB* ke všem kružnicím svazku procházejícího body *A*, *B* jsou stejně dlouhé.



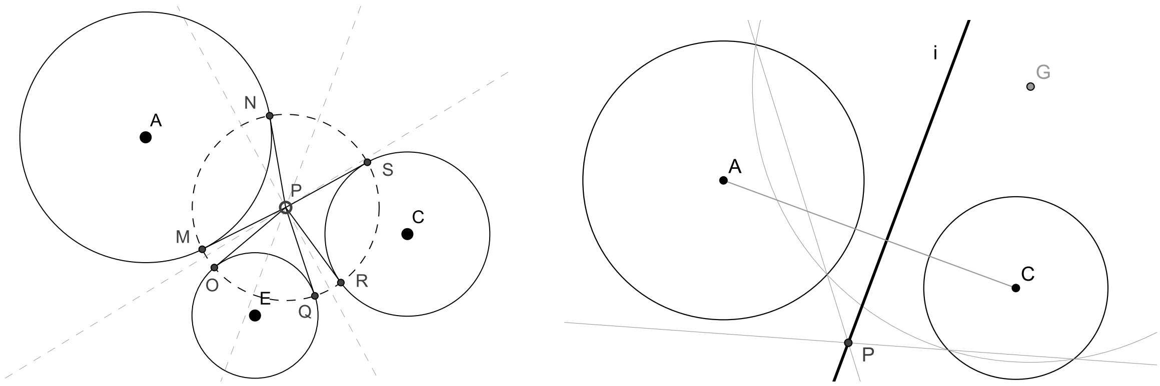
Obr. 3a, b

1.5 Potenční střed. Definice. Bod, který má k daným třem kružnicím stejnou mocnost, se nazývá *potenční střed* daných tří kružnic.

1.6 Příklad. Najděte potenční střed daných tří kružnic (Obr. 4a).

Řešení. Sestrojíme chordály každých dvou kružnic (pokud existují, tj.pokud žádné dvě kružnice nejsou soustředné). Buď jsou všechny navzájem rovnoběžné (právě tehdy, leží-li středy kružnic v přímce) nebo se protínají v jediném bodě. To plyne z tranzitivity rovnosti – je-li $m(P,k_1) = m(P,k_2)$ a $m(P,k_2) = m(P,k_3)$, pak musí platit $m(P,k_1) = m(P,k_3)$. Stačí tedy sestrojit dvě z nich. Pokud však kružnice nemají společný bod, řešíme

Problém. Jak (snadno) sestrojit chordálu dvou kružnic, pokud nemají společný bod?

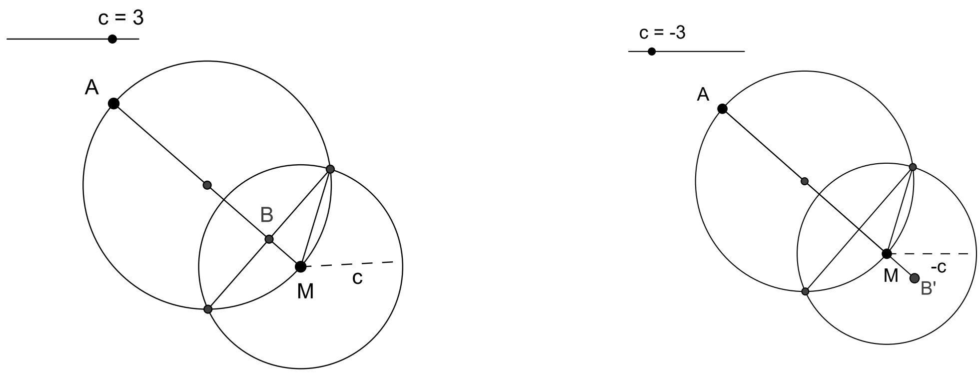


Obr. 4a, b

Řešení. (Obr. 4b) Ačkoliv to vypadá jako „řešení kruhem“, pomůže nám potenční střed. K daným dvěma kružnicím sestrojíme libovolnou třetí kružnici tak, aby obě protínala. Umíme tedy sestrojit dvě chordály pomocné trojice. Pomocí potenčního středu pomocné trojice sestrojíme chordálu původních dvou kružnic – je kolmá na jejich střednou a prochází potenčním středem pomocné trojice.

1.7 Příklad. Jsou dány body M, A a číslo c. Sestrojte další bod kružnice k, která prochází bodem A a pro kterou platí $m(M,k) = |c| \cdot c$.

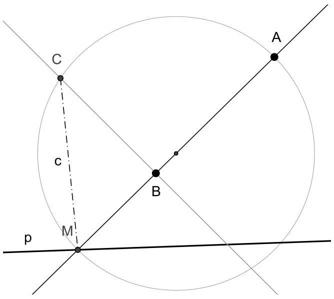
Řešení. (Obr. 5a, b) Přímka MA protíná neznámou kružnici v bodech A a B tak, že platí $|AM||BM| = c^2$. Pomocí Euklidových vět tedy umíme nalézt délku $|BM|$ a podle znaménka čísla c správně umístíme bod B na přímku MA.

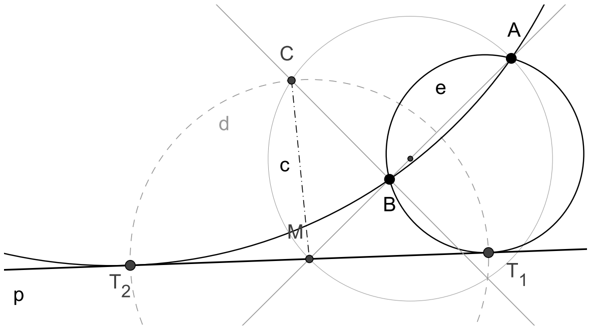


Obr. 5a, b

1.8 Příklad. Jako příklad uvedeme jednu z tzv. Apolloniových úloh: Sestrojte všechny kružnice, které procházejí danými dvěma body A, B a dotýkají se dané přímky p. Body A, B leží v téže polorovině vyťaté přímkou p.

Řešení. (Obr. 6a, b) Hledaná kružnice náleží svazku AB a daná přímka je její tečnou. Pro průsečík přímek $M = AB \cap p$ umíme opačným postupem k postupu v příkladu 1.7 najít délku tečny ze známé mocnosti $m(M, k)$, a poté body dotyku na přímce p. Úloha má dvě řešení.



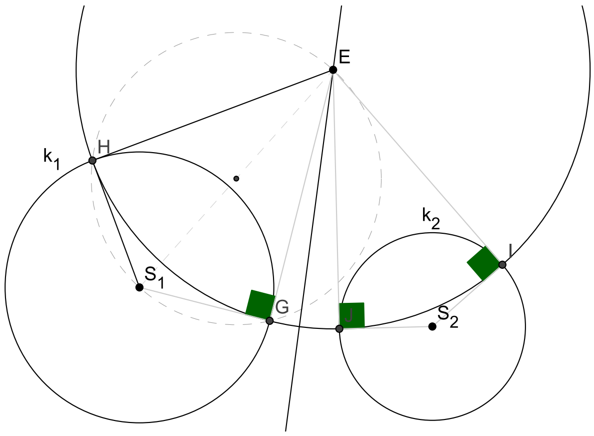


Obr. 6a, b

1.9 Příklad. Další z Apolloniových úloh: Sestrojte všechny kružnice, které procházejí danými dvěma body *A*, *B* a dotýkají se dané kružnice *k*. Body *A*, *B* leží oba vně nebo oba uvnitř dané kružnice.

