Hýbání s body a pomocné limitní případy

Mgr. František Konopecký

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Hýbání s body a pomocné limitní případy

1. Úvod

Téma **hýbání s body** je netradiční, prakticky se nepřednáší. Je o technice, díky které můžete geometrické úlohy jak řešit, tak na složitá řešení přijít. Hýbání bodů a limitní případy poskytují neobyčejně silný nástroj, který funguje zhruba na třetinu všech těžších geometrických úloh, což už něco znamená. Také se dá rovnou říct, že hýbání prakticky nefunguje na konstrukční úlohy a na úlohy, kde je pozice bodů jasně určena. Potřebujete tedy aspoň částečnou volnost. Pokud chcete být více motivováni naučit se tuto metodu, zkuste nejprve sami vyřešit *příklad 5.21* a poté si pročtěte vzorové řešení.

1.1. Jak pracovat s tímto textem

Text je koncipován tak, aby pokud možno co nejlépe objasnil výhody a samotnou techniku posouvání bodů a zároveň ji naučil čtenáře používat.

Pro lepší zažití doporučuji k textu přistupovat aktivně. Nejprve zkusit příklady řešit bez pomoci, pak využívat hintů a na vzorová řešení se dívat až nakonec. A úplně nejdřív zkuste samozřejmě na třech podrobně zdůvodněných příkladech techniku pochopit a v oddílu **lehčí trénink** patřičně osvěžit.

2. Obsah

3. Cvičení s jednoduchými pohyby

V příkladech budeme ve složitých situacích hýbat několika body naráz, proto si nejprve nacvičíme hýbání na užitečných hýbacích miniúložkách. Jejich řešení najdete v *návodech ke cvičením.*

Cvičení 3.1. Na zahřátí: v bodech A a B v rovině se stejnou úhlovou rychlostí (a stejným směrem) otáčí dvě nerovnoběžné přímky. Jak se pohybuje jejich průsečík?

Cvičení 3.2. Po ramenech pravého úhlu kloužou konce zápalky, jak se pohybuje její střed?

Cvičení 3.3. Jsou dány přímky p, q, na nich pevné body P, Q a dále rovnoměrně se pohybující bod R po přímce p. Jak se v závislosti na pohybu bodu R pohybuje druhý průsečík S kružnice opsané ΔPQR a přímky q?

Cvičení 3.4. Je dána kružnice a na ní tětiva UV. Pohybuje-li se rovnoměrně bod W po oblouku z bodu U do V, jak se pohybuje střed vepsané kružnice ΔUVW?

Cvičení 3.5. Uvnitř kružnice se kotoulá dvakrát menší kružnice, na níž leží bod A. Jak se pohybuje bod A?

Cvičení 3.6. Vedle sebe stojí dvoje stejné hodiny, akorát jedny jdou o čtvrthodinu napřed. Jak se pohybuje střed spojnice konců velkých ručiček?

Cvičení 3.7. Po dvou kružnicích obíhají stejnou úhlovou rychlostí body M, N (každý po jedné, začátek pohybu je v obecné poloze). Co opisuje bod X úsečky MN, pro který $MX| = 2\,NX|$?

Cvičení 3.8. Dvě kružnice se protínají v bodech C a D. Bodem C se otáčí přímka, která protíná kružnice v dalších bodech E a F. Jakou množinu opisuje střed úsečky EF?

Cvičení 3.9. Dvě kružnice se protínají v bodech C a D. Bodem C se otáčí přímka, která protíná kružnice v dalších bodech E a F. Jestliže EFG tvoří rovnostranný trojúhelník, jak se pohybuje bod G?

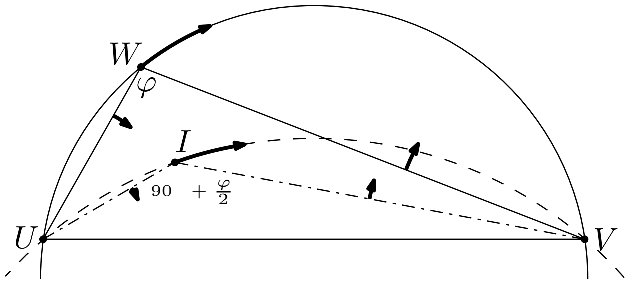
3.1. Návody ke cvičením

Cvičení 3.1. Průsečík se pohybuje po kružnici procházející body A, B. Přímky svírají stále stejný úhel, čímž se podle věty o obvodových úhlech odůvodní, že je množinou kružnice. Navíc se průsečík pohybuje pořád se stejnou úhlovou rychlostí.

Cvičení 3.2. Střed zápalky má od vrcholu pravého úhlu pořád vzdálenost půl zápalky, proto se pohybuje po kružnici se středem ve vrcholu úhlu a poloměrem půl zápalky.

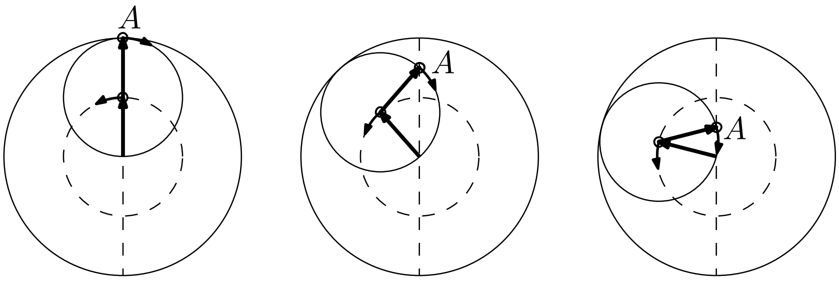
Cvičení 3.3. Všechny úsečky RS vzniklé pohybem bodu R mají stejný směr (jsou navzájem rovnoběžné). Plyne to z $\sphericalangle PSR| = 180^\circ - |\sphericalangle PQR$ = konst. Tím pádem, pokud se R pohybuje rovnoměrně po p, tak se pohybuje rovnoměrně i S po q.

Cvičení 3.4. Úhel u středu vepsané je závislý jen na úhlu u protějšího vrcholu, ten je ale podle věty o obvodových úhlech pořád stejný. Takže se střed vepsané pohybuje po kružnicovém oblouku. Navíc se pohybuje rovnoměrně, protože se obě osy úhlů rovnoměrně otáčí, a to poloviční úhlovou rychlostí než polopřímky UW a VW.



Obr. Cv.4

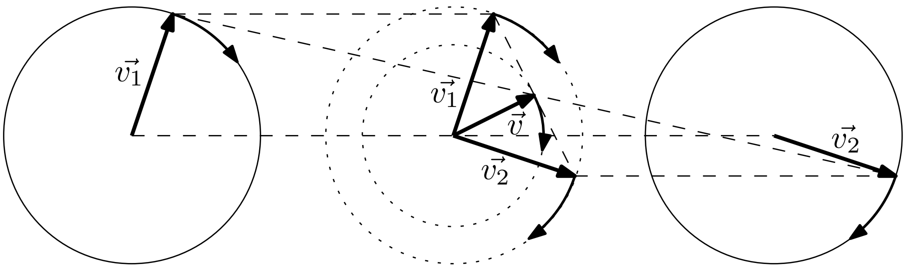
Cvičení 3.5. Bod A vykonává složení dvou pohybů: pohyb po kotoulající se kružnici, po které se rovnoměrně otáčí dokola, a zároveň pohyb celé malé kružnice.



Obr. Cv.5

Tato dvě otáčení jsou po stejně velkých kružnicích, jsou stejně rychlá, ale mají opačný směr. Ve výsledku se vodorovný pohyb vyruší a svislý se jakoby umocní. Bod A se tak pohybuje po průměru kružnice (což je úsečka), jako by se otáčel na kružnici kolmé k papíru a my se dívali zhora.

Cvičení 3.6. Představme si ručičky jako stejně rychle se otáčející vektory.



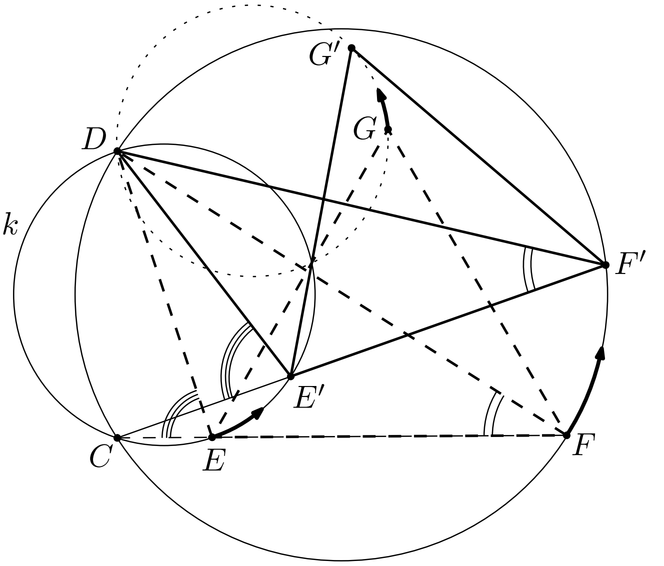
Obr. Cv.6

Při posunutí těchto vektorů do společného středu uprostřed zůstane jejich průměr $\vec{v} = \frac{\vec{v_1}+\vec{v_2}}{2}$ na stejném místě (jejich průměr je poloha středu spojnice). Vektory se otáčí stejně rychle, proto se vzájemná poloha trojice $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v}$ nemění a $\vec{v}$ má pořád stejnou délku a otáčí se stejně rychle jako $\vec{v_1}$ a $\vec{v_2}$.

Cvičení 3.7. Cvičení se řeší stejně jako v předešlé: posuneme vektory do stejného působiště (tentokrát je společné působiště ve dvou třetinách spojnice středů). Hledaný vektor $\vec{v} = \frac{2\vec{v_1}+\vec{v_2}}{3}$ přitom zůstane na místě a všechny tři vektory při rovnoměrném pohybu opět zachovávají formaci. Vektor v je tedy stále stejně velký a otáčí se rovnoměrně stejnou úhlovou rychlostí jako $\vec{v_1}$ a $\vec{v_2}$.

Cvičení 3.8. Totéž jako předchozí, jen je potřeba si uvědomit, že se body pohybují stejnou úhlovou rychlostí a řeší se to stejně jako předchozí dvě cvičení.

Cvičení 3.9. Při pohybu zůstávají úhly u E a u F stejné, proto jsou si všechny trojúhelníky DEF podobné.



Obr. Cv.9

Bod G je vždy jednoznačně určen úsečkou EF (navíc se zachováním poměrů), takže je konstelace bodů D, E, F, G pořád stejná (všechny čtyřúhelníky $DEFG$ jsou si podobné). Proto je úhel $\sphericalangle EDG| =$ i poměr $ED : DG = a$ při pohybu neměnný. Z toho plyne, že všechny pozice bodu G dostaneme otočením kružnice k o úhel kolem bodu D a zmenšením v poměru a. Otáčení přímky DG je navíc též rovnoměrné stejnou úhlovou rychlostí jako otáčení přímky CE, proto se i G pohybuje po své kružnici rovnoměrně.

4. Technika pohybů s body

Následují čtyři kroky, jejichž osnova může při řešení úloh hýbáním pomoci. Až si řešením vypracujete cit pro pohyb, nebude žádná osnova potřeba. K pochopení na začátku je však esenciální.

(i) Nejprve vyřešíme jednoduché speciální případy (speciální poloha bodu, rovnostranný trojúhelník, vhodné postavení ostatních bodů, symetrická pozice, atd.)
(ii) Zkoušíme, po jakých množinách se dá s body hýbat tak, aby se zachovalo zadání a pohlo se co nejméně bodů nebo vzdáleností. Přitom si všímáme vlastností pozice bodů v úloze.
(iii) Po nalezení vhodného pohybu vyřešíme limitní (krajní) případy.
(iv) Pokusíme se závěr zobecnit do „pohnuté“ pozice.

Osnovu si rovnou zažijeme na příkladech, aby se obecné poučky proměnily v činy. Začneme velmi jednoduchým.

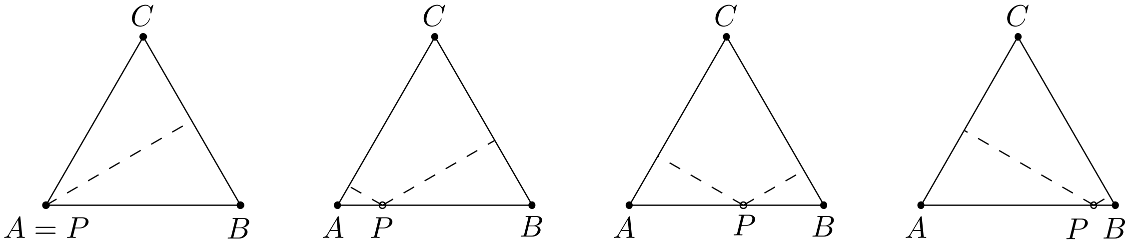
Příklad. Dokažte, že pro libovolný vnitřní bod P rovnostranného trojúhelníku ABC je součet jeho vzdáleností od stran stejný.

