Využití vektorů a komplexních čísel v geometrii.

Josef Křišťan

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Tento text vznikl jako doplněk k přednášce Využití vektorů a komplexních čísel v geometrii. Nejprve probereme základní vlastnosti vektorů a komplexních čísel, pomocí nichž by měl být čtenář schopen vyřešit pětici zadaných domácích úloh.

Je probráno také množství úloh, na kterých probíranou látku demonstrujeme.

1 Vektory

V první části řekneme, co si představit pod pojmem vektor, a zaměříme se jejich základní vlastnosti.

1.1 Aritmetický vektorový prostor

Definujme množinu V uspořádaných dvojic reálných čísel (a, b), kde definujeme součet dvou uspořádaných dvojic (a_1, b_1) a (a_2, b_2)

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

a násobení reálným číslem k

$$k(a, b) = (ka, kb).$$

Dvojici z množiny V budeme označovat $\vec{v} = (a, b)$ a nazývat ji vektorem. Množina V splňuje podmínky vektorového prostoru. Nejde o nic jiného než o ověření, že existuje nulový a opačný prvek a o ověření podmínek komutativity a asociativity vzhledem k násobení a součtu definovaných výše. Tyto podmínky zde nebudeme ověřovat.

Množinu V lze obecně definovat nad uspořádanými n-ticemi – vektor bude mít v tomto případě n reálných složek. Součet dvou prvků z V definujeme opět po složkách, podobně jako násobení reálným číslem.

1.2 Geometrický vektorový prostor

Uvedeme si dva geometrické modely – model vázaných vektorů a model volných vektorů.

Model vázaných vektorů

Začneme úmluvou: uvažujme bod P, který budeme chápat jako počáteční bod libovolné orientované úsečky, jejíž koncový bod bude libovolný jiný bod, např. A.

Definice. *Libovolným vektorem rozumíme každou orientovanou úsečkou zavedenou v předchozí úmluvě. Vektor budeme značit $\vec{v} = \vec{PA}$ a nulový vektor jako $\vec{0}$ (v případě, kdy bod A splyne s bodem P).*

V tomto prostoru definujeme sčítání dvou vektorů podle rovnoběžníkového pravidla. Sčítání splňuje komutativnost a asociativnost

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}, \qquad \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w},$$

existuje nulový vektor $\vec{0}$ a opačný vektor vzhledem k vektoru $\vec{u}$. Ten značíme $-\vec{u}$ a platí pro něj $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ a $|\vec{u}|=|-\vec{u}|$. Symbolem $|\cdot|$ pak označujeme velikost vektoru.

Definujeme také násobení reálným číslem, které splňuje

$$\begin{aligned} 1\cdot\vec{u} &= \vec{u}, \qquad a\cdot(b\cdot\vec{u})=(ab)\cdot\vec{u}, \\ a\cdot(\vec{u}+\vec{v}) &= a\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{v}, \qquad (a+b)\cdot\vec{u}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{u} \end{aligned}$$

pro libovolná reálná čísla a, b a libovolné vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$. Zde jsme názorně rozlišili tečkou "$\cdot$" násobení mezi reálným číslem a vektorem.

Tento model má využití např. ve fyzice.

Model volných vektorů

Volným vektorem rozumíme množinu všech navzájem rovnoběžných, souhlasně orientovaných úseček o stejných velikostech. Každou takovou úsečku nazýváme umístěním vektoru.

Součet dvou takových vektorů provedeme tak, že zvolíme bod, který bude počátečním bodem umístění vektorů a samotnou operaci součtu provedeme jako u modelu vázaných vektorů. Z důvodu použité translace vektorů do společného počátku nezávisí operace sčítání na volbě reprezentantů.

Operaci násobení reálným číslem definujeme stejně jako sčítání, tj. zvolíme počátek a provedeme operaci. Výsledek opět nezávisí na volbě reprezentanta nebo volbě počátku.

Geometrický model volných vektorů se využívá např. v analytické geometrii.

1.3 Operace s vektory

Vektory mají mnoho zajímavých vlastností. Uvedeme pouze několik základních pravidel.

Vektor (a,b) si můžeme v kartézské soustavě souřadné představit jako orientovanou úsečku s počátečním bodem v počátku a koncovým bodem v bodě o souřadnicích $[a,b]$. Při takové představě lze ztotožnit vektor (a,b) s bodem $[a,b]$.