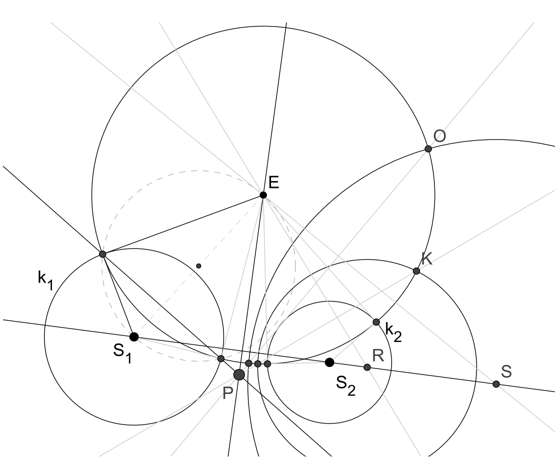
Návod. Snadno najdeme potenční střed *P* dané kružnice a svazku *AB* kružnic. Díky zjištěné mocnosti bodu *P* k hledané (a stejně i dané) kružnici, najdeme bod dotyku…

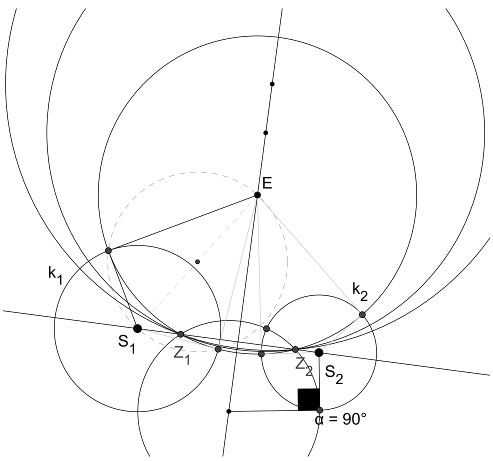
1.10 Kružnice kolmá ke dvěma daným kružnicím. Kružnice, která má kolmo protnout dvě dané kružnice k_1, k_2, musí mít střed na jejich chordále. Tečny (úsečky) k daným kružnicím vedené z jejího středu musí být jejími poloměry, musí být tedy stejně dlouhé. (Obr. 7)



Obr. 7

Důsledek. (Obr. 8) Kružnice, která kolmo protíná dvě dané kružnice k_1, k_2, protíná kolmo všechny kružnice svazku určeného danými kružnicemi k_1, k_2 (tečny z jejího středu ke všem kružnicím svazku jsou stejně dlouhé).





Obr. 8

Obr. 9

Důsledek. (Obr. 9) Kolmost kružnic je symetrická, proto také všechny kružnice kolmé k daným dvěma kružnicím k_1, k_2 tvoří svazek. Pokud dané kružnice k_1, k_2 neměly společný bod, prochází všechny kružnice k nim kolmého svazku základními body na středné S_1, S_2.

2. Kruhová inverze

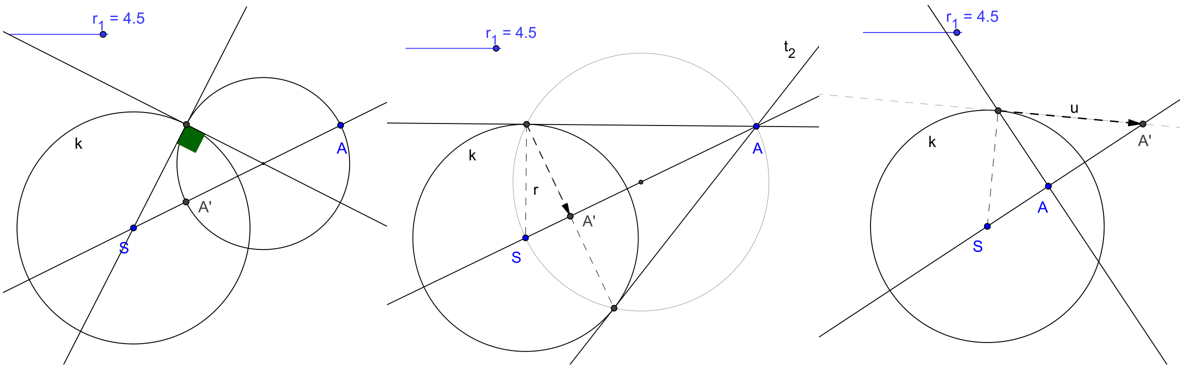
2.1 Definice. Kruhová inverze je zobrazení v rovině, které je určeno kružnicí $k \equiv (S; r)$, *k* je základní kružnice inverze, *S* střed inverze a *r* poloměr inverze a které má následující vlastnosti:

1. bod *S* nemá obraz (nebo – pokud pracujeme v tzv. Möbiově rovině – je jeho obrazem nevlastní bod roviny)
2. bod *A* leží na polopřímce $\overrightarrow{SA}$ (pokud neuvažujeme kruhovou inverzi se záporným koeficientem)
3. pro každý bod $A \neq S$ a jeho obraz *A´* platí: $|SA|.|SA'| = r^2$

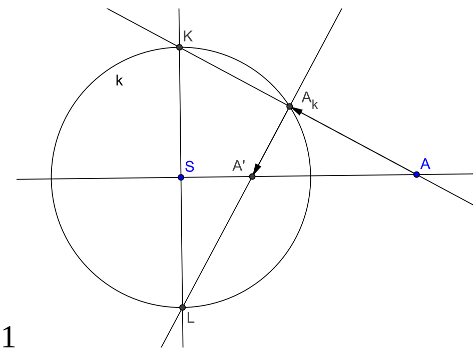
Číslo r^2 se nazývá mocnost inverze nebo také koeficient inverze. Z definice vyplývá (a z názvu tušíme), že kruhová inverze je zobrazení samo k sobě inverzní, tedy že obrazem bodu *A´* je bod *A*.

2.2 Konstrukce obrazu bodu roviny v kruhové inverzi. (Obr. 10) Každý bod, který náleží základní kružnici inverze je samodružný. Obraz ostatních bodů sestrojíme vhodnou konstrukcí.

2.2a V učebnicích lze nalézt různé konstrukce; využijeme vlastnosti mocnosti zobrazovaného bodu ke kružnici. Podle ní jsou kružnice inverze *k* a kružnice nad průměrem *AA´* navzájem kolmé (Obr. 10a) a lze využít Euklidovy věty o odvěsně a použít postup příkladu 1.7. Konstrukce obrazu *A´* bodu *A* vidíte na obr. 10b (pro *A* vně *k*) a na obr. 10c (pro *A* uvnitř *k*).



Obr. 10a, b, c



Obr. 11

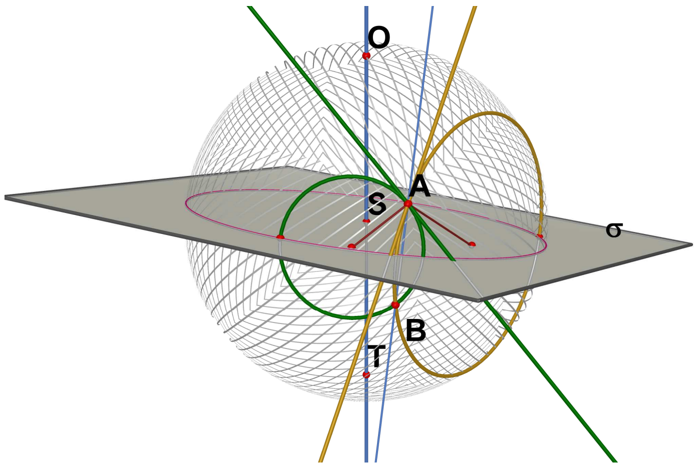
2.2b Jiná konstrukce vyplyne z následujícího odstavce, zatím ji ověříme pomocí podobnosti trojúhelníků na obr. 11. Použijeme průměr *KL* kružnice *k* kolmý na přímku *SA* a bod *A* nejprve z jednoho z bodů *K*, *L* „promítneme na kružnici *k*“ do bodu A_k a poté „promítneme“ bod A_k z druhého bodu zpět na *SA* do bodu *A´*. Z podobnosti trojúhelníků *LA´S* a *AKS* plyne:
$\frac{|SA'|}{|SL|}=\frac{|SK|}{|SA|}$, proto $|SA'||SA|=|SK||SL|=r^2$.