Řešení. Postupujme podle návodu.

(i) Speciální poloha je např. na hranici trojúhelníku nebo ve vrcholu. Ač zadání mluví jen o vnitřních bodech, vyřešení pro celý trojúhelník obsáhne i řešení zadané úlohy. Posazení do vrcholu nám řekne, že součet vzdáleností musí být roven velikosti výšky v.

(ii) Při obecném pohybu bodu P se mění všechny tři vzdálenosti. Při pohybu rovnoběžném s nějakou stranou se mění jen dvě, to bude hledaný pohyb.

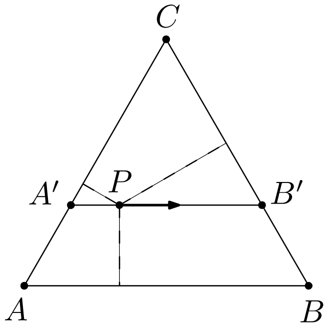
(iii) Nejkrajnější případ je vrchol trojúhelníku. Dalšími krajními případy jsou strany. Pohybujme nyní s bodem P rovnoměrně z A do B. Vzdálenost P od AC se tak rovnoměrně zvětšuje z 0 na v. Vzdálenost P od BC se naopak rovnoměrně při pohybu zmenšuje z v na 0 v krajních bodech. Už toto by téměř stačilo jako důkaz.



Obr. Ia

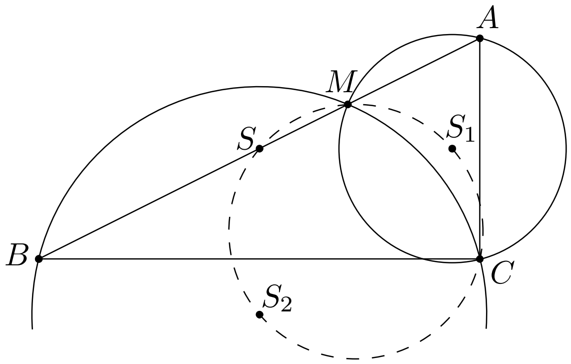
Ve skutečnosti je potřeba dokázat to líp, ale hýbání nám řeklo jak: v závislosti na délce AP se pomocí cosinu vyjádří vzdálenosti od stran a díky tomu, že se rovnoměrně zvětšují a zmenšují při pohybu, dopředu víme, že bude postup fungovat, tj. součet těchto vzdáleností vyjde konstantní.

(iv) Pohyb rovnoběžný se stranou si představme jako pohyb po straně trojúhelníku $A'B'C$, ke kterému je přilepeno $ABB'A'$. Během pohybu se vzdálenost P od AB nemění, takže se díky výsledku v $\Delta A'B'C$ ABC.



Obr. Ib

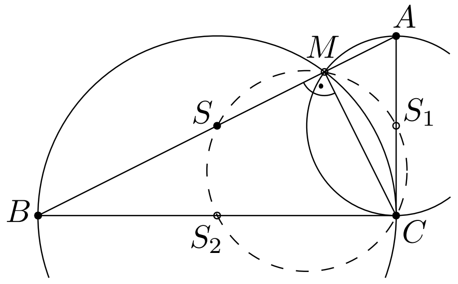
Příklad. Buď M libovolný bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S střed AB, a dále S_1, S_2 středy kružnic opsaných trojúhelníkům ACM, BCM. Dokažte, že S, S_1, S_2, M, C leží na jedné kružnici. Pro které M má tato kružnice nejmenší poloměr? (MO 56-II-3)



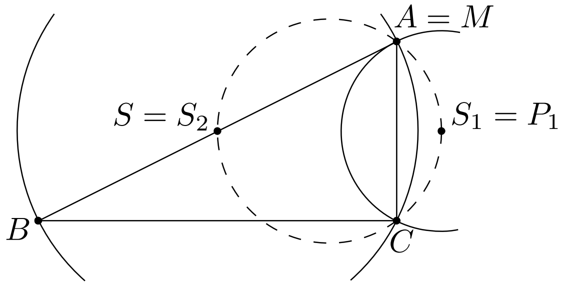
Obr. IIa

Řešení. Opět zkusme jet podle návodu. Předtím ještě označme P_1 průsečík kolmice na přeponu vedenou bodem A s osou strany AC a analogicky P_2 průsečík kolmice na přeponu vedenou bodem B s osou strany BC.

$M =$ [pata výšky z C], $M = A$, $M = B$, $M = S$. Pomocí pravých úhlů se v nich lehko ukáže platnost tvrzení. Na obrázcích vidíte první dva případy.

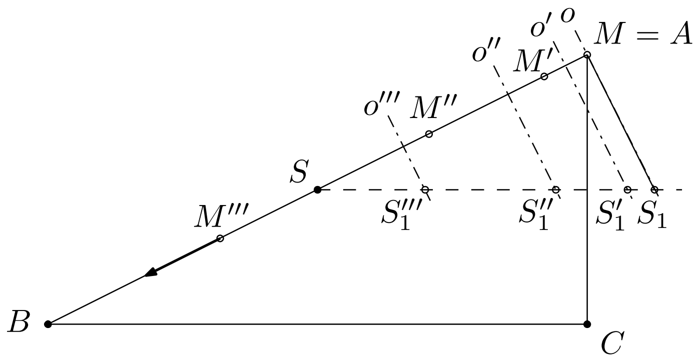


Obr. IIb



Obr. IIc

(ii) Tady nemusíme řešit jak hýbat – je jasné, že rovnoměrně bodem M po přeponě. Při tomto pohybu je dobré, že se rovnoměrně hýbou i body S_1, S_2. Bod S_1 je totiž průnik osy úsečky MA a osy strany AC. Osa úsečky MA se pohybuje poloviční rychlostí jako bod M, a díky tomu se rovnoměrně pohybuje i S_1 (kdybychom chtěli být přesní, řekli bychom, že existuje lineární závislost, kterou jde lehce vyjádřit, ale nejlépe ji uvidíme pomocí hýbání).

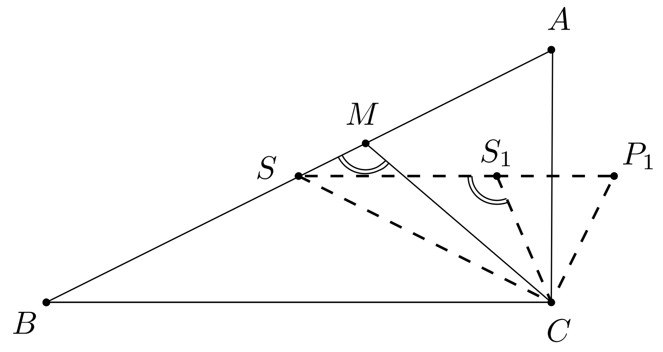


Obr. IId

(iii) Pro krajní polohu $M = A$ platí $S_1 = P_1$ a $S_2 = S$, pro druhou krajní polohu $M = B$ je

$S_1 = S$ a $S_2 = P_2$. Obě tyto pozice bodu M splňují triviálně zadání úlohy a navíc jsou počáteční a koncovou pozicí pohybu bodu M.

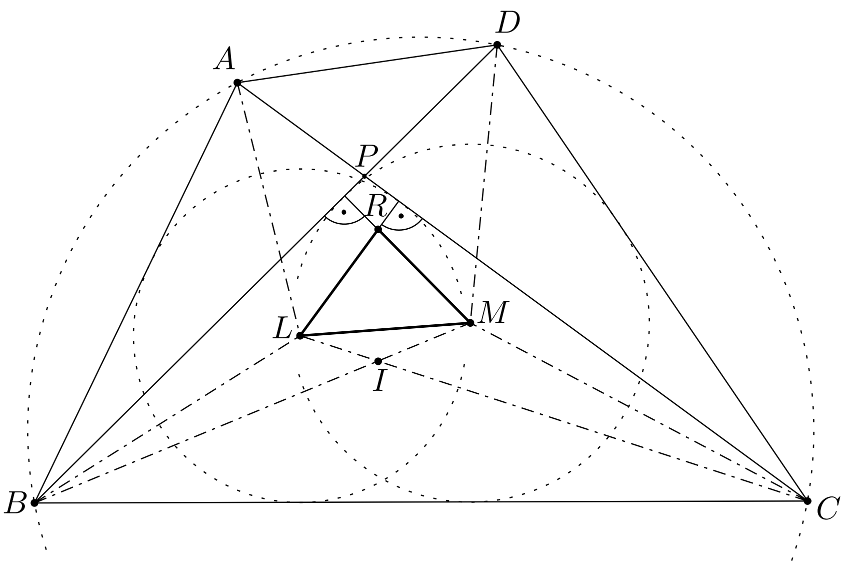
(iv) Zvolme nějakou obecnou polohu bodu M. Předchozí hýbání nás navádí buď na spirální podobnost (úsečky AB a P_1S si i s pohyby bodů M a S_1 odpovídají ve spirální podobnosti se středem v C) nebo na všimnutí odpovídajícího si měnění úhlů BMC a SS_1C.



Obr. IIe

Podobnost $\Delta ABC \approx \Delta P_1SC$ dostaneme velice rychle. Z vlastností vzájemně odpovídajícího pohybu bodů M a S_1 máme $AM| : MB| = P_1S_1| : S_1S|$, což dává rovnost úhlů BMC, SS_1C vyznačených na obrázku IIe. Rovnost zmíněných úhlů je ekvivalentní s tím, že S, M, S_1, C leží na kružnici. Analogicky se ukáže, že na téže kružnici leží i bod S_2, čímž je úloha vyřešena.

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$, v něm střed L kružnice vepsané trojúhelníku ABC a střed M kružnice vepsané trojúhelníku DBC. Označme l přímku kolmou na AC procházející bodem L, dále m přímku kolmou na BD procházející bodem M a nakonec R průsečík přímek l a m MLR rovnoramenný. (MO 56-III-2)

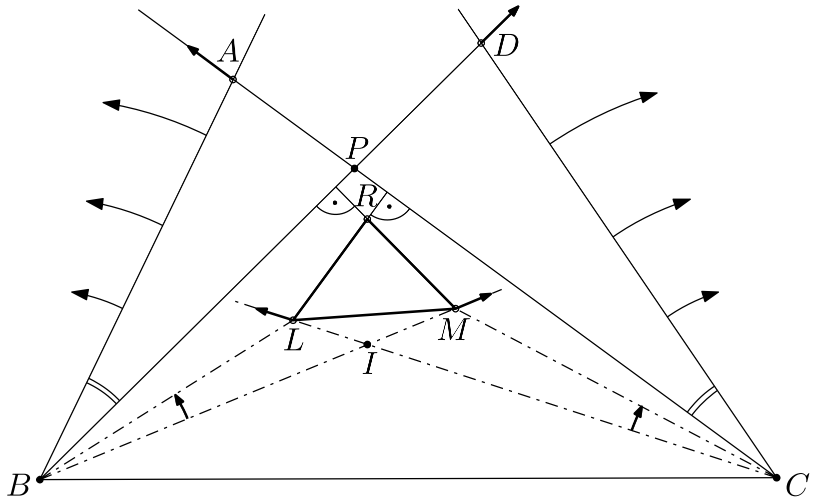


Obr. IIIa

Řešení. Označme ještě P průsečík úhlopříček a I střed vepsané trojúhelníku PBC. Dál postupujme podle návodu.

(i) V případě symetrické pozice se řešení nahlédne ze symetrie, což se bohužel nebude dát rozšířit do obecné pozice ... tady tentokrát nepochodíme.

(ii)-(iii) Hýbání je v této úloze složitější. Nabízí se hýbání bodem A po kružnici (aby $ABCD$ zůstal tětivový), ale při něm se hýbou důležité body L a R příliš rozdílně. Proto (předčasně) už v kroku (ii) nahlédněme limitní pozici degenerovaného případu $A = D = P$. V ní nastane zároveň $L = M = R = I$. A teď s ní zkusme nějak pohnout, aby se body pohybovaly „hezky“. Tím hezkým pohybem je ponechání pevného trojúhelníku PBC a otáčení s polopřímkami $\mapsto BA$ a $\mapsto CD$ stejnou úhlovou rychlostí, ale opačným směrem. Při tomto pohybu zůstává $ABCD$ tětivový a body L a M se pohybují navzájem odpovídajícím způsobem po pevných osách úhlů PCB a PBC. Díky tomu bude mít úsečka LM stále stejný směr (a v kombinaci se stále stejným směrem přímek m a l posléze obdržíme řešení).