Velikostí vektoru $\vec{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ rozumíme

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}.$$

Pro dva vektory $\vec{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, které svírají úhel o velikosti φ, definujeme skalární součin (označovaný "$\cdot$")

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=u_1v_1+u_2v_2+\ldots+u_nv_n=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi.$$

Úhel φ uvažujeme vždy v intervalu $[0,\pi]$, resp. $[0,180°]$. Z dvojího vyjádření skalárního součinu můžeme ze znalosti složek vektorů vypočítat velikost úhlu, který svírají. Z definice také plyne, že dva nenulové vektory jsou kolmé právě tehdy, pokud je jejich skalární součin nulový

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0} : \vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Pro dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v trojrozměrném prostoru, které svírají úhel φ, definujeme vektorový součin (označovaný "$\times$")

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Tj. výsledkem je vektor. Předchozí vztah lze určit také z rozvoje determinantu

$$\begin{aligned} \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} &= \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\ &= \vec{i}(u_2v_3 - u_3v_2) + \vec{j}(u_3v_1 - u_1v_3) + \vec{k}(u_1v_2 - u_2v_1), \end{aligned}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Základní vlastnosti vektorového součinu jsou

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= -\vec{v} \times \vec{u}, \\ (k\vec{u}) \times \vec{v} &= k(\vec{u} \times \vec{v}), \\ (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}. \end{aligned}$$

Velikost vektoru $\vec{w}$ lze mimo jiné určit i ze vztahu

$$|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \varphi.$$

Z geometrického hlediska představuje velikost $|\vec{w}|$ obsah rovnoběžníku, jehož strany jsou tvořeny právě vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Chceme-li např. vypočítat obsah rovnoběžníku, jehož strany jsou tvořeny vektory ve dvojrozměrném prostoru, můžeme k vektorům přidat třetí složku (stejnou pro oba vektory). Potom spočítáme vektor $\vec{w}$, jenž vznikne jako vektorový součin rozšířených vektorů. Pokud bude rozšiřující složka rovna nule, bude mít vektor $\vec{w}$ nenulovou pouze třetí složku, která bude určovat hledaný obsah.

Bohužel v tomto textu, který je doplněk pro přednášku, není pro podrobnější informace prostor. Doporučujeme proto čtenáři přečíst si o dalších zajímavých vlastnostech skalárního nebo vektorového součinu v některé ze středoškolských učebnic.

2 Úvod do komplexních čísel

Definice. *Množina komplexních čísel, kterou budeme značit $\mathbb{C}$, je množina uspořádaných dvojic reálných čísel $[x, y]$. Mezi dvěma komplexními čísly $[x, y]$*

a $[u,v]$ *definujeme operace sčítání a násobení*

$$\begin{aligned}[x,y]+[u,v] &= [x+u,y+v]\\ [x,y]\,[u,v] &= [xu-yv,xv+yu]\end{aligned}$$

Rovnost dvou komplexních čísel definujeme jako rovnost dvou uspořádaných dvojic
$$[x,y]=[u,v] \quad\Leftrightarrow\quad x=u \quad \text{a} \quad y=v.$$

Dvojici $[0,1]$ značíme v matematice i (v elektrotechnice j, aby nedošlo k záměně s elektrický proudem i) a nazýváme ji komplexní jednotkou. Z definice součinu uvedené výše plyne důležitý vztah

$$i^2=[0,1][0,1]=[-1,0]=-1,$$

kde jsme dvojici $[-1,0]$ ztotožnili s reálným číslem -1. Obecně lze každou dvojici $[x,0]$ ztotožnit s reálným číslem x a dvojici $[0,y]$ s ryze imaginárním číslem iy (připomeňme, že y je číslo reálné). Každé komplexní číslo $[x,y]$ lze zapsat v tzv. algebraickém tvaru
$$[x,y]=[x,0]+[0,y]=x+yi.$$
Reálnou částí čísla $x+yi$ rozumíme $\mathrm{Re}(x+yi)=x$, imaginární částí $\mathrm{Im}(x+yi)=y$.

Číslo $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$ nazveme komplexně sdružené k číslu $z=a+bi$ a absolutní hodnotou čísla z budeme rozumět nezáporné číslo $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Ihned vidíme, že

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2=|z|^2\geq 0,$$

tj. $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$. Pro absolutní hodnotu platí $(z,z_1,z_2\in\mathbb{C})$

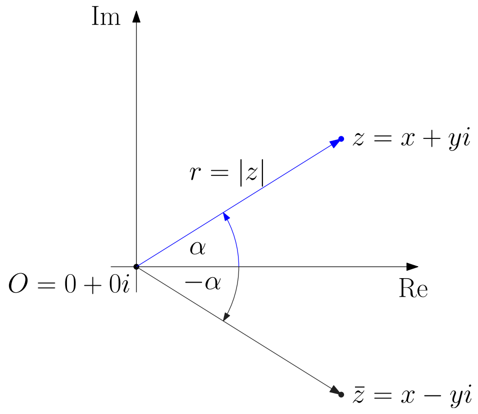
$$\begin{aligned}|z| &\geq 0,\\ |z| &= 0 \quad\Leftrightarrow\quad z=0,\\ |-z| &= |\bar{z}|=|z|,\\ |z_1z_2| &= |z_1||z_2|,\\ |z_1|+|z_2| &\geq |z_1+z_2|.\end{aligned}$$

Poslední nerovnost je tzv. trojúhelníková nerovnost, dokážeme ji později.