Kruhovou inverzi lze odvodit také pomocí prostorových vztahů, konkrétně pomocí tzv. stereografické projekce, kterou naznačuje předchozí konstrukce. Toto odvození nám později umožní dokázat některé vlastnosti kruhové inverze syntetickou cestou (tj. pomocí geometrických vztahů bez použití výpočtů).

Stereometrické odvození kruhové inverze.

2.3 Stereografická projekce a její vlastnosti. Stereografická projekce je středový průmět kulové plochy κ z jejího bodu *O* na průmětnu π, která se dotýká plochy κ v druhém krajním bodě jejího průměru *OT*.

2.4 Pomocné tvrzení. (Obr. 12) Dvě kružnice k_1, k_2, které leží na kulové ploše a procházejí společnými body *A*, *B* plochy, se protínají pod stejnými úhly. Protože rovina souměrnosti každé dvojice bodů na kulové ploše prochází středem plochy a v této rovině leží i středy kružnic k_1, k_2, plyne uvedené tvrzení z rovinové souměrnosti podle této roviny.

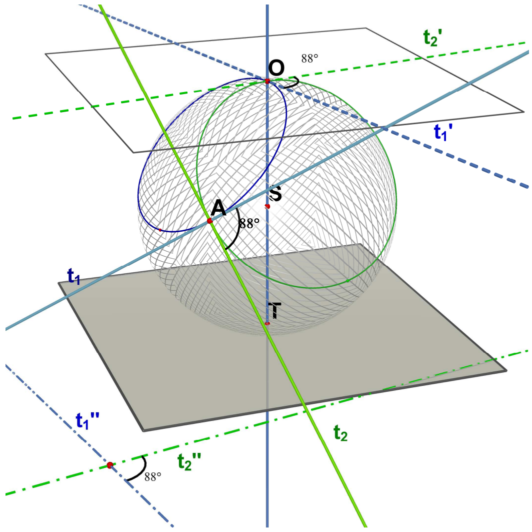


Obr. 12

Při odvozování vlastností kruhové inverze budeme potřebovat vlastnosti průmětů útvarů nikoli na výše zmíněnou tečnou rovinu c, ale na s ní rovnoběžnou rovinu procházející středem kulové plochy. Využijeme při tom následující
2.5 Pomocné tvrzení. Průměty křivek kulové plochy κ z bodu *O* na středovou rovinu $\delta \parallel \pi$ jsou stejnolehlé s jejich stereografickými průměty (tj. s jejich obrazy ve stereografické projekci). (Obr. 14b)

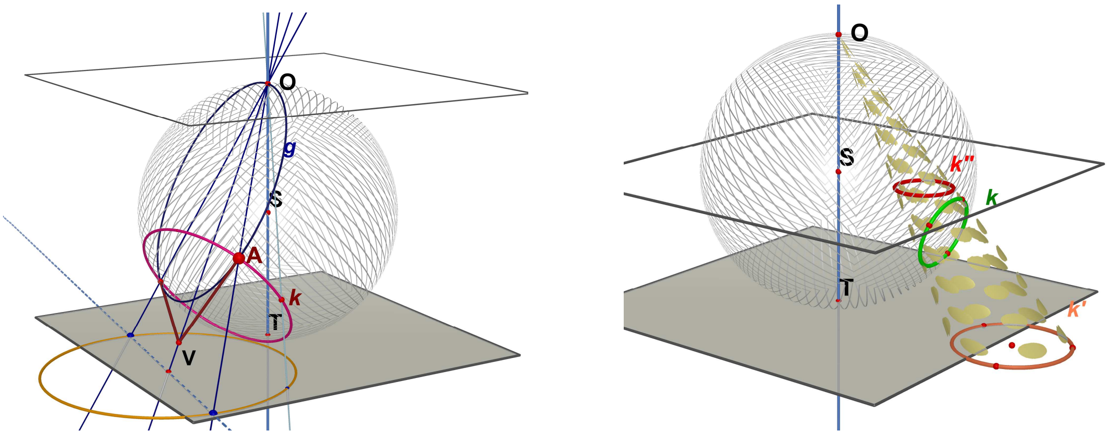
2.6 Stereografická projekce je konformní (úhlojevná). (Obr. 13) Tedy: protínají-li se dvě křivky m_1, m_2 plochy κ pod úhlem α, protínají se jejich stereografické průměty pod týmž úhlem α.

Důkaz. Křivky m_1, m_2 s tečnami t_1, t_2 v modelu nahradíme v jejich průsečíku kružnicemi k_1, k_2 plochy ležícími v rovinách ρ_1 a ρ_2 určených středem promítání *O* a příslušnou tečnou. Tečné roviny plochy κ v koncových bodech průměru *OT* jsou rovnoběžné, proto jsou navzájem rovnoběžné průsečnice roviny ρ_1 s nimi (tj. přímky $t_1´$, $t_1´´$, přičemž $t_1´´$ je stereografický průmět tečny t_1) a také průsečnice roviny ρ_2 s nimi (tj. přímky $t_2´$, $t_2´´$, přičemž $t_2´´$ je stereografický průmět tečny t_2). Protože druhým průsečíkem kružnic k_1, k_2 je bod *O*, svírají (podle pomocného tvrzení 2.4) přímky t_1', t_2' týž úhel jako tečny t_1, t_2. Proto svírají stejný úhel i přímky t_1'', t_2'' průměty tečen t_1, t_2 a tedy i průměty křivek m_1, m_2.



Obr. 13

2.7 Stereografický průmět každé kružnice k plochy k je kružnice. (Obr. 14a, b)



Obr. 14a, b

Nástin důkazu. Je-li V vrchol kuželové plochy, která se dotýká kulové plochy κ podél kružnice k, pak všechny přímky VA, kde $A \in k$, jsou tečnami plochy a tudíž i tečnami nějaké její kružnice. Roviny VAO (pro $A \notin VO$) protínají pro všechny body $A \in k$ plochu κ v kružnici g, která je zřejmě kolmá ke k. Navíc stereografickým průmětem této kružnice g je úsečka procházející stereografickým průmětem vrcholu V. Stereografický průmět kružnice k musí být tudíž křivka kolmá na všechny tyto úsečky, tedy kružnice se středem v průmětu vrcholu V.

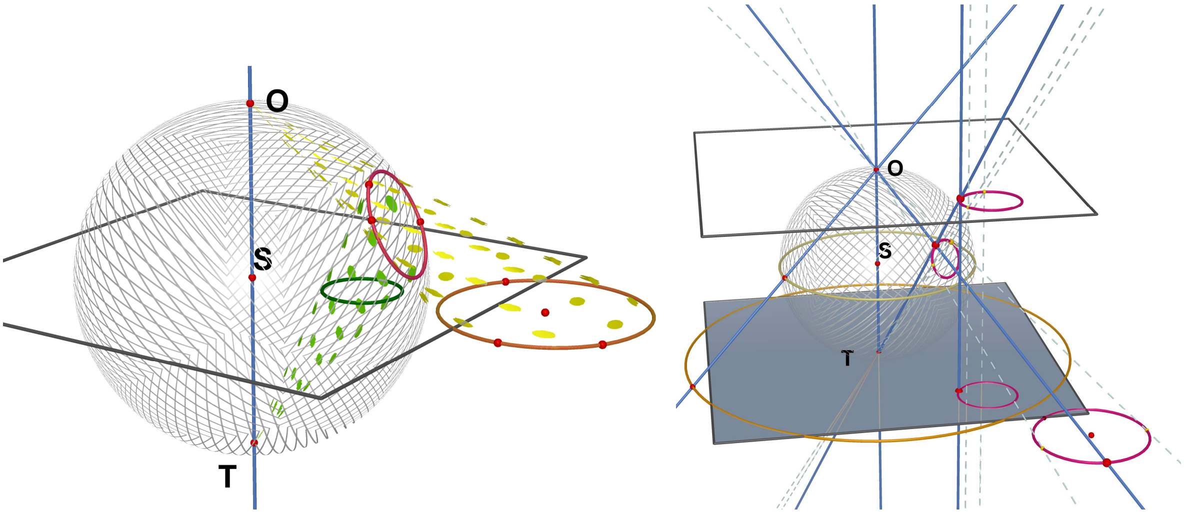
Poznámka. Na obr. 14b vidíme, že kružnice k, její stereografický průmět k' i s ním stejnolehlá kružnice k'' v rovině rovnoběžné s π procházející středem kulové plochy κ jsou rovinnými řezy téže kuželové plochy o vrcholu O.