Obr. IIIb

To už je hledaný hezký pohyb, který dořešíme v následujícím bodu.

(iv) Podle věty uu jsou trojúhelníky BIL a CIM podobné, takže poměr $|LI| : |MI| = |BI| : |CI|$ je při pohybu konstantní, což znamená, že přímka LM má při našem pohybu pořád stejný směr. Zbývá dokázat, že je to pro rovnoramennost trojúhelníku LMR ten správný směr – směr svírající se zadanými kolmicemi l a m stejný úhel; směr kolmic l, m se totiž nemění, jsou určeny přímkami AC a BD. Vlastně stačí dokázat, že $LM \perp PI$ (PI je totiž osou úhlu BPC a svírá s přímkami l a m stejný úhel). A LM PI už dostaneme po krátkém počítání úhlů (nejdříve spočtením úhlu přímek LM a BC – přes tětivový čtyřúhelník $BCML$, poté úhlu přímek BC a PI – využitím faktu, že PI je osou úhlu).

4.1. Shrnutí techniky

Při řešení úloh hýbáním **si všímejte degenerovaných případů**, **krajních poloh** a **speciálních případů**. Když se vám budou zdát jasné (že v nich zadání skoro zřejmě platí), tak s nimi zkuste nějakým způsobem pohnout, aby se body hýbaly „hezky“ a abyste dostali všechny obecné případy, na které se úloha vztahuje.

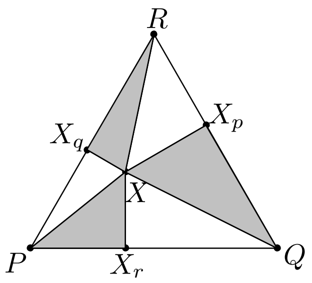
Taky pamatujte, že **samotné hýbání často nic nedokazuje**. Ale v naprosté většině případů vám dá návod, jak pomocí poměrů, podobností, posunutí, krajních případů nebo nějakých invariantních vlastností úlohu řešit.

4.2. Lehčí Trénink

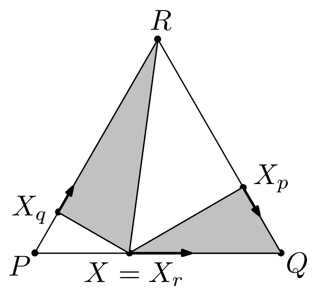
V následujících úlohách si trénujte cit pro nalezení a pochopení pohybu a jeho využití. Spíš než na samostatné řešení se soustřeďte na důkladné zdůvodnění, že vám pohyb poskytnutý v návodu už dává řešení nebo myšlenku řešení.

Příklad 4.1. V rovnostranném trojúhelníku PQR je uvnitř bod X. Z něj vedou na strany p, q a r kolmice s patami X_p, X_q a X_r. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků XPX_r, XQX_p a XRX_q je polovina obsahu celého trojúhelníku PQR. (Myreg 2009)

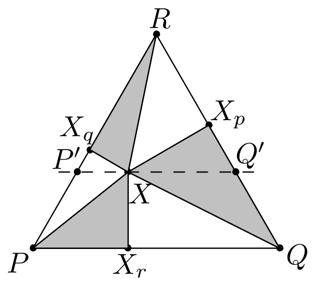
Návod.



Obr. 1a



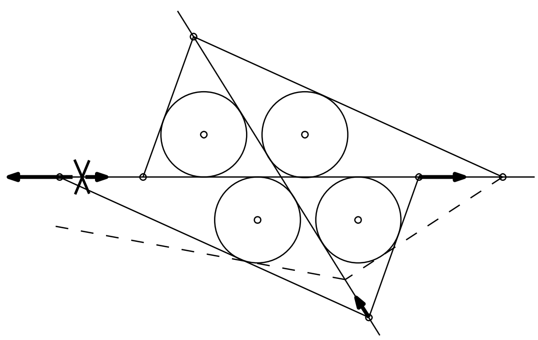
Obr. 1b



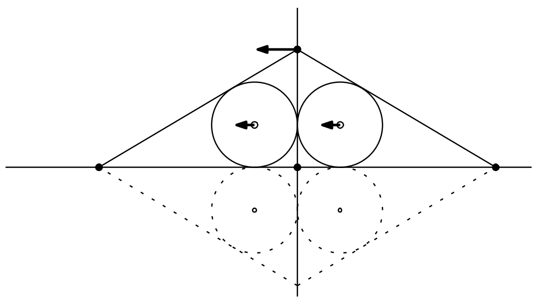
Obr. 1c

Příklad 4.2. Ve čtyřúhelníku $EFGH$ s průsečíkem úhlopříček P jsou trojúhelníkům EFP, FGP, GHP a HEP vepsány kružnice. Dokažte, že jestliže jsou tyto kružnice shodné, tak je čtyřúhelník kosočtvercem. (PraSe 26-6-6)

Návod. Začněte ukázkou půlení se úhlopříček (spojováním bodů do čtyřúhelníku ze symetrické pozice) a pokračujte kolmostí úhlopříček (sledováním stejného obsahu trojúhelníků, stejných poloměrů vepsaných kružnic a vzrůstajícího rozdílu v obvodu trojúhelníků (vzpomeňte na vzorec $S = \frac{1}{2}o \quad r$)).



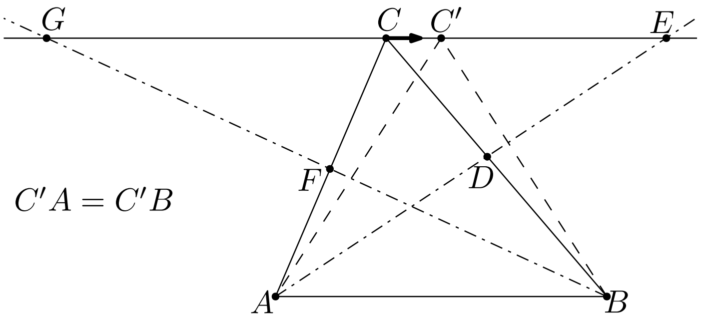
Obr. 2a



Obr. 2b

Příklad 4.3. ABC je trojúhelník s osami úhlů AD a BF. Přímky AD a BF protínají přímku rovnoběžnou s AB vedenou bodem C po řadě v bodech E, G. Z předpokladu $|FG| = |DE|$ vyvoďte $|CA| = |CB|$. (shortlist 1990/12.)

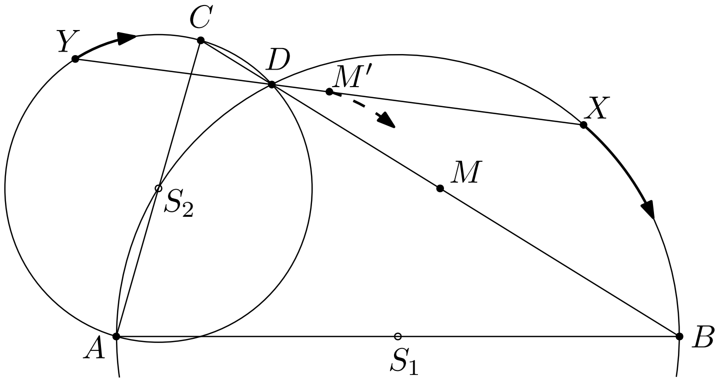
Návod. Zkoumejte vzájemnou změnu délek $|FG|$, $|DE|$ při hýbání do symetrické polohy.



Obr. 3

Příklad 4.4. Jsou dány kružnice k_1 a k_2 nad průměry AB a AC. Průsečíkem D obou kružnic ($D \neq A$) je vedena přímka, která protíná k_1 podruhé v bodě X ($X \neq D$) a k_2 podruhé v bodě Y ($Y \neq D$). Body M a M' jsou po řadě středy úseček BC a XY. Ukažte, že $\sphericalangle AM'M$ je pravý úhel. (PraSe 26-6-8)

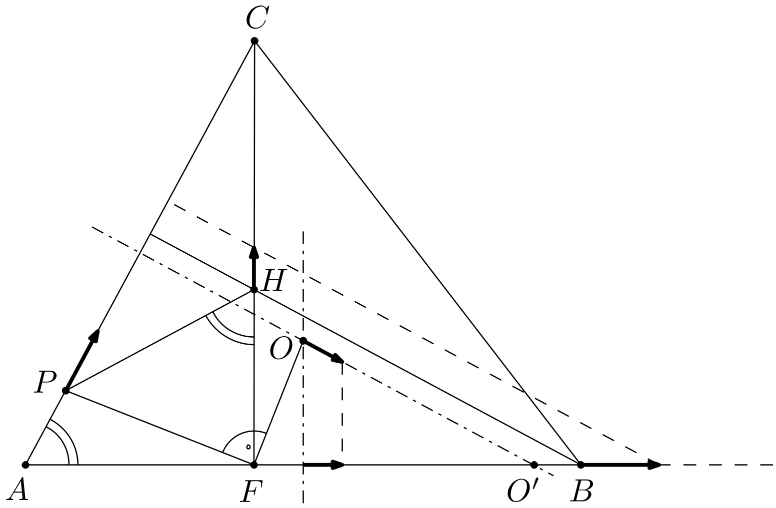
Návod. Otáčejte rovnoměrně přímkou XY a zkoumejte pohyb bodu M'.



Obr. 4a

Příklad 4.5. Trojúhelník ABC je ostroúhlý s $|BC| > |AC|$. Označme O střed opsané, H ortocentrum, F patu výšky z C. Přímka kolmá na FO vedená bodem F protíná stranu AC v bodě P. Ukažte, že $|\sphericalangle FHP| = \alpha$. (shortlist 1996/12.)

Návod. Začněte v limitní poloze $|BC| = |AC|$ a pohybujte se podle obrázku do limitní polohy $P = C$.



Obr. 5

5. Další příklady

Pokud ještě pořád nejste přesvědčeni o síle prezentované metody, tak velmi doporučuji zkusit řešit **příklady 5.14** a **5.21** a poté si důkladně nastudovat vzorové řešení.

5.1. Lehké příklady

Příklad 5.6. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální. (MO 50-II-3)

Příklad 5.7. Který trojúhelník s jednotkovým obvodem má největší obsah?

Příklad 5.8. Uvnitř rovnostranného trojúhelníku KLM o obsahu S leží bod N. Buď K', L' a M' body po řadě na stranách KL, LM a MK takové, že $NK' \parallel MK$, $NL' \parallel KL$ a $NM' \parallel LM$. Průsečíky os úseček NK', NL' a NM' tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Ukažte, že $S = 3T$. (MO 55-I-2)

Příklad 5.9. Kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se dotýkají v bodě T a je $r_1 < r_2$. Body A, B leží po řadě na kružnicích k_1, k_2 tak, že je úhel ATB pravý. Dokažte, že takto určené přímky AB procházejí jedním bodem a najděte množinu středů úsečky AB. (MO 57-II-2)

Příklad 5.10. Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že AB je průměr kružnice opsané, O je střed AB, P je průsečík úhlopříček a platí, že $\sphericalangle APB| = 2\sphericalangle COD|$. Tečny v bodech C, D se protnou v dalším bodě Q. Za předpokladu $AB| = 2$ určete vzdálenost $OQ|$. (PraSe 26-6-5)

Příklad 5.11. Je dán rovnoběžník, jehož stranám jsou z vnějšku připsány čtverce. Ukažte, že středy těchto čtverců tvoří další čtverec.

Příklad 5.12. Najděte nejlepší konstanty p, q takové, že nerovnost

$$p < \frac{a + t_b}{b + t_a} < q$$

platí pro libovolný trojúhelník se stranami a, b a jim příslušnými těžnicemi t_a, t_b. (MO 57-III-6)

5.2. Středně těžké příklady

Příklad 5.13. Pro dané číslo n najděte n-úhelník, který bude mít obvod 1 a největší možný obsah. (Zajímavý známý příklad)

Příklad 5.14. V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky stejně dlouhé. Ukažte, že pokud vně každé straně připíšeme rovnostranný trojúhelník, tak jsou spojnice protějších středů těchto trojúhelníků na sebe kolmé. (shortlist 1992/5.)

Příklad 5.15. V nerovnoramenném trojúhelníku TUV jsou na stranách UV, TV po řadě body P, Q tak, že je čtyřúhelník $TUPQ$ tětivový. Příčky TP a UQ se protínají v bodě X. Dokažte, že leží-li bod X na výšce z bodu V, tak je už nutně ortocentrem trojúhelníku TUV. (MO 56-III-5)

Příklad 5.16. Ukažte, že existuje konečná množina bodů M v rovině taková, že pro libovolný bod P z M existuje právě 2009 bodů množiny M, které mají od P vzdálenost 1. (shortlist 1993/1.)

Příklad 5.17. Buď S bod na straně AB v ostroúhlém trojúhelníku ABC a dále X, Y po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC. Najděte polohu bodu S, pro niž bude mít trojúhelník SXY minimální obsah. (MO 52-II-2)

Příklad 5.18. Říkáme, že kružnice k půlí kružnici l, pokud ji protíná v průměru. Jsou dány tři kružnice k_A, k_B, k_C se středy A, B, C. Ukažte, že body A, B, C leží na přímce, právě když neexistuje jednoznačná kružnice, která půlí všechny tři kružnice k_A, k_B, k_C. Dále ukažte, že pokud je více půlících kružnic, tak všechny procházejí jistými dvěma body. (shortlist někde kolem 1991)

5.3. Těžší příklady

Příklad 5.19. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q a někde mezi nimi bod A. Bod P se pohybuje po p a bod Q po q tak, že úhel PAQ zůstává konstantní. Ukažte, že v rovině existuje ještě jeden bod A', pro který se úhel $PA'Q$ nemění. (Pepa 2009)

Příklad 5.20. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s obvyklým značením úhlů α, β, γ, δ. Poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD označme R_A. Analogicky označme R_B, R_C a R_D. Ukažte, že $R_A + R_C > R_B + R_D$ právě když $\alpha + \gamma > \beta +$. (shortlist 1996/17.)

Příklad 5.21. Je dán trojúhelník DEF. Kružnice procházející body E, F protíná stranu DE v dalším bodě F' a stranu DF v dalším bodě E'. Buď H ortocentrum DEF a

H' ortocentrum $DE'F'$. Ukažte, že se přímky EE', FF' a HH' protínají v jednom bodě. (shortlist 1995/G8)

5.4. Hinty k příkladům

Pokud dlouho bušíte do úlohy, ale i tak nechcete vidět přímo řešení, jsou tu pro vás hinty.

4.1. Vyřešte zvlášť pro polohu $X = X_r$ a zvlášť v $PQQ'P'$. **4.2.** Hint nedorazil. **4.3.** Chování $AF| : FC|$. **4.4.** Spirální podobnost (nebo využití pohybu vektorů $\overrightarrow{S_1X}$ a $\overrightarrow{S_2Y}$). **4.5.** Rovnoměrný pohyb PH, jakožto stejnolehlost různých poloh PH. **5.6.** Konstantní strana, konstantní úhel. **5.7.** Elipsa. **5.8.** Krajní případ. **5.9.** Stejnolehlost. **5.10.** $C \to B$. **5.11.** Start z obdélníku. **5.12.** Degenerovaný případ; případy $b \geq t_a$ a $t_a > b$. **5.13.** Elipsa a potom správně rozřezat obsah. **5.14.** Degenerovaný začátek, spirální podobnost. **5.15.** Cèvova věta. **5.16.** Indukce. **5.17.** Podobnost s ABC. **5.18.** Mocnost. **5.19.** Bod A na ekvidistantě; zobrazit Q na p, pak rodina kružnic opsaných $PQ'A$. **5.20.** Chování $R_A + R_C - R_B - R_D$; případy $\max\{\beta, \delta\} < 90°$ a $\max\{\beta, \delta\} \geq 90°$. **5.21.** Pohyb průsečíkem kolmo na osu $\sphericalangle EDF$ a zároveň přímkami EE', FF' rovnoběžně.

5.5. Myšlenky řešení příkladů

Pokud vás nebaví proplétání dlouhými řešeními, jsou tu pro vás myšlenky řešení. Z nich byste měli pochopit, jak se dá úloha vyřešit, aniž by se dlouze odůvodňovaly jednotlivé kroky.

Příklad 4.1. Úlohu vyřešíme nejdřív pro limitní případ $X = X_r$, ve kterém musí tvrzení platit taky, a to skrze výpočty obsahů v závislosti na poloze X. Poté úlohu dořešíme pro čtyřúhelník $PQQ'P'$, který „přilepíme“ k limitnímu případu.

Příklad 4.2. Prakticky vše je popsáno v návodu. Předpokládáme nerovnost úseků úhlopříček a zobrazíme horní trojúhelník ve středové souměrnosti se středem P. Hýbáním, jehož záměrem je spojit rozpojené trojúhelníky, dojdeme ke sporu (viz obrázek 2a). Pro ukázání kolmosti úhlopříček hýbeme s bodem jako na obrázku 2b a za předpokladu zachování rovnosti úseků úhlopříček dojdeme ke sporu s vzorcem $S_\Delta = \frac{1}{2} r \cdot o$.

Příklad 4.3. Při naznačeném pohybu do symetrické polohy je $CF| : FA| = CB| : BA| > CA| : BA| = CD| : DB|$, takže je bod F více vzdálen od přímky GE než bod D. Navíc se úhel FGC při pohybu zvětšuje a úhel DEC se zmenšuje. To dá dohromady $|FG| - |DE > 0$ během pohybu až do stavu $|FG = |DE|$ při $C = C'$. Pro $C \neq C'$ tedy $|FG| \neq DE|$.

Příklad 4.4. (Myšlenka odlišná od vzorového řešení: přes spirální podobnost) Všechny trojúhelníky AXY jsou si i s polohou středu M' podobné (to vyjde z obvodových úhlů), a tak všechny polohy bodu M' dostaneme zobrazením všech poloh bodu X v otočení o konstantní úhel XAM' $\frac{|BA|}{|MA|}$. Výsledkem poloh M' je kružnice s průměrem AM.

Příklad 4.5. Limitní poloha $|BC| = |AC|$, kdy mimojiné $P = A$, splňuje zadání. Při rovnoměrném pohybu bodu B do finální pozice, ve které je $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$ a $P = H = C$, se P i H pohybují rovnoměrně, díky čemuž je každá poloha PH rovnoběžná se svou výchozí polohou $P = A$.

Příklad 5.6. Úhel SYX i velikost strany SX trojúhelníku SXY se při pohybu nemění. Největší trojúhelník se zadanou stranou a zadaným protějším úhlem je rovnoramenný trojúhelník. Lehkým dopočtem zjistíme, že X musí ležet na ose úhlu MSN, z čehož plyne konstrukce.

Příklad 5.7. U libovolného nerovnostranného trojúhelníku zafixujeme dva vrcholy a s třetím hýbeme po elipse (aby zůstával obvod konstantní). Nejprve z něj vytvoříme větší trojúhelník s jednou stranou rovnou třetině obvodu a pak fixací jiných dvou vrcholů dalším pohybem rovnostranný trojúhelník (přičemž se obsah opět zvětší). Každý nerovnostranný tak umíme zvětšením obsahu přeměnit na rovnostranný, ten je tím pádem největší.

Příklad 5.8. Zkoumaný trojúhelník je též rovnostranný a pořád stejně orientovaný. Při pohybu rovnoběžném s nějakou stranou se jedna osa nehýbe a průsečík zbylých dvou se pohybuje rovnoběžně s onou nehybnou osou. Proto se obsah nemění a stačí vypočítat obsah v limitní poloze, což je jednoduché.

Příklad 5.9. Při rovnoměrném otáčení kolmých přímek AT a BT se rovnoměrně a se stejnou úhlovou rychlostí pohybují body A, B. Proto můžeme na sebe kružnice i každou polohou bodů zobrazit v jisté stejnolehlosti a jejím středem procházejí všechny přímky AB. Množinu středů AB najdeme zobrazením jedné z kružnic v podobné vhodné stejnolehlosti.

Příklad 5.10. Dopočteme $|\sphericalangle CAD| = \frac{1}{4}|\sphericalangle CPD|$ a pohybujeme rovnoměrně celou tětivou CD (přímky AD, AC a BD se přitom otáčí stejnou úhlovou rychlostí, zachovávají se úhly). V krajní pozici pohybu je $B = C$ a úsekový úhel hýbané tětivy je roven $|\sphericalangle CPD| - 90^\circ$ z obecné polohy bodu P. To položíme do rovnosti s obvodovým úhlem CAD a po drobném zpětném dopočtu vyjde $|\sphericalangle COD| = 60^\circ$. Na závěr z předchozího vypočítáme $|QO| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Příklad 5.11. Pro obdélník tvrzení zjevně platí, vybereme si jednu jeho pevnou stranu a zbytek zkosíme. Vzhledem k pevnému středu čtverce nad zvolenou pevnou stranou se sousední dva středy čtverců pohybují stejně (jako by jeden druhému z oka vypadl při otočení o 90°), takže se při pohybu zachová pravoúhlost a stejné délky stran dokazovaného čtverce.

Příklad 5.12. Při převrácení nerovnosti dostaneme ty samé nerovnosti na opačných stranách, proto $p = \frac{1}{q}$ a stačí určit p. Degenerovaný případ $B = C$, ke kterému se lze s nějakým existujícím ΔABC libovolně přiblížit, říká $p \quad \frac{1}{4}$. Pro důkaz $p \geq \frac{1}{4}$ rozdělíme všechny trojúhelníky do skupin $b \quad t_a$ a $t_a > b$. První skupinu trojúhelníků vyřešíme pomocí trojúhelníkové nerovnosti $a + t_b > \frac{1}{2}b$ a druhou pomocí nerovnosti $t_b > \frac{1}{2}t_a$.

Příklad 5.13. Nejprve pomocí hýbání po elipse ukážeme, že musí být všechny strany stejně dlouhé, a poté ukážeme, že čtyřúhelník se třemi shodnými stranami má největší obsah, když je symetrický, neboli když jsou dva sousední úhly shodné. Pro celý n-úhelník to pak bude znamenat, že musí mít všechny strany i úhly stejně velké, a to splňuje jen pravidelný n-úhelník, který je tím pádem největší.

Příklad 5.14. Limitní případ $A = D$ je zřejmý ze symetrie. Při rovnoměrném posouvání úhlopříčky BD se rovnoměrně posouvají i středy připsaných trojúhelníků, ty protější vždy stejně, takže se pohybují rovnoběžně. To se zdůvodní pomocí spirální podobnosti. Díky výchozímu limitnímu případu tvrzení platí i pro všechny obecné polohy.

Příklad 5.15. Výchozí pozice je ta, kde jsou P, Q paty výšek a X ortocentrum. Body P, Q hýbeme rovnoběžně s výchozí polohou a přitom sledujeme, že se výraz $\frac{|UP|}{|PV|} \cdot \frac{|VQ|}{|QT|}$ monotónně zvětšuje/zmenšuje. Nejsou tak splněny podmínky *Cevovy* věty, proto po hýbání s PQ už bod X nemůže ležet na výšce z bodu V.

Příklad 5.16. Postupujeme indukcí. Nejprve vezmeme dva body se vzdáleností 1. Potom předpokládáme, že máme množinu M_k, ve které má každý bod P přesně k kamarádů vzdálených 1. Množinu M_{k+1} dostaneme sjednocením $M_k \cup M'_k$, kde M'_k je množina M_k posunutá o 1 vhodným směrem (takovým, že nevzniknou žádné dva nežádoucí body se vzdáleností 1). Nevhodných směrů je jen konečně mnoho a všech směrů je nekonečně, takže vhodný směr určitě existuje. Nakonec vezmeme M_{2009}.

Příklad 5.17. Pomocí hýbání ukážeme, že je trojúhelník SXY podobný trojúhelníku CAB. K tomu poslouží vyřešení krajních poloh $S = A$ a $S = B$, určení pohybů bodů X, Y v závislosti na S a pomoc dalších podobných trojúhelníků. Protože je SXY podobný trojúhelníku CAB, je pro jeho obsah jasně určující výška z bodu S na stranu XY, která je polovinou spojnice SC. Úsečka SC je nejmenší, právě když je SC výškou v trojúhelníku ABC.

Příklad 5.18. Vezmeme kružnice k_A a k_B a k nim nějakou půlící kružnici k. Pomocí mocnosti zdůvodníme, že průsečíky kružnice k s přímkou AB leží i na všech pohnutých kružnicích k půlících k_A, k_B. Pokud nejsou A, B, C na přímce, tak je pomocí nalezených pevných bodů půlící kružnice jasně určena. Pokud jsou A, B, C na přímce, tak buď pevné body pro různé dvojice kružnic splynou (a existuje nekonečně mnoho půlících kružnic), nebo nesplynou, půlící kružnice by musela procházet aspoň třemi různými body na přímce, což nelze.