2.8 Stereometrická konstrukce obrazů útvarů v kruhové inverzi. Je dána kulová plocha $\kappa \equiv (S; r)$ a rovina α procházející jejím středem, která ji protíná v kružnici k. Sestrojíme průměr OT plochy κ kolmý k rovině α. Libovolný bod $A \neq S$ roviny α promítneme z bodu O na plochu κ do bodu A_k a poté promítneme bod A_k z bodu T do roviny α do bodu A'. Bod A' je obrazem bodu A v kruhové inverzi se středem S a se základní kružnicí inverze k.

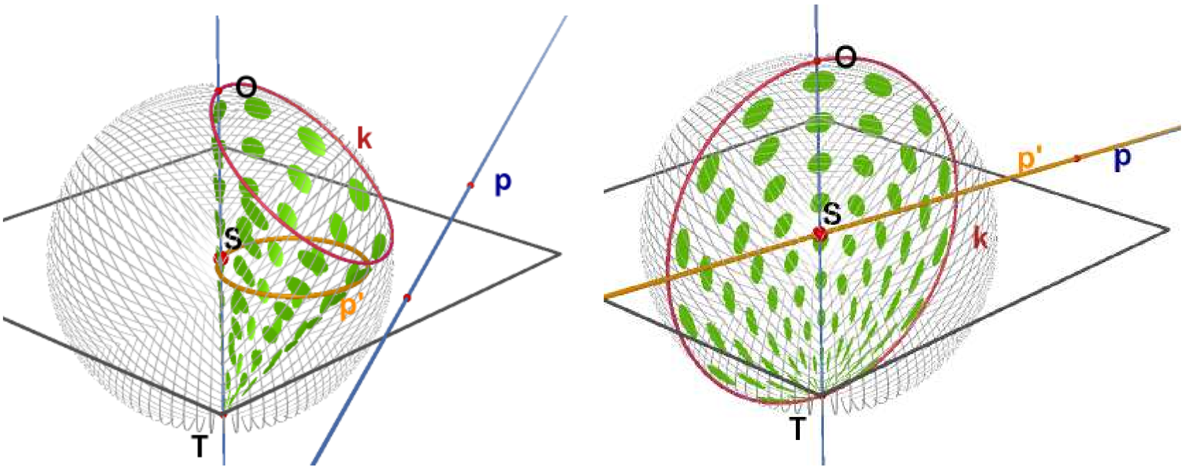
Důkaz vlastností kruhové inverze jsme již provedli v odstavci 2.2b. Konstrukce obrazu bodu *A* je konstrukcí v rovině *AOT*. Tato rovina protíná plochu κ v hlavní kružnici a pro $O = K$, $T = L$ je zobrazena na obr. 11.

2.9 Konstrukce obrazu kružnice a přímky. Konstrukci obrazu **kružnice** vidíme na obr. 15a. **Konstrukce obrazu přímky** je na obr. 16a, b. Středový průmět přímky *p* z bodu *O* na plochu κ je řez plochy κ rovinou $\rho \equiv (O, p)$. Tímto řezem je kružnice *k* procházející bodem *O*. Její průmět z bodu *T* proto prochází středem *S*. Pokud přímka *p* prochází středem *S* plochy κ, je kružnice *k* hlavní kružnicí procházející bodem *T* (Obr. 16b).

Poznámka. (Obr. 15b) Podobně lze konstruovat kruhovou inverzi v tečné rovině plochy κ v bodě *T*. Taková konstrukce nepřináší pro náš výklad žádné zřejmé výhody.

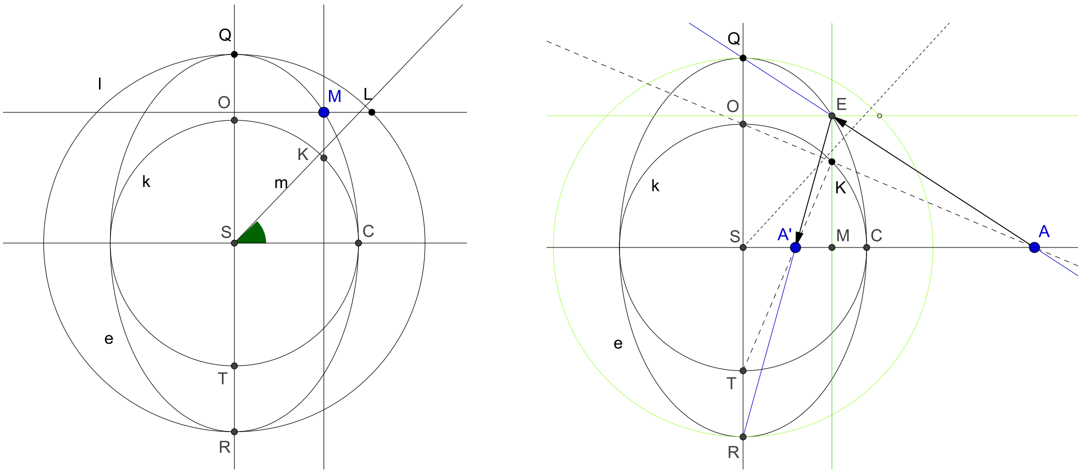


Obr. 15a, b



Obr. 16a, b

2.10 *Poznámka.* **Konstrukce kruhové inverze pomocí rotačních kvadrik.** Možná poněkud překvapivým bude zjištění, že při prostorové konstrukci kruhové inverze nemusíme promítat rovinné útvary pouze z pólů kulové plochy, ale že můžeme použít jinou rotační kvadriku. Ukážeme si postup s využitím rotačního elipsoidu. Stejně jako v předchozí úvaze vedeme konstrukci v rovině procházející bodem *A* a osou elipsoidu. V této rovině promítáme bod *A* z vrcholů elipsy *e* řezu. Důkaz se opírá o tzv. příčkovou či o trojúhelníkovou konstrukci bodů elipsy (trojúhelníkovou konstrukci bodu *M* elipsy s osami *CD* a *QR* ukazuje obr. 17a a ilustraci konstrukce obrazu bodu *A* v osové rovině elipsoidu vidíme na obr. 17b.



Obr. 17a, b

2.11 Popis a odvození k obrázkům 17a, b.

17a
Poloměry kružnic l, k, označme po řadě a, b (jsou to velikosti poloos elipsy *e*). Pokud bychom položili do kolmic SC, SO osy x, y soustavy souřadnic, zřejmě platí **Chyba! Objekty nemohou být vytvořeny úpravami kódů polí.** a jeho souřadnice $M = [b\cos\alpha; a\sin\alpha]$ vyhovují známé rovnici elipsy s poloosami b, a a se středem v počátku soustavy souřadnic $x^2a^2 + y^2b^2 = a^2b^2$.
Z podobnosti trojúhelníků dále plyne: $a : b = |SL| : |SK| = y_M : y_K$. Tento vztah použijeme dále.