Příklad 5.19. Nejdříve vyšetříme speciální případ kdy bod A leží na ekvidistantě. Vezmeme bod Q' na p tak, aby bylo QQ' kolmé na přímky p, q. Zjistíme, že kružnice opsané trojúhelníkům PAQ' mají všechny společnou tečnu t v bodě A. Označme $P_0 = p \cap t$. Pro všechny body A', pro které $|P_0A'| = |P_0A|$, z mocnosti platí, že kružnice opsané $\Delta PA'Q'$ se dotýkají přímky P_0A'. Za A' vezmeme druhý bod na ekvidistantě přímek. Proň se úhel $PA'Q$ nemění. Zobecnění pro obecný bod A se provede posunutím přímky q do obecné polohy a další konstrukcí, která je na dlouhé povídání – mrkněte na vzorové řešení ;)

Příklad 5.20. Díky možnosti cyklického přeznačení stačí ukázat implikaci $\alpha + \gamma > \beta + \delta \Rightarrow R_A + R_C - R_B - R_D$. Pro její důkaz zmenšujeme výraz $R_A + R_C - R_B - R_D$ na nulu při posunu bodu B. Přičemž postupujeme dvoufázově: pokud $\beta, \delta < 90$, tak nejprve posuneme bod D po úhlopříčce na Thaletovu kružnici nad AC, čímž docílíme $\delta \geq 90°$. V druhé fázi, s případným přeznačením takovým, aby platilo $\delta \geq 90°$, posuneme bod B na kružnici opsanou trojúhelníku ACD.

Příklad 5.21. Postavme trojúhelník DEF tak, aby byla osa $\sphericalangle EDF$ svisle a zafixujme pouze přímky se stranami e, f. Pohybujme průsečíkem přímek EE' a FF' vodorovně, přičemž zachováváme směr přímek EE', FF'. Čtyřúhelník $EFE'F'$ bude stále tětivový a ortocentra H, H' se budou pohybovat rovnoměrně a též vodorovně. Pro krajní polohy $E = F'$ a $E' = F$ je úloha triviálně splněna, mezi nimi se průsečík přímky HH' s trajektorií bodu G pohybuje rovnoměrně a nutně tak splývá s bodem G. Hotovo.

6. Řešení příkladů

6.1. Lehčí Trénink

Příklad 4.1.

Náznak řešení. Položme $PQ| = 1$. Bod X posuňme na nějakou stranu, čímž nám zaniknou dva trojúhelníky, ale protože je celé posouvání spojité bez zlomu, bude trvzení platit i pro tento limitní případ. Dál si položíme $PX_r| = a$ a vyjádříme obsahy obou zbylých trojúhelníků. Porovnáním obsahů se zjistí, že tvrzení pro limitní případ platí. Poté si k dokázanému limitnímu případu přidáme jakoby „odříznutou“ část trojúhelníku (aby byl X uprostřed v obecné poloze). Teď stačí ukázat tvrzení zvlášť pro „odříznutou“ část, a to už je kterýmkoli způsobem snadné.

Příklad 4.2.

Řešení. Nejprve ukážeme, že se úhlopříčky půlí, potom, že jsou na sebe kolmé.

Předpokládejme, že máme vyhovující čtyřúhelník $EFGH$. Vezměme jeho horní polovinu EGH a středově souměrně se středem P ji zobrazme jako na obrázku 2a u návodu. Kružnice se tak v celém čtyřúhelníku zobrazí na sebe navzájem a pokud byly úseky úhlopříček EP, PG různě dlouhé, tak se nám čtyřúhelník „nespojí“ (bod E se nezobrazí na G). Dále posunujeme zobrazeným bodem E' tak, abychom ho spojili s nezobrazeným G. Posunují se tím i body H' a G', oba jsou vždy jednoznačně určeny. Jak je vidět na obrázku 2a, bod G' na druhé straně putuje opačným směrem, než by měl, takže se tímto způsobem nikdy nevytvoří celistvý původní čtyřúhelník, což by se stalo, pokud by předtím existoval. To je spor a pro úseky úhlopříček platí $PE| = PG$ a analogicky $PF| = PH|$.

Pro důkaz kolmosti mějme čtyřúhelník, který má kolmé úhlopříčky jež se půlí. Otočme jednou jeho úhlopříčkou podle obrázku 2b a pro spor předpokládejme, že takto mohl vzniknout čtyřúhelník se shodnými kružnicemi. Z předchozí části víme, že se úhlopříčky půlí, z čehož podle vztahu $S_\Delta = \frac{1}{2}u \quad v \quad \sin$ plyne, že mají trojúhelníky stejný obsah (u, v jsou délky úseků úhlopříček). Obvod o_1 jednoho trojúhelníku je ale určitě větší než obvod o_2 jeho souseda (mají dvě strany o délkách u, v a různě dlouhé zbylé strany). Z jiného vztahu pro obsah trojúhelníku $S_\Delta = \frac{1}{2} r \cdot o$ tak plyne, že poloměry r vepsaných kružnic musí být různé, spor.

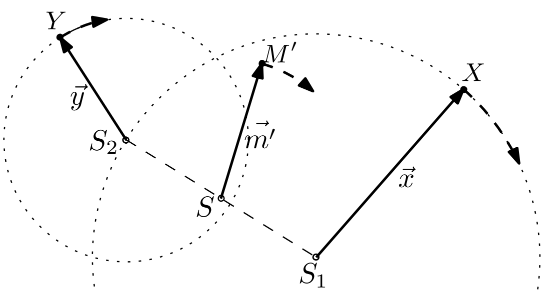
Příklad 4.3.

Řešení. Při pohybu bodu C doprava jako na obrázku 3 (do rovnoramenné polohy) je $|CF| : |FA| = |CB| : |BA| > |CA| : |BA| = |CD| : |DB|$, takže je bod F více vzdálen od přímky GE než bod D. Navíc se úhel FGC při pohybu zvětšuje a úhel DEC se zmenšuje, proto se výraz $\frac{1}{\sin|\sphericalangle FGC|} - \frac{1}{\sin|\sphericalangle DEC|}$ při pohybu zmenšuje, až dosáhne nuly v rovnoramenné pozici $C = C'$.

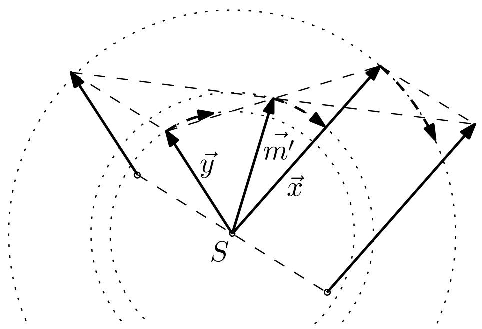
Označíme-li f vzdálenost F od GE a d vzdálenost D od GE, tak ze vztahů $|FG| = \frac{f}{\sin|\sphericalangle FGC|}$ a $|DE| = \frac{d}{\sin|\sphericalangle DEC|}$ pomocí nerovností $f > d$ a $\frac{1}{\sin|\sphericalangle FGC|} > \frac{1}{\sin|\sphericalangle DEC|}$ dostaneme $|FG| > |DE|$ během pohybu, přičemž rovnost $|FG| = |DE|$ nastane až pro $C = C'$. Proto $|FG| = |DE|$ platí jen za podmínky $|CA| = |CB|$.

Příklad 4.4.

Řešení. Označme S střed S_1S_2. Vyznačme si vektory $\vec{x} = \overrightarrow{S_1X}$, $\vec{y} = \overrightarrow{S_2Y}$ a $\vec{m}' = \overrightarrow{SM'}$. Pro tyto vektory platí $\vec{m}' = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}$.



Obr. 4b



Obr. 4c

Posuňme si vektory do stejného působiště v S, tím se nic na vztahu $\vec{m}' = \frac{\vec{x}+\vec{y}}{2}$ nezmění. Trojice vektorů udržuje při pohybu pořád stejné rozestavení, protože se $\vec{x}$ a $\vec{y}$ pohybují stejnou úhlovou rychlostí, a protože tyto dva vektory lineárně určují podle předchozího vztahu vektor $\vec{m}'$. I vektor $\vec{m}'$ se tedy otáčí stejnou úhlovou rychlostí, takže se bod M' pohybuje po kružnici. Ve speciální pozici $X = B$, $Y = C$, $M = M'$ leží navíc naše vektory na přímkách AB, AC a AM. Vektor $\vec{m}'$ tvoří v této poloze polovinu úsečky AM, proto je AM průměrem Thaletovy kružnice, po které se pohybuje M'. Úhel $AM'M$ je díky tomu v ostatních polohách pravý.

Příklad 4.5.

Náznak řešení. Sledujte obrázek 5. V limitní poloze $|BC| = |AC|$ tvrzení platí (jednoduchým dopočítáním úhlů). Pohybujeme rovnoměrně bodem B po přímce AF ve směru od bodu F. Finální poloha (ve které nelze posoudit platnost tvrzení) je $P = H = C$, $O \in AB$ a $|\sphericalangle BCA| = 90°$. Jediné, co potřebujeme, je, aby se pohybovaly body P a H taky rovnoměrně, čímž bude každá nová poloha stejnolehlá s výchozí polohou $|BC| = |AC|$ a úsečka PH bude i v obecné poloze svírat s výškou CF ten správný úhel. Bod O se pohybuje rovnoměrně (jeho pohyb určují osy stran AB a AC) a pohyb bodu P je obrazem pohybu O ve spirální podobnosti (složení otočení a stejnolehlosti), proto se i P pohybuje rovnoměrně. Pohyb ortocentra H je rovnoměrný, protože se rovnoměrně pohybuje výška na stranu AC. Finito.

Poznámka. Aby se stal předchozí náznak řešení řešením, bylo by potřeba lépe zdůvodnit použití spirální podobnosti, a to dá trochu práce, nebo ukázat v každém okamžiku podobnost trojúhelníků FPC a FOO', což je zhruba stejně náročné jako spirální podobnost.

6.2. Lehké příklady

Příklad 5.6.

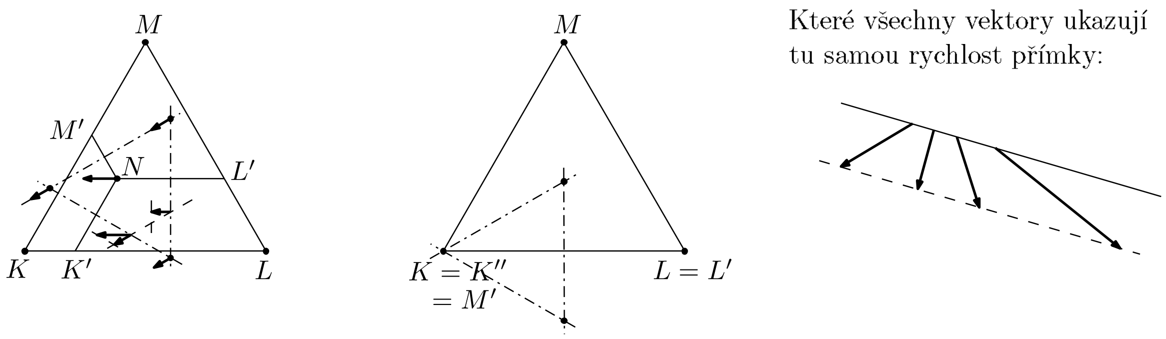
Řešení. Při pohybu bodu X se nemění úhel SYX ani délka $XS| = r$. Takže stačí najít největší trojúhelník se zadanou délkou strany a zadanou velikostí protějšího obvodového úhlu. Tím je rovnoramenný trojúhelník, protože nevzdálenější bod na kružnicovém oblouku je ten uprostřed oblouku. V původní úloze má tedy ΔSXY největší obsah, právě když je SX osou úhlu MSN, z čehož vyplývá i konstrukce.

Příklad 5.7.

Řešení. Vezměme libovolný nerovnostranný trojúhelník. Hýbáním vrcholu po elipse zachováme obvod a přitom, pokud nebyly strany stejně dlouhé, zvětšíme obsah, takže žádný nerovnostranný nemůže být maximální. Protože trojúhelník s největším obsahem určitě existuje, je jím jediný nevyloučený kandidát: rovnostranný trojúhelník.

Příklad 5.8.

Řešení. Označme k', l', m' po řadě osy úseček NK', NL', NM'. Nejprve si všimneme, že nový trojúhelník je též rovnostranný a jeho strany (ekvivalentně přímky k', l', m') jsou kolmé na strany trojúhelníku KLM (každá na jednu). Při rovnoměrném pohybu bodu N rovnoběžně s přímkou KL se přímka m' nehýbe a relativně jednoduše se dopočte, že se při tomto hýbání pohybují přímky k', l' ve směru přímky m' stejně rychle.