17b
Ze vztahu $a : b = |SR| : |ST| = |ME| : |MK|$ a tedy $|SR| : |ME| = |ST| : |MK|$ plyne, že přímky *RE* i *TK* protínají úsečku SM v tomtéž bodě A´, pro který platí $|SA'| : |A'M| = a : b$.
Konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi pomocí elipsy je konstrukčně mnohem obtížnější, zde ji uvádíme jen pro zajímavost.

Vlastnosti kruhové inverze uvedeme nejprve ve výčtu. Důkazy či komentáře k vlastnostem, které nebyly komentovány výše buď jako přímý důsledek definice či z principu konstrukce stereografickou projekcí, uvedeme dále.

2.12 Kruhová inverze je konformní zobrazení.

2.13 Obraz bodu v kruhové inverzi. Každý bod základní kružnice inverze je samodružný. Obraz vnitřního bodu $A \neq S$ základní kružnice leží vně této kružnice a naopak.

2.14 Obraz přímky.
Každá přímka procházející středem inverze je samodružná.
Obrazem každé jiné přímky je kružnice procházející středem inverze.

2.15 Obraz kružnice.
Základní kružnice inverze je kružnicí samodružných bodů inverze.
Obrazem kružnice procházející středem inverze je přímka.
Obrazem každé jiné kružnice je kružnice.
Každá kružnice, která je kolmá k základní kružnici inverze, je samodružná.

2.16 Obraz dvojice kružnic.
Ke každé dvojici protínajících se kružnic existuje kruhová inverze, která tyto kružnice zobrazí do přímek. Střed takové inverze leží v jednom z průsečíků daných kružnic. (Bývá výhodné vést základní kružnici inverze druhým z průsečíků.)

Ke každé dvojici dotýkajících se kružnic existuje kruhová inverze, která tyto kružnice zobrazí do rovnoběžných přímek. Střed takové inverze leží v bodě dotyku daných kružnic.

Ke každé dvojici neprotínajících se kružnic existuje kruhová inverze, která tyto kružnice zobrazí do kružnic soustředných. Střed takové inverze je v jednom základním bodě svazku kružnic, které protínají danou dvojici kolmo. (Bývá výhodné vést základní kružnici kolmo k jedné z daných, ta pak zůstane samodružná.)

Komentáře.
ad 2.15: Je-li kružnice *l* kolmá k základní kružnici inverze se středem *S* a poloměrem *r*, platí pro její tečny ze středu S inverze $|ST| = r$. Mocnost bodu *S* ke kružnici *l* je r^2 a tedy $|SA||SA'| = r^2$ pro každý bod *A* kružnice *l*.

ad 2.16: Dotýkající se kružnice jsou kolmé na svou střednou, která je v určené kruhové inverzi samodružná. Protože kruhová inverze je konformní, budou jejich obrazy přímky (dané kružnice procházejí středem inverze) kolmé ke středné, tedy navzájem rovnoběžné. Tvrzení vyplývá také se souměrnosti obrazu kružnice podle spojnice středu inverze se středem zobrazované kružnice.

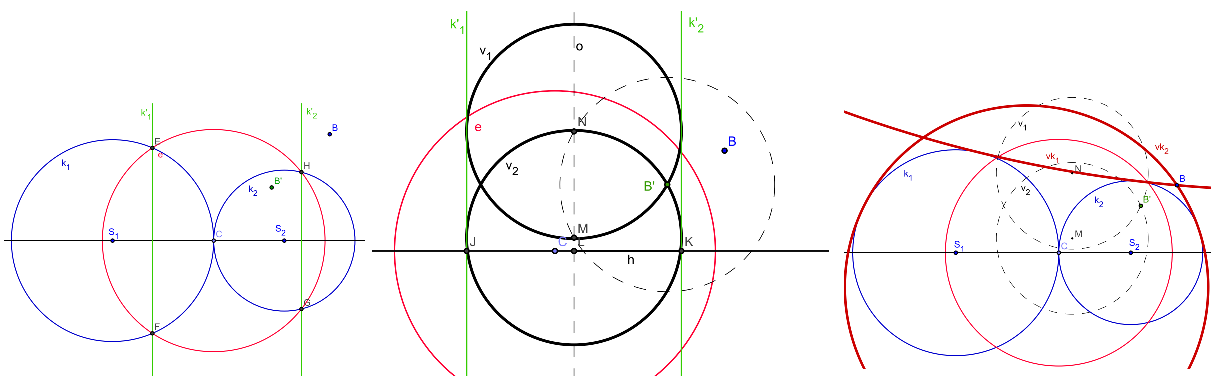
Dané dvě neprotínající se kružnice *k*, *l* určují svazek $\mathcal{K}$ kružnic k nim kolmých. Ty se (podle pravidla zachování úhlu) zobrazí do útvarů (přímek nebo kružnic) vesměs kolmých k obrazům *k´*, *l´* daných kružnic. Střed *S* inverze jsme zvolili v základním bodě svazku $\mathcal{K}$, proto se všechny kružnice svazku $\mathcal{K}$ zobrazí do svazku přímek se středem *S*. A tudíž jsou obrazy *k´*, *l´* k nim kolmé, tedy soustředné kružnice.

Užití kruhové inverze v konstrukčních úlohách.

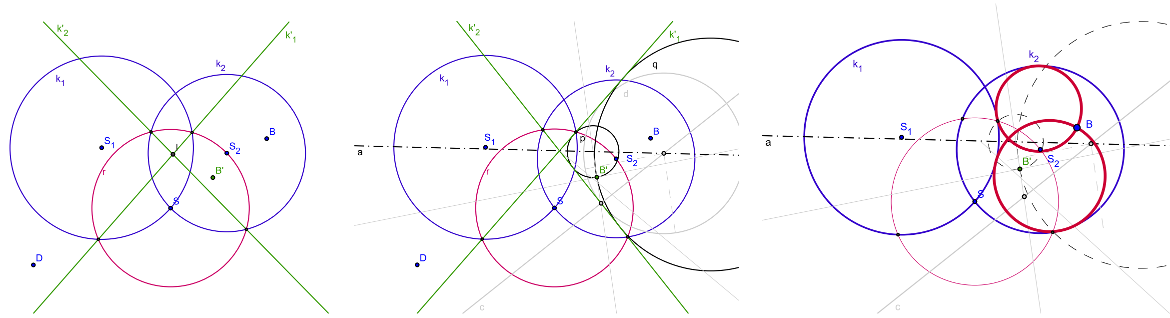
2.17 Příklad. Apolloniova úloha. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají dvou daných kružnic k_1, k_2 a procházejí daným bodem *B*.

Řešení. Pokud bod neleží na některé z kružnic či pokud nejsou dané kružnice soustředné či pokud mají prázdný průnik a daný bod leží uvnitř některé z nich (tyto zvláštní případy jsou snazší a přenecháváme je k rozboru čtenáři), pak podle vzájemné polohy daných kružnic zvolíme vhodně kruhovou inverzi a v ní vyřešíme pro obrazy zadaných kružnic a bodu některou z následujících úloh:

Pokud dané kružnice mají společný bod, zobrazíme je v kruhové inverzi se středem ve společném bodě na dvě přímky a řešíme Apolloniovu úlohu sestrojit všechny kružnice, které se dotýkají dvou přímek $p_1 = k_1´$, $p_2 = k_2´$ a procházejí bodem $P = B´$. (Obr. 18a, b, c, Obr. 19a, b, c). Pro tento případ má úloha dvě řešení.



Obr. 18a, b, c – dotýkající se kružnice

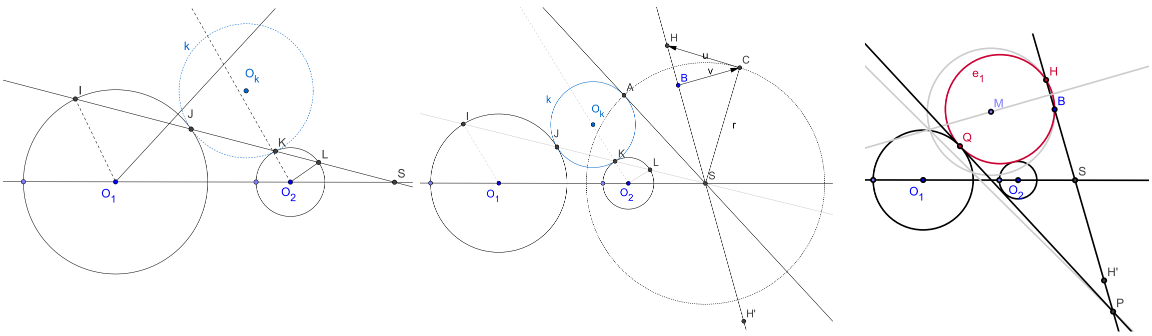


Obr. 19a, b, c – protínající se kružnice

Pokud dané kružnice nemají společný bod, zobrazíme je postupem uvedeným ve 2.15 v kruhové inverzi se středem v základním bodě svazku k nim kolmých kružnic na dvě soustředné kružnice a řešíme speciální případ úlohy pro soustředné kružnice $l_1 = k_1´$, $l_2 = k_2´$ a bod $P = B´$.

Úloha. Rozmyslete, zda, kdy a proč bude bod P uvnitř mezikruží.

Úloha má nejvýše 4 řešení.



Obr. 20a, b, c

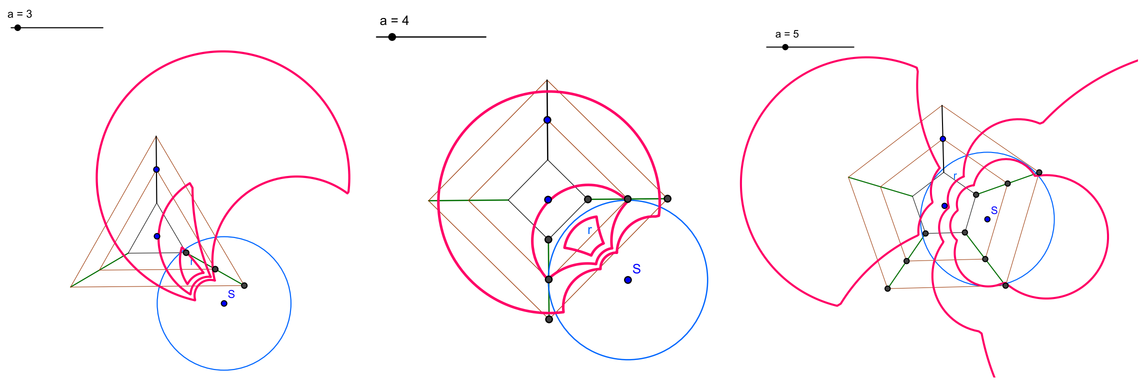
Jiné řešení. Úlohu lze řešit i bez užití kruhové inverze. Jednou z dalších možností je využít přímo mocnost bodu ke kružnici. Platí: Dotýká-li se kružnice k dvou daných kružnic k_1, k_2, prochází spojnice společného bodu dvojice k, k_1 a společného bodu dvojice k, k_2 některým středem stejnolehlosti daných kružnic k_1, k_2. Tento střed stejnolehlosti má navíc ke všem dotykovým kružnicím k stejnou mocnost (Obr. 20a). Tu umíme zjistit a pak už podle 1.7 umíme sestrojit další bod hledané kružnice k danému bodu B (Obr. 20b). Ke každému ze dvou středů stejnolehlosti kružnic k_1, k_2 najdeme dvě výsledné kružnice. Na obr. 20c je pouze konstrukce kružnice pro bod H, chybí konstrukce kružnice procházející bodem $H´$.

Odvození vztahů z obr. 20a. Přímka vedená bodem S protíná dané kružnice po řadě v bodech I, J, K, L. Pak trojúhelníky IO_1J, KO_2L a JO_kK jsou zřejmě rovnoramenné a přímky O_1I a $O_2K \equiv O_kK$ jsou rovnoběžné, stejně jako O_2L a $O_1J \equiv O_kJ$. Navíc $|SI||SJ| = m,\quad |SK||SL| = n$ pro libovolné výše uvedeným způsobem sestrojené body (m, n jsou mocnosti bodu S k daným kružnicím).

Proto platí: $\dfrac{|SK|}{|SI|} = \dfrac{|SL|}{|SJ|} = \kappa$ (koeficient stejnolehlosti),

Proto $|SK||SJ| = \dfrac{|SI||SJ||SK||SL|}{|SI||SL|} = |SI|\dfrac{|SK|}{|SI|}|SL|\dfrac{|SJ|}{|SL|} = |SI|\,\kappa\,|SL|\dfrac{1}{\kappa} = |SI||SL|$, tudíž $|SK||SJ| = \dfrac{|SI||SJ||SK||SL|}{|SI||SL|} = \dfrac{mn}{|SI||SL|} = \dfrac{mn}{|SK||SJ|}$ a proto $|SK||SJ| = konst$.

2.18 Obrazy mnohoúhelníků. Na obr. 21 vidíte obrazy trojúhelníků, čtverců a pětiúhelníků v různých kruhových inverzích se zobrazenými základními kružnicemi se středem *S*.



Obr. 21

3. Kulová inverze

Zobecněním kruhové inverze z rovinného zobrazení na zobrazení v prostoru dostáváme tzv. kulovou inverzi.

3.1 Pomocná definice. Kolmost kulových ploch. Kulové plochy jsou kolmé právě tehdy, jsou-li kolmé jejich normály podél společné kružnice, tj. prochází-li tečná rovina jedné plochy ve společném bodě ploch středem druhé z ploch.

3.2 Definice. Kulová inverze je zobrazení v prostoru, které je určeno kulovou plochou $\kappa \equiv (S;r)$, kde κ je základní kulová plocha inverze, *S* střed inverze a *r* poloměr inverze a které má následující vlastnosti:

1. bod *S* nemá obraz
2. bod *A* leží na polopřímce $\overrightarrow{SA}$ (pokud neuvažujeme kulovou inverzi se záporným koeficientem)
3. pro každý bod $A \neq S$ a jeho obraz *A´* platí: $|SA|.|SA'| = r^2$

Číslo r^2 se nazývá mocnost (koeficient) inverze. Kulová inverze je zobrazení samo k sobě inverzní, tj. obrazem bodu *A´* je bod *A*.

3.3 Konstrukce obrazu bodu v kulové inverzi. Každý bod, který náleží základní kulové ploše inverze je samodružný. Obraz ostatních bodů *A* sestrojíme ve středových rovinách (procházejících bodem *A*) plochy κ jako obraz bodu *A* v kruhové inverzi se základní kružnicí, kterou je hlavní kružnice plochy κ ve zvolené středové rovině. **Vlastnosti kulové inverze** vyplývají z vlastností kruhové inverze. Uvedeme je opět nejprve ve výčtu. Důkazy či komentáře k vlastnostem, které nejsou zřejmým přímým důsledkem definice či vlastností dříve zmíněné kruhové inverze, uvedeme dále.

3.4 Kulová inverze je konformní zobrazení.

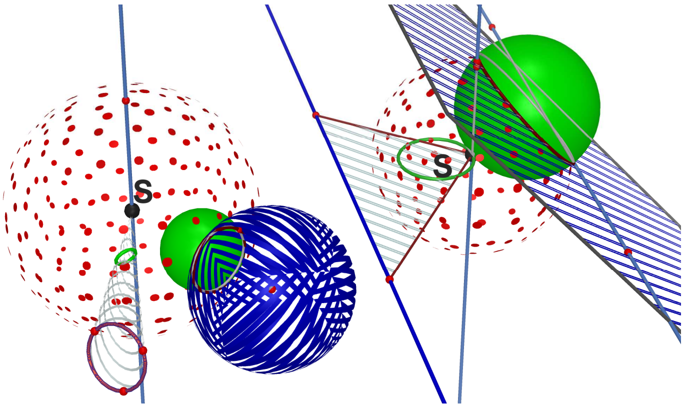
3.5 Obraz bodu v kulové inverzi. Každý bod základní kulové plochy inverze je samodružný. Obraz vnitřního bodu $A \neq S$ základní kulové plochy leží vně této plochy a naopak.