Obr. 8

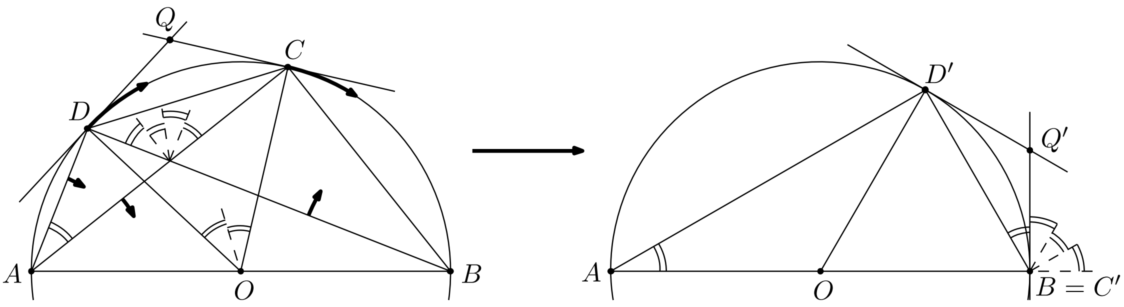
Průsečík k' l' se tedy pohybuje rovnoběžně s m' a zachovává si od m' konstantní vzdálenost. Velikost nového trojúhelníku se při pohybu nemění, dojedeme s bodem N na stranu a pak do vrcholu a v krajní poloze už snadno dopočteme vztah $S = 3T$.

Příklad 5.9.

Náznak řešení. Limitní polohou je $A = T$ a B na opačném konci průměru kružnice k_2. Rovnoměrným otáčením navzájem kolmých přímek s průsečíkem v T nagenerujeme všechny pozice úsečky AB. Při tomto pohybu se ale A a B pohybují stejnou úhlovou rychlostí, takže jsou kružnice i s aktuální polohou bodů A, B vždy stejnolehlé. Středem této stejnolehlosti prochází každá úsečka AB. Pohyb středu úsečky AB je průměrem pohybu bodů A a B, takže se pohybuje po kružnici s poloměrem rovným průměru poloměrů $\frac{r_1+r_2}{2}$ a středem ve středu úsečky S_1S_2.

Příklad 5.10.

Řešení. Podle věty o středovém a obvodovém úhlu je $|\sphericalangle DAC| = \frac{1}{4}|\sphericalangle DPC|$. Pokud pohybujeme rovnoměrně tětivou CD po kružnici, tak se rovnoměrně otáčí polopřímky AD, AC kolem bodu A a polopřímka BD kolem bodu B, navíc všechny stejnou úhlovou rychlostí. Takže se při tomto otáčení nemění $\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle DPC$ ani $|QO|$. Pohodlně otočíme tětivu do pozice $C' = B$.



Obr. 10a Obr. 10b

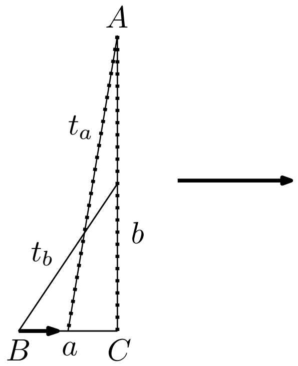
Velikost úsekového úhlu tětivy $C'D'$ je $|\sphericalangle DPC| - 90^\circ$ ale zároveň je podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu stejná jako $|\sphericalangle C'AD'| = |\sphericalangle CAD| = \frac{1}{4}|\sphericalangle DPC|$. Postavením stejných hodnot do rovnice dostaneme $|\sphericalangle DPC| = 120^\circ$ a následně $|\sphericalangle DOC| = 60^\circ$, což s $|AB| = 2$ dá $|QO| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Příklad 5.11.

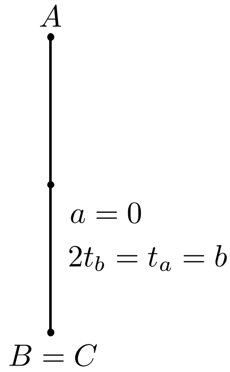
Náznak řešení. Na začátku vezmeme obdélník, pro který tvrzení jasně platí. Vybereme jednu stranu a k ní náležící čtverec zafixujeme, zbytek obdélníku pomalu kosíme na rovnoběžník, přičemž pohybujeme i se zbylými třemi čtverci. Vzhledem k zafixovanému středu čtverce se dva bližší ze zbylých tří středů pohybují úplně stejně (korespondují navzájem v otočení o 90°), takže se zachová pravý úhel i stejná vzdálenost zafixovaného středu od dvou nezafixovaných. Protože jsme na začátku mohli zafixovat kteroukoli ze stran obdélníku a zbytek zkosit, platí toto pozorování i z pohledu ostatních středů čtverců. Proto se při pohybu čtverec tvořený středy připsaných čtverců zachová, a je vymalováno.

Příklad 5.12.

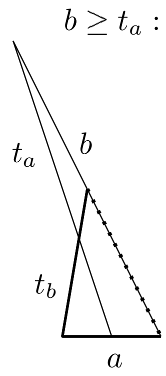
Řešení. Převrácením nerovností dostaneme $p = \frac{1}{q}$, takže stačí určit jednu z konstant. V degenerovaném limitním případě $B = C$ platí $\frac{a+t_b}{b+t_a} = \frac{1}{4}$ a k tomuto výsledku se lze libovolně přiblížit i s $B \neq C$. Proto $p \quad \frac{1}{4}$.



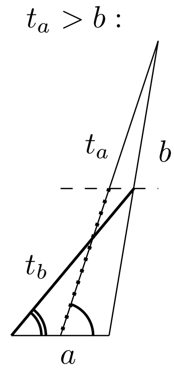
Obr. 12a



Obr. 12b



Obr. 12c



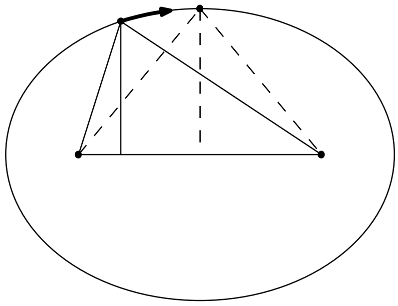
Obr. 12d

Pro ukázku $p \geq \frac{1}{4}$ si rozdělíme všechny situace na dva případy: $b \geq t_a$ a $t_a > b$. V pvním případě použijeme trojúhelníkovou nerovnost $a + t_b > \frac{1}{2}b \geq \frac{1}{4}(b + t_a)$. Pro druhý případ využijeme, že v něm t_a svírá se stranou a větší úhel než t_b, a protože t_a sahá do půl výšky t_b (měřeno od strany a), je $t_b > \frac{1}{2}t_a$. Dokončení skýtají kroky $a + t_b > \frac{1}{2}t_a > \frac{1}{4}(b + t_a)$.

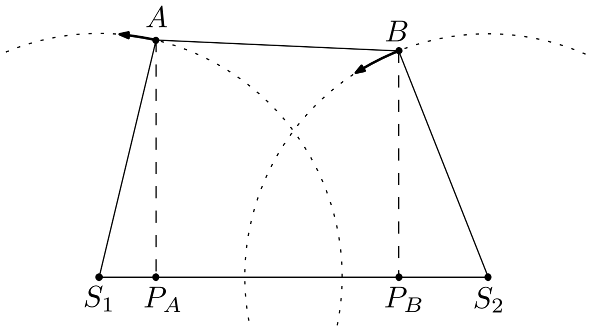
6.3. Středně těžké příklady

Příklad 5.13.

Řešení. Pokud se vedle sebe v n-úhelníku nachází dvě nestejně dlouhé strany, lze pohybem bodu po elipse zachovat obvod a zvětšit obsah (obr. 13a), takže v maximálním n-úhelníku (pokud existuje) musí být všechny strany stejně dlouhé. Maximální n-úhelník musí mít i všechny úhly stejně velké, což ukážeme pohybem z obrázku 13b.



Obr. 13a



Obr. 13b

Začneme se symetrickým čtyřúhelníkem S_1S_2AB, u kterého $|S_2B| = |BA| = |AS_1| < |S_1S_2|$. Pohybujeme s body A, B tak, aby bylo $|S_2B| = |AS_1| = |P_AP_B|$ konstantní. Pohyb zakončíme v poloze $P_A = S_1$ – za ní by neměly některé níže vyjádřené obsahy smysl, navíc jsou pro polohy bodu P_A za bodem S_1 následující trendy zřejmé.

Při pohybu se prodlužuje AB (vznikající posunutý čtyřúhelník má větší obsah než by měl při podmínce $|AB| = \text{konst.}$) a přesto se obsah S čtyřúhelníku S_1S_2BA zmenšuje.

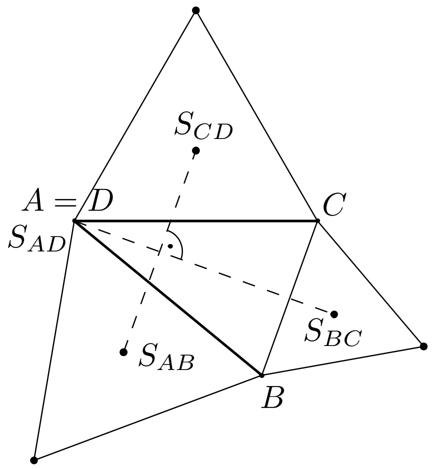
To nahlédneme výpočtem

$$
\begin{aligned}
S_\square &= S_{P_A P_B B A} + S_{S_1 P_A A} + S_{S_2 P_B B} \\
&= \tfrac{|P_A A| + |P_B B|}{2} \cdot |P_A P_B| + \tfrac{|P_A A|}{2} \cdot |S_1 P_A| + \tfrac{|P_B B|}{2} \cdot |S_2 P_B| \\
&\le \tfrac{|P_A A| + |P_B B|}{2} \cdot \left(P_A P_B| + \tfrac{|S_1 P_A| + |P_B S_2|}{2} \right) = \tfrac{|P_A A| + |P_B B|}{2} \cdot \text{konst.}
\end{aligned}
$$

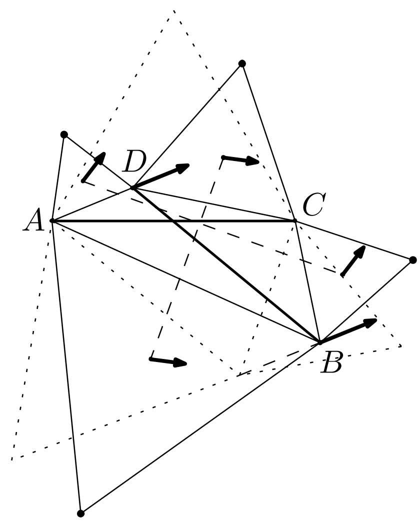
Průměr $\frac{|P_A A| + |P_B B|}{2}$ se při pohybu zmenšuje (bod B klesá rychleji než stoupá A), proto se i $S_\square$ zmenšuje. Maximální n-úhelník musí mít tedy i všechny úhly stejně velké. Protože tohle splňuje jen pravidelný n-úhelník a díky omezenosti obvodem musí maximum existovat, je hledaným n-úhelníkem právě ten pravidelný.

Příklad 5.14.

Náznak řešení. Pro usnadnění označme středy trojúhelníků připsaných stranám AB, BC, CD, AD postupně S_{AB}, S_{BC}, S_{CD} a S_{AD}. Nejprve prozkoumejme degenerovanou polohu $A = D$. V té trojúhelník připsaný straně AD splyne s bodem A a totéž platí pro jeho střed S_{AD}. Vznikne symetrická pozice, kde právě ze symetrie plyne kolmost spojnic, viz obrázek 14a.



Obr. 14a



Obr. 14b

Hýbejme nyní rovnoměrně (a rovnoběžně) úhlopříčkou BD do obecné polohy (jako na obrázku 14b). Pohyb bodu S_{AD} dostaneme zobrazením pohybu bodu D ve spirální podobnosti[1] $S(A; 30\ ; \frac{\sqrt{3}}{3})$. Podobně dostaneme pohyb S_{BC} zobrazením pohybu bodu B ve spirální podobnosti $S(C; 30^\circ; \frac{\sqrt{3}}{3})$. Protože jsou pohyby bodů B a D totožné a obě spirální podobnosti jsou až na svůj střed také stejné, tak jsou i zobrazené pohyby stejné a body S_{AD} a S_{BC} pohybují shodně, proto se nemění směr spojnice $S_{AD}S_{BC}$, kterou určují. Stejný závěr dostaneme i pro druhou spojnici $S_{AB}S_{CD}$. Díky výchozí pozici, ve které na sebe byly obě spojnice kolmé, jsou kolmé i po posunutí do obecné polohy.

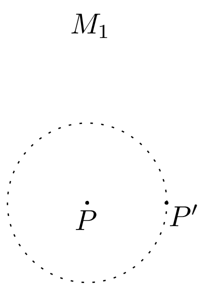
[1]Spirální podobnost (; 30 ; $\frac{\overline{3}}{3}$) je zobrazení, kdy nejprve situaci otočíme kolem bodu o úhel 30
$\frac{\overline{3}}{3}$.

Příklad 5.15.

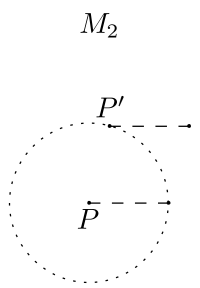
Náznak řešení. Snadno se ověří, že pokud zvolíme X jako ortocentrum, tak je čtyřúhelník TU tětivový. Hýbejme úsečkou PQ tak, aby zůstal $TUPQ$ tětivový (to jest tak, má přímka PQ pořád stejný směr). Aby se ještě jednou vyskytl bod X na výšce, musel by výraz $\frac{|UP|}{|PV|} \cdot \frac{|VQ|}{|QT|}$ nabít ještě jednou stejnou hodnotu (podle *Cevovy* věty). Výraz se ale buď stále nějak roste nebo se stále nějak zmenšuje, proto této hodnoty už víckrát nenabyde.

Příklad 5.16.

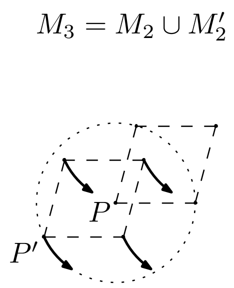
Řešení. Řešení provedeme indukcí podle počtu stejně vzdálených bodů. Označme M_n množinu vyhovující zadání, kde má každý bod P od právě n bodů z M vzdálenost 1. Za M_1 stačí vzít krajní body jednotkové úsečky. Množinu M_2 utvoříme z M_1 „nakopírováním“ té samé množiny a posunutím. Přesněji: vezmeme M_1 a přidáme k ní M'_1, kde pro každý bod P' z M'_1 existuje právě jeden bod P z M_1 tak, že $PP'| = 1$. Pro indukční krok předpokládejme, že disponujeme vyhovující množinou M_k. Vyberme pevné $P \in M_k$, a přidejme do roviny o jednotkový vektor posunutou množinu M'_k, kde vezměme odpovídající bod P'. Teď je zajištěno, že má každý bod z $M_k \cup M'_k$ aspoň od $k+1$ bodů vzdálenost 1.



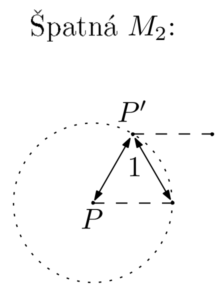
Obr. 16a



Obr. 16b



Obr. 16c

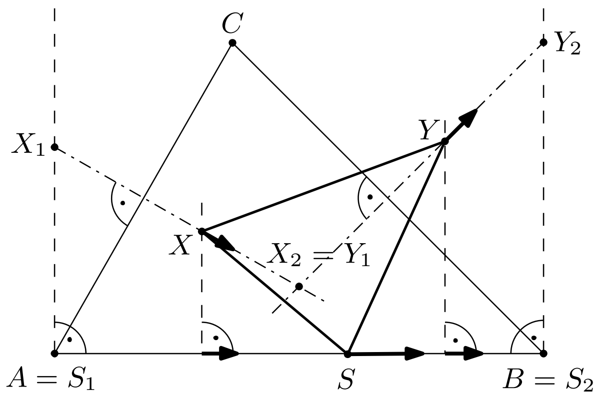


Obr. 16d

My ale potřebujeme, aby to bylo *přesně* $k+1$. Proto začněme s množinou M'_k otáčet po kružnici kolem bodu P tak, aby se zachovalo $PP'| = 1$. Existuje jen konečně mnoho směrů $\overrightarrow{PP'}$, ve kterých k některému bodu z M_k existuje více jak jeden bod z M'_k, který od něj má vzdálenost 1. Možností, jak natočit $\overrightarrow{PP'}$, je ale nekonečně, tak existuje nějaká, při které ke každému bodu z M_k existuje právě jeden bod z M'_k vzdálený 1. Disponujíce vyhovujícím posunutím M'_k definujme konečně $M_{k+1} = M_k \quad M'_k$. K vyřešení úlohy stačí vzít M_{2009}.

Příklad 5.17.

Řešení. Pohybujme rovnoměrně bodem S z A do B. Krajní polohy pohybu bodu X označme X_1, X_2 a krajní polohy bodu Y označme Y_1, Y_2. Body X_2 a Y_1 leží na ose strany AB a proto splývají ve střed kružnice opsané trojúhelníku ABC.

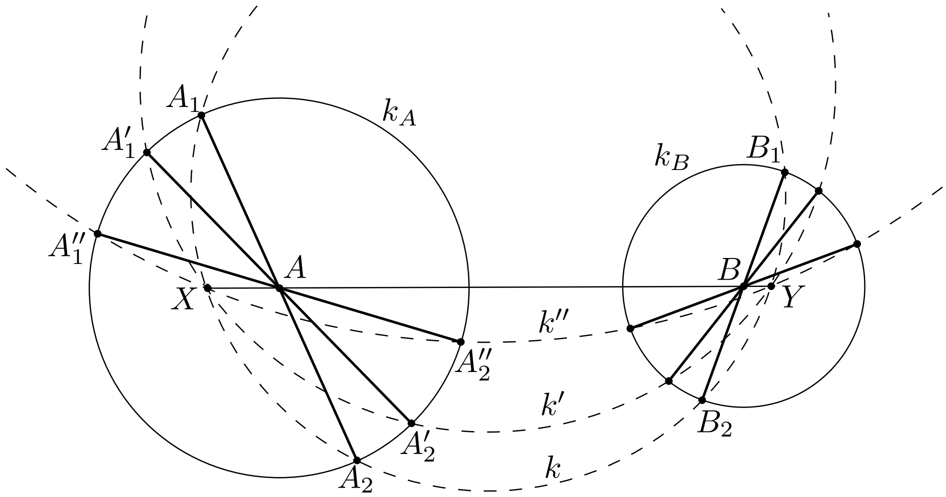


Obr. 17

Bod X leží při pohybu na ose úsečky AS, která se pohybuje poloviční rychlostí bodu S. Protože X leží celou dobu zároveň na ose strany AC, tak se pohybuje rovnoměrně po úsečce. Analogicky se Y pohybuje rovnoměrně z Y_1 do Y_2. Relativně snadno se ukáže, že $\Delta S_1X_1Y_1 \approx \Delta S_2X_2Y_2 \approx \Delta CAB$ (například využitím shodnosti $\Delta S_1X_1Y_1 \cong \Delta CX_1Y_1$ a podobnosti $\Delta AX_1C \approx \Delta BX_2C$). To by nás mělo navést na myšlenku, že i obecně platí $\Delta SXY \approx \Delta CAB$. Vidět je to ihned ze spirální podobnosti a důkaz uděláme následovně. Potřebujeme ukázat, že je při pohybu $\sphericalangle SXY| = $ konst. (analogicky bude platit $\sphericalangle SYX| = $ konst. a hledané tvrzení bude díky ukázaným krajním (vyhovujícím) polohám na světě). A teď už lehce $\sphericalangle SXY| = \frac{1}{2} \sphericalangle SXC| = \sphericalangle SAC|$ díky souměrnosti a podle věty o středovém a obvodovém úhlu. Ukázali jsme tedy, že se tvar ΔSXY při pohybu nemění, a stačí identifikovat polohu S, kdy má trojúhelník nejmenší obsah, neboli nejmenší výšku, a to je právě když S je pata výšky z bodu C na AB.

Příklad 5.18.

Řešení. Vezmeme kružnice k_A, k_B, které půlí kružnice k po řadě v průměrech A_1A_2 a B_1B_2. Vezmeme dále oba průniky přímky AB s k a označíme X, Y. Zafixujeme-li XY a otáčíme s průměrem A_1A_2, tak je čtyřúhelník A_1XA_2Y ve všech polohách tětivový (pokud neleží jeho vrcholy na přímce), což dostaneme ze zachování mocnosti bodu A. Zachování mocnosti funguje i pro bod B, takže pro každý otočený průměr $A'_1A'_2$ existuje průměr $B'_1B'_2$ takový, že $A'_1, A'_2, B'_1, B'_2, X, Y \quad k$.

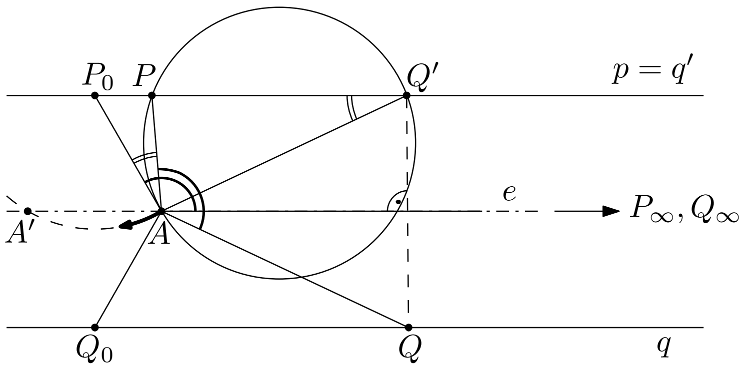


Obr. 18

Posouváním středu kružnice k po ose úsečky XY vygenerujeme všechny kružnice, které půlí k_A a k_B. Pokud třetí bod C neleží na přímce AB, tak mezi právě vygenerovanými kružnicemi najdeme právě jednu, co půlí k_C (to dostaneme z předchozího posouvání středu kružnice k po ose úsečky XY). Pokud C leží na přímce AB, tak vezmeme dvojici kružnic k_A a k_C a zkonstruujeme body X', Y', kterými prochází jejich rodina půlících kružnic. Pokud $\{X,Y\} = \{X',Y'\}$, tak všechny kružnice procházející body X, Y půlí všechny tři kružnice k_A, k_B, k_C, pokud $\{X,Y\} \neq \{X',Y'\}$, tak neexistuje kružnice půlící všechny tři kružnice.

6.4. Těžší příklady

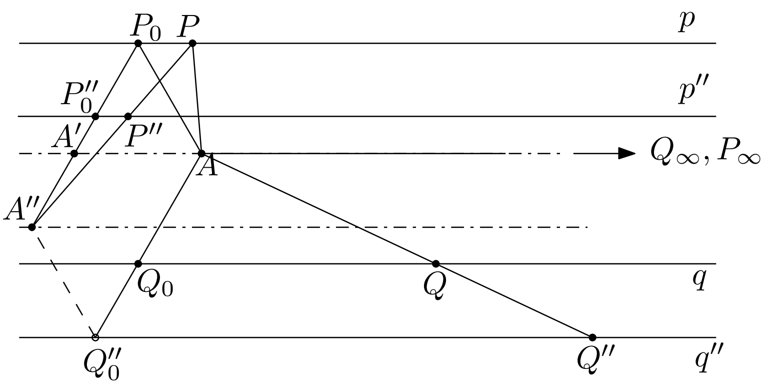
Příklad 5.19. Vyřešme úlohu nejdříve pro A ležící na ekvidistantě přímek. Limitní polohy bodů P, Q označme odpovídajícím způsobem P_0, Q_0, P_∞, Q_∞, jako na obrázku, tj. aby platilo $|\sphericalangle P_0AQ_\infty| = |\sphericalangle Q_0AP_\infty| = |\sphericalangle PAQ|$. Označme e ekvidistantu přímek p, q. Bod vzniklý zobrazením bodu Q v osové souměrnosti s ekvidistantou přímek e pojmenujme Q'.