3.6 Obraz přímky.
Každá přímka procházející středem inverze je samodružná.
Obrazem každé jiné přímky je kružnice procházející středem inverze.

3.7 Obraz kružnice.
Každá kružnice základní kulové plochy inverze je kružnicí samodružných bodů inverze.
Obrazem kružnice procházející středem inverze je přímka.
Obrazem každé jiné kružnice je kružnice.
Každá kružnice, která je kolmá k základní ploše inverze, je samodružná.

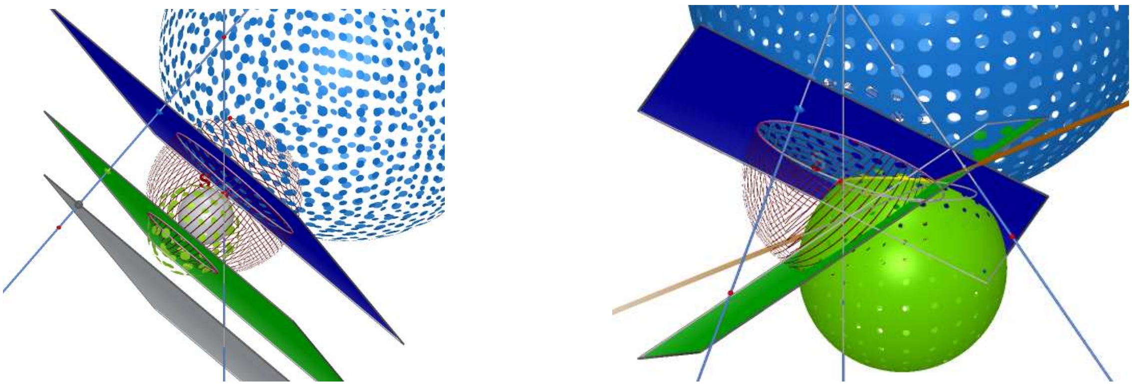
3.8 Obraz roviny.
Každá rovina procházející středem inverze je samodružná.
Obrazem každé jiné roviny je kulová plocha procházející středem inverze.

3.9 Obraz kulové plochy.
Základní kulová plocha inverze je plochou samodružných bodů inverze.
Obrazem kulové plochy procházející středem inverze je rovina.
Obrazem každé jiné kulové plochy je kulová plocha.
Každá kulová plocha, která je kolmá k základní ploše inverze, je samodružná.



Obr. 22

3.10 Obraz svazku rovin.
Svazek rovnoběžných rovin se zobrazí do svazku dotýkajících se kulových ploch. Plochy se dotýkají ve středu inverze. (Obr. 23a)

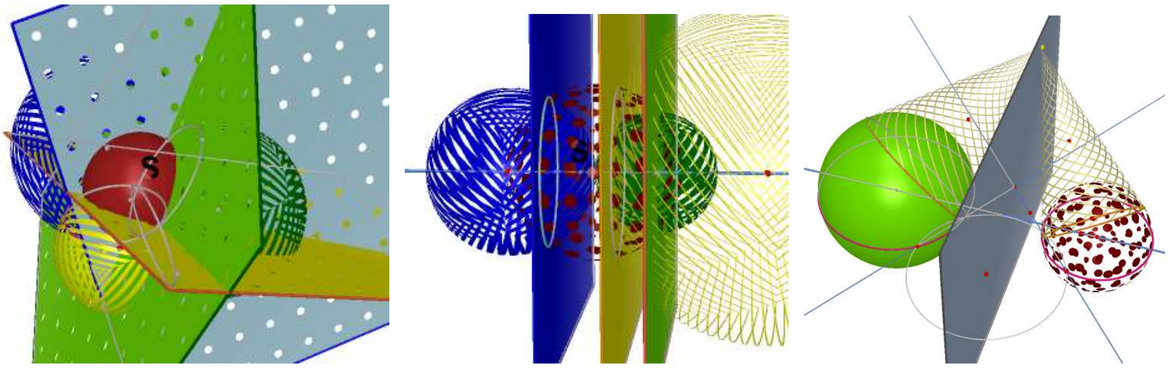


Obr. 23a, b

3.11 Obraz množiny kulových ploch.
Ke každé trojici kulových ploch se společným bodem existuje kulová inverze, která tyto plochy zobrazí do rovin. Střed takové inverze leží v jednom z průsečíků daných ploch (Obr. 24a).

Ke každému svazku dotýkajících se kulových ploch existuje kulová inverze, která tyto plochy zobrazí do rovnoběžných rovin. Střed takové inverze leží v bodě dotyku daných ploch (Obr. 24b).

Ke každé dvojici neprotínajících se kulových ploch existuje kulová inverze, která tyto plochy zobrazí do soustředných kulových ploch. Střed takové inverze je v jednom základním bodě svazku kulových ploch, které protínají danou dvojici kolmo. Na obr. 24c je rovina bodů, které mají stejnou mocnost k oběma kulovým plochám – obdoba chordály dvou kružnic v rovině.



Obr. 24a, b, c

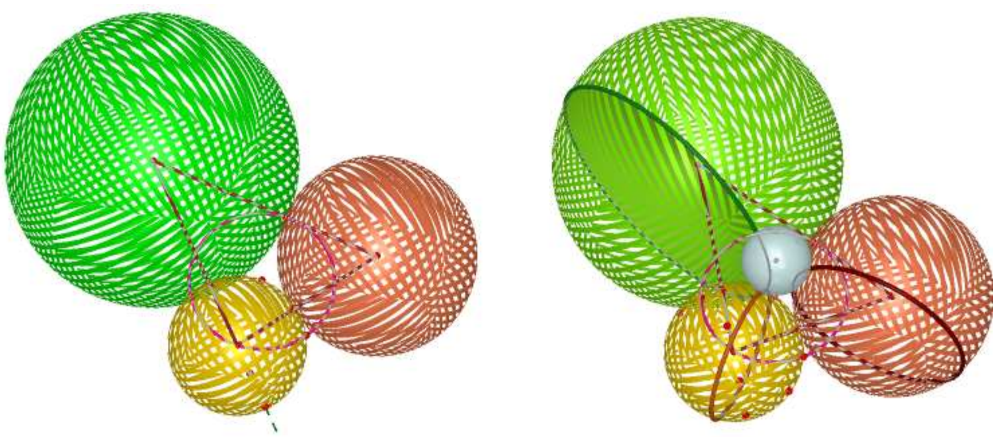
3.12 Úloha. Najděte bod, z něhož lze vést kuželové plochy o stejně dlouhé straně ke čtyřem kulovým plochám rozmístěným ve vrcholech čtyřstěnu. Kulové plochy mají po dvou prázdný průnik.

3.13 Úloha. Rozmyslete, jak byste s pomocí kulové inverze sestrojili kulovou plochu dotýkající se čtyř daných kulových ploch. Kolik řešení může mít úloha v obecném případě? (Skutečné modelování řešení úlohy 3.13 je nesmírně pracné.)

3.14 Úloha. Další prostorovou analogii Apolloniovy úlohy řešte bez pomoci kulové inverze. Sestrojte všechny kulové plochy procházejí daným bodem a dotýkající se tří daných po dvou různoběžných rovin.

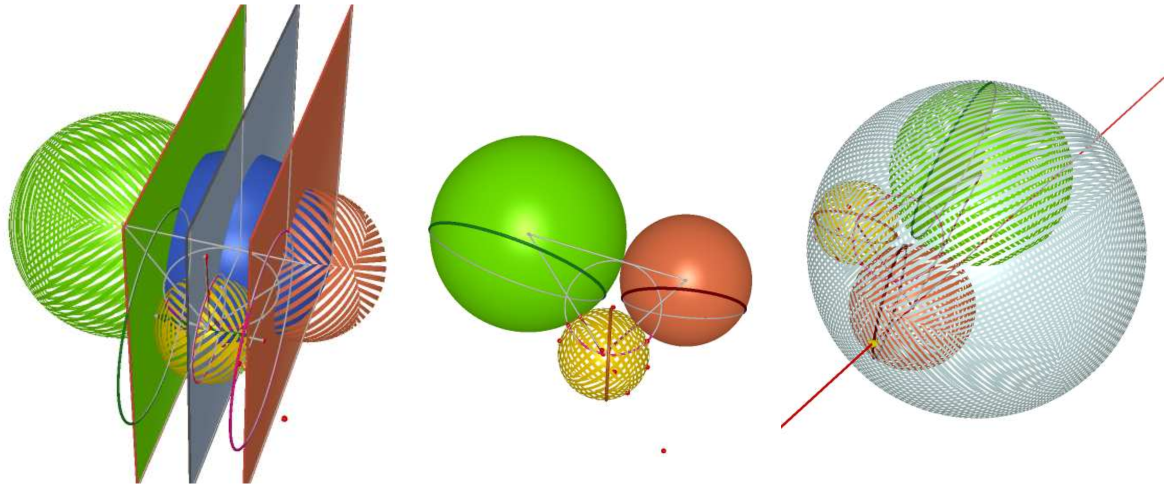
3.15 Úloha. Sestrojte společné tečné roviny trojice kulových ploch, které mají po dvou prázdný průnik a leží navzájem vně. Kolik jich je? *Návod:* K řešení stačí stejnolehlost.

3.16 Příklad. (Obr. 25a, b) Jsou dány tři kulové plochy κ_1, κ_2, κ_3, které se mají po dvou společný vnější dotyk. Najděte množiny bodů dotyku kulových ploch, které se dotýkají současně všech tří kulových ploch κ_1, κ_2, κ_3 s těmito plochami.



Obr. 25a, b

Řešení. Při použití kulové inverze získáme odpověď snadno. Zvolme kulovou inverzi tak, aby její základní kulová plocha měla střed v bodě dotyku dvou daných ploch (zvolme κ_1, κ_2) a aby protínala třetí plochu κ_3 kolmo. Obrazy zadaných ploch jsou dvě rovnoběžné roviny, které se dotýkají třetí – samodružné kulové plochy κ_3. Sestrojíme množinu středů všech kružnic, které se získaných obrazů. Pomocí ní pak množiny bodů dotyku na κ_3, κ'_1, κ'_2. Jsou to: hlavní kružnice plochy κ_3 ležící v rovině souměrnosti vrstvy κ'_1, κ'_2 a navzájem shodné kružnice dvojnásobného poloměru v rovinách κ'_1, κ'_2. Jejich obrazy v téže kulové inverzi jsou kružnice daných ploch κ_1, κ_2, κ_3.



Obr. 26a, b, c

Obrázky 26 ukazují obrazy daných kulových ploch ve zvolené inverzi (a), kružnice na kulových plochách, které jsou hledanými množinami bodů dotyku (b) a ukázku kulové plochy, která má s danou trojicí vnitřní dotyk (c).

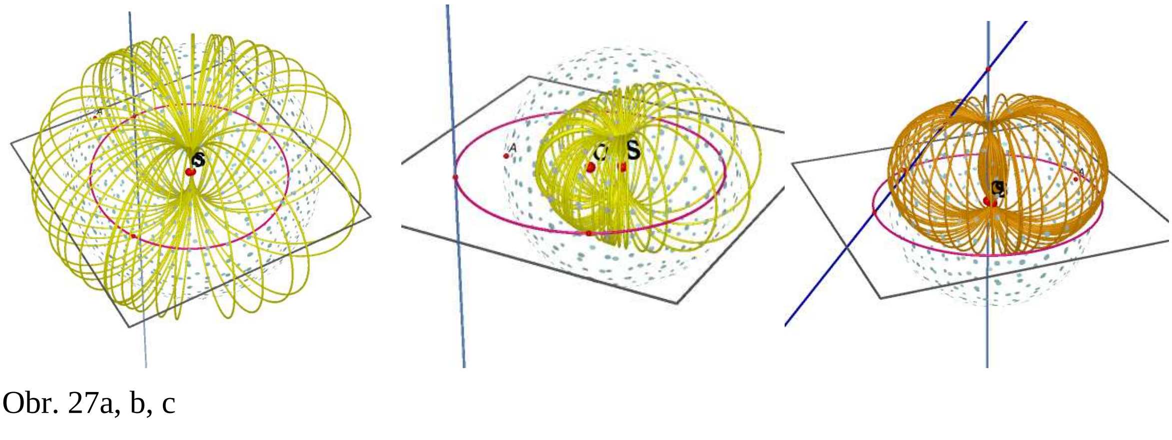
Problém: Chceme-li sestrojit některou dotýkající se kulovou plochu tří daných ploch, musíme najít její střed. Navrhněte nějakou konstrukci, znáte-li množiny bodů dotyku (Obr. 26b).

Poznámka: Mezi takto získanými dotykovými „kulovými“ plochami jsou i společné tečné roviny dané trojice. Kolik jich je?

Problém: Můžeme využít kulovou inverzi k získání množiny středů dotykových kulových ploch? (ne)

Plochy vzniklé kulovou inverzí. Pomocí kulové inverze však můžeme sestrojit i zajímavější plochy nežli kulové plochy či roviny požadované vlastnosti.

3.17 Obraz rotační válcové (Obr. 27a, b) **a kuželové** (Obr. 27c) **plochy**



Obr. 27a, b, c

Literatura:

[1] Drábek, K., Harant, F., Setzer,O.: Deskriptivní geometrie II. SNTL/ALFA, Praha: 1979

[2] Holubář, J.: O metodách rovinných konstrukcí. JČMF, Praha: 1949

[3] Horák, S.: Kružnice. Škola mladých matematiků sv. 16, ÚV MO, Praha: 1966

Literatura k úlohám:

[4] Holubář, J.: Množiny bodů v prostoru. Škola mladých matematiků sv. 54, ÚV MO, Praha: 1965, 1983

[5] Vasilev, N. B., Jegorov, A. A.: Zadači vsesojuznych matematičeskich olimpiad. Moskva: 1988

Úlohy k osmé přednášce

Úloha 8.1. *V prostoru jsou dány čtyři body, které neleží v jedné rovině. Kolik existuje různých rovnoběžnostěnů, které mají dané čtyři body ve svých vrcholech?*

Úloha 8.2. *Vrcholy čtyřstěnu* $ABCD$ *pravoúhle promítneme do dvou různých rovin, do průmětů* $A_1, B_1, C_1, D_1,\ A_2, B_2, C_2, D_2$. *Dokažte, že jednu z rovin (již se sestrojenými průměty) lze přemístit tak, aby byly přímky* $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ *rovnoběžné.*

Úloha 8.3. *Na kolik nepřekrývajících se čtyřstěnů je možno rozložit krychli? Určete minimální počet a zdůvodněte, že na menší počet to není možné.*

Úloha 8.4. *Délky hran krychle* $ABCDA'B'C'D'$ *jsou* 1cm. *Určete nejmenší vzdálenost mezi body kružnic, z nichž první je vepsaná stěně* $ABCD$ *a druhá prochází vrcholy* A, C, B'.

Úloha 8.5. *Ja dána rovina* ρ *a mimo ni dva různé body* A, B, $AB \not\perp \rho$. *Určete v rovině* ρ *množinu bodů* x, *jejichž spojnice s body* A, B *mají od roviny* ρ *stejné odchylky.*