Obr. 19a

Dopočtením úhlů zjistíme, že $|\sphericalangle P_0AP| + |\sphericalangle P_0AQ'|$ je konstantní a hned z toho plyne $|\sphericalangle P_0AP| = |\sphericalangle AQ'P_0|$. To je rovnost obvodového a úsekového úhlu u kružnice opsané trojúhelníku PAQ', která se díky tomu dotýká přímky P_0A. Tudíž rodina kružnic dotýkajících se přímky AP_0 v bodě A a ležících v polorovině AP_0Q_∞ určuje jednoznačně všechny dvojice bodů P, Q. Ekvivalentně můžeme říci, že úsečky PQ, pro které je $\sphericalangle PAQ$ stejný, jsou právě ty, pro které platí $|P_0P| \cdot |Q_0Q = |P_0P| \cdot |P_0Q' = |P_0A|^2$. Z vlastností mocnosti bodu ke kružnici ty samé dvojice bodů dostaneme i rodinou kružnic se středem v $A' = k\big(P_0;\ P_0A|\big) \cap e$, které se dotýkají přímky $A'P_0$ v polorovině $P_0A'A$. Zpětným ekvivalentním postupem pro bod A' dostaneme, že je velikost $\sphericalangle PA'Q$ konstantní. Všechny vlastnosti jako konstantnost $\sphericalangle PAQ$, konstantnost $\sphericalangle PA'Q$, konstantnost $|P_0P| \cdot |P_0Q' = P_0A^{\,2} = |P_0A'|$ jsou tedy ekvivalentní.

V obecné poloze si vezměme dvojici přímek p, q'' a bod A neležící uprostřed. Proveďme zobrazení podle obrázku.

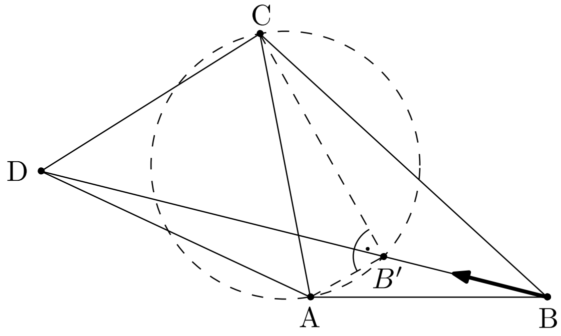


Obr. 19b

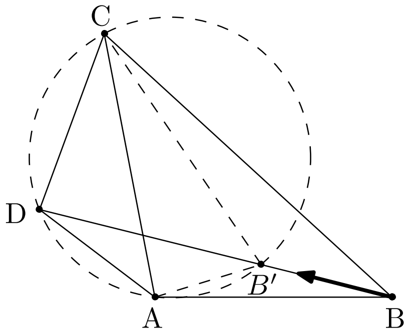
Vezměme q tak, aby A leželo na ekvidistantě přímek p, q a i zbytek věcí definujme stejně jako v předchozím případě. Dále definujme $Q_0'' = \overleftrightarrow{AQ_0} \cap q''$, $Q'' = \overleftrightarrow{AQ} \cap q$. Bod A'' buď čtvrtým bodem rovnoběžníku $Q_0''AP_0A''$. Přímka p'' ať je takovou přímkou, že A'' leží na ekvidistantě přímek p'' a q''. Nakonec $P_0'' = \overleftrightarrow{A''P_0} \cap p''$ a $P'' = \overleftrightarrow{A''P} \cap p''$. Protože fakticky nové body Q'', Q_0'', P'', P_0'' vznikly pomocí stejnolehlostí se středy v A a A'' s opačným koeficientem, tak platí $|P_0''P''| \cdot |Q_0''Q'' = |P_0P| \cdot |Q_0Q = |P_0''A''^{\,2} = |P_0A'|^2$. To neznamená nic jiného, než že z bodu A'' je úsečka $P''Q''$ vidět pořád pod stejným úhlem jako z bodu A' úsečka PQ. Protože je P na přímce $A''P''$, tak je i úsečka PQ'' z bodu A'' vidět pořád pod stejným úhlem. A'' je tedy hledaný bod.

Příklad 5.20.

Řešení. Stačí ukázat jednu implikaci, opačnou dostaneme cyklickým přeznačením. Je nutné příklad řešit pro odlišně pro dva případy: buď platí $\beta < 90°$ a $\delta < 90°$, nebo je BÚNO $\delta \geq 90$ (jinak čtyřúhelník přeznačíme).



Obr. 20a



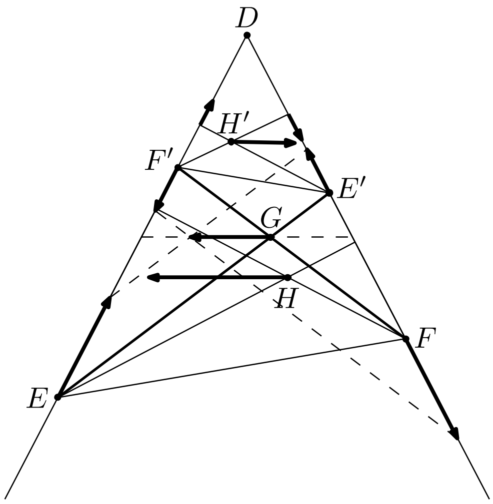
Obr. 20b

V prvním případě (na obrázku 20a) si pro vyřešení vezmeme Thaletovu kružnici nad průměrem AC a pohybujeme k ní bodem B po přímce BD, čímž situaci převedeme na druhý případ. Ještě předpokládejme, že $|\sphericalangle ACB| \leq 90°$, jinak prohodíme jména bodů A a C. Při tomto pohybu se poloměr R_B nemění (trojúhelník ACD zůstává na místě), R_A se díky vztahu $R_A = \frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle|CDB|} = K\ BC|$ zmenšuje a rozdíl $R_C - R_D$ se díky rovnosti $R_C - R_D = \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ADB|} - \frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACD|}$ taky zmenšuje. Celkově se tedy výraz $R_A + R_C - R_B - R_D$ při tomto pohybu zmenšil.

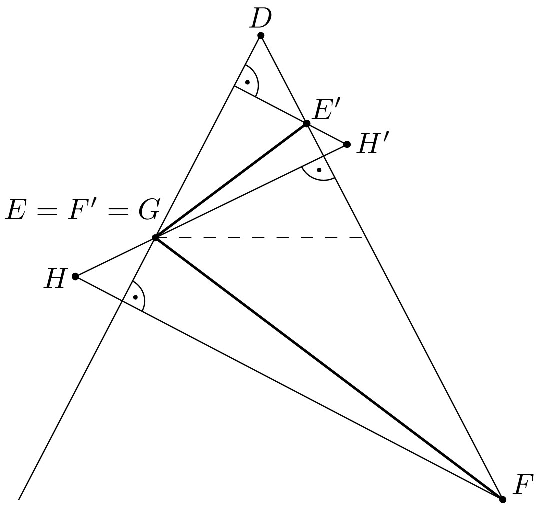
Ve druhém případě (obr. 20b) situaci přeznačíme tak, aby $\delta \geq 90°$ a opět $|\sphericalangle ACB| \leq 90°$. Místo Thaletovy kružnice teď vezmeme kružnici opsanou trojúhelníku ACD. Poté postupujeme stejně jako v případě předchozím, při posunu bodu B se opět výraz $R_A + R_C - R_B - R_D$ zmenšuje a tentokrát dosáhne ve finální pozici $B = B'$ hodnoty 0 při rovnosti $R_A = R_B = R_C = R_D$. To ale znamená, že před posunem bodu B platilo $R_A + R_C > R_B + R_D$.

Příklad 5.21.

Řešení. Označme průsečík úhlopříček jako G a postavme si úhel EDF tak, aby měla DE, DF a směry přímek EE', FF' a pohybujme průsečíkem G rovnoměrně vodorovně.



Obr. 21a



Obr. 21b

Body E, F se tak pohybují po svých přímkách stejně rychle, díky nim se ve vodorovném směru stejně rychle pohybují i výšky z bodů E, F a jejich průsečík H se tak pohybuje rovnoměrně vodorovně. Ze stejného důvodu se rovnoměrně pohybuje i H'. Protože v krajních polohách $E = F'$ a $E' = F$ mají trojúhelníky společnou výšku (viz obr. 21b), na které leží i bod G, tak je v těchto limitních polohách úloha splněna. Průsečík přímky HH' s trajektorií bodu G se pohybuje rovnoměrně a v krajních polohách $E = F'$ a $E' = F$ splývá s bodem G, který se po stejné trajektorii pohybuje také rovnoměrně. Proto je bod G nutně zmíněným průsečíkem i v každém okamžiku pohybu a úloha je vyřešena pro všechny polohy.

7. Literatura a poděkování

Tento text byl sepsán bez pomoci literatury, je tedy původní. Příklady jsem čerpal hlavně ze starších ročníků PraSátka, archivu olympiády a IMO shortlistů. Úlohy můžete najít i s odlišnými autorskými řešeními na stránkách

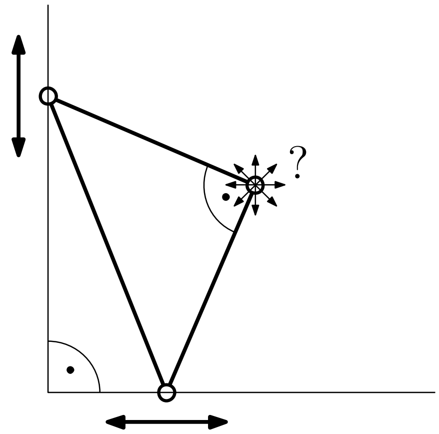
`http://www.math.muni.cz/~rvmo` (stránky Matematické olympiády)

`http://mks.mff.cuni.cz` (stránky Matematického korespondenčního semináře)

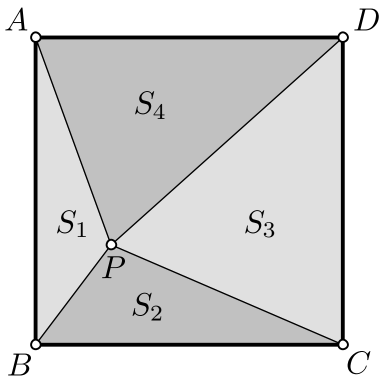
Poděkovat chci především *Kennymu Rolínkovi* a *Pepovi Tkadlecovi*, že mě přesvědčili o nevšednosti a důležitosti této techniky a výrazně motivovali metodu sepsat. Dále díky *Jardovi Hančlovi*, *Pavlu Kocourkovi*, *Pepovi Tkadlecovi* a *Alče Skálové* za korekturu první části.

Hýbání s body – domácí úlohy

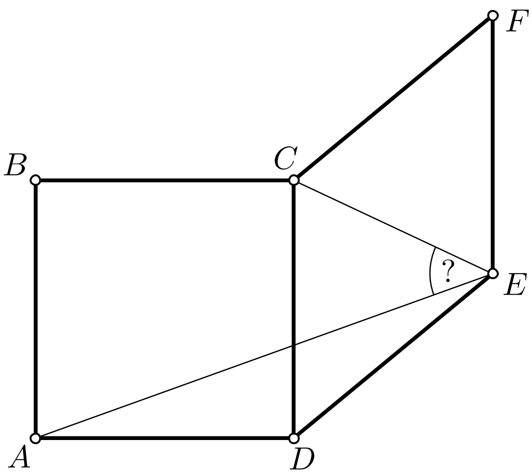
Příklad. Dva body pravoúhlého trojúhelníku jsou pohyblivě připevněny na osách souřadnic jako na obrázku. Jakou množinu vykreslí třetí bod, pokud se trojúhelník pohybuje?



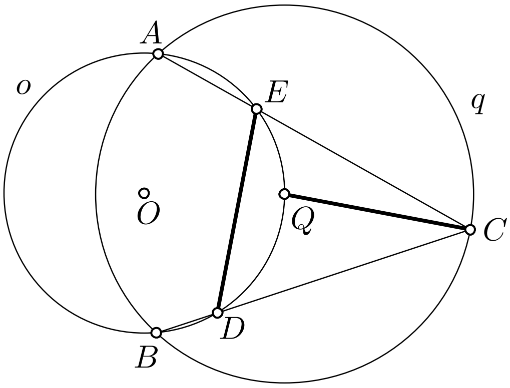
Příklad. Buď P bod uvnitř čtverce $ABCD$. Obsahy trojúhelníků ABP, BCP, CDP, DAP označme po řadě S_1, S_2, S_3, S_4. Dokažte, že pak platí $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$.



Příklad. Nechť je $ABCD$ čtverec a $CDEF$ k němu připsaný kosočtverec. Určete velikost úhlu AEC.



Příklad. Na kružnici o leží bod Q, střed kružnice q. Kružnice se protínají v bodech A a B. Na q leží ještě jiný bod C (různý od A, B). Další průsečíky přímek CA, CB s kružnicí o označme po řadě E, D. Ukažte, že jsou přímky ED, CQ kolmé.



Příklad. Ke stranám trojúhelníku ABC jsou připsány rovnostranné trojúhelníky ABC', $A'BC$, $AB'C$ tak, že body A', B', C' leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Ukažte, že je $A'C'B'C$ rovnoběžník.