Snadno se ověří také následující tvrzení $(z,z_1,z_2\in\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{z}} &= z,\\ z &= \bar{z} \quad\Leftrightarrow\quad z\in\mathbb{R},\\ \overline{z_1+z_2} &= \overline{z_1}+\overline{z_2},\\ \overline{z_1z_2} &= \overline{z_1}\,\overline{z_2}.\end{aligned}$$

Matematickou indukcí se dá ukázat, že předchozí vztahy platí pro libovolný počet komplexních čísel.



Obrázek 1:

2.1 Zobrazení komplexního čísla v Gaussově rovině

Gaussova je rovina s pravoúhlým souřadnicovým systémem, kde každému bodu $[x, y]$ této roviny přiřadíme jednoznačně komplexní číslo $z = x + yi$ a naopak každému komplexnímu číslu $z = x + yi$ přiřadíme bod $[x, y]$ v rovině, tj. body v Gaussově rovině ztotožníme s komplexními čísly.

Na obrázku 1 je zobrazena soustava souřadná s počátkem $O = 0 + 0i$, kde jsme vyznačili kompl. číslo $z = x + yi$ a jemu kompl. sdružené číslo $\bar{z} = x - yi$. Obrazy těchto kompl. čísel jsou osově souměrné podle souřadné osy Re reprezentující reálnou osu.

Hodnotou argumentu kompl. čísla rozumíme kladně orientovaný úhel, u nás α, který svírá průvodič kompl. čísla a kladná poloosa Re. Pro $\alpha \in (-\pi, \pi]$ značíme $\alpha = \mathrm{Arg} z$, tzv. hlavní hodnota argumentu, jinak jen $\alpha = \arg z$. Velikostí (resp. modulem) $r = |z|$ kompl. čísla z rozumíme velikost průvodiče, viz obrázek 1.

2.2 Tvary komplexních čísel

Jedním z tvarů komplexního čísla je algebraický tvar

$$z = x + yi.$$

Z obrázku 1 vidíme, že reálná čísla x a y lze vyjádřit jako (jde vlastně o vyjádření z v polárních souřadnicích)

$$x = r \cos \alpha, \qquad y = r \sin \alpha, \qquad r = |z|.$$

Dosazením do algebraického tvaru dostaneme goniometrický tvar

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Naopak z goniometrického vztahu dostaneme snadno tvar algebraický.

Využijeme-li Eulerův vztah

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

můžeme z vyjádřit v exponenciálním tvaru

$$z = re^{i\alpha}.$$

Moivreova věta. *Pro každé celé $k \in \mathbb{Z}$ a každé reálné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha.$$

Tuto větu si nyní dokážeme např. matematickou indukcí. Pro $k = 1$ věta triviálně platí. Předpokládejme, že věta platí pro $k = n \geq 1$ a pokusíme se ji dokázat i pro $k = n + 1$. Podle indukčního předpokladu platí

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n+1} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n(\cos\alpha + i\sin\alpha)\\
&= (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)\\
&= (\cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha) + i(\cos\alpha\sin n\alpha + \sin\alpha\cos n\alpha)\\
&= \cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha,
\end{aligned}$$

čímž je věta dokázána. Poznamenejme, že jsme využili postupně indukční předpoklad, vlastnosti při roznásobování kompl. čísel a nakonec goniometrické součtové vzorce.

3 Základní geometrické vztahy

3.1 Metrické vlastnosti

Vzdálenost dvou komplexních čísel $a = a_1 + ia_2$ a $b = b_1 + bi_2$ spočteme podle Pythagorovy věty, podobně jako vzdálenost dvou bodů v Euklidově rovině,

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = |(a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2)| = |a - b|.$$

Pro tři komplexní čísla a, b, c definujeme velikost orientovaného úhlu $\angle cab$

$$|\angle cab| = \arg(c - a) - \arg(b - a) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right).$$

Poznamenejme, že v tomto případě se dostaneme z bodu b do bodu c v kladném směru při oběhu bodu a. Při výměně bodů b a c dostaneme přesně opačný výsledek. Navíc úhel je určen jednoznačně až na násobky 2π.

Trojúhelníková nerovnost. *Pro komplexní čísla a, b platí nerovnost*

$$|a| + |b| \geq |a + b|,$$

rovnost nastává tehdy, když jedno z čísel je reálným násobkem druhého.

Důkaz. Při geometrickém pohledu na věc trojúhelníková nerovnost tvrdí, že součet dvou stran v trojúhelníku je větší než strana třetí. Rovnost nastává tehdy, když je trojúhelník degenerovaný v úsečku.

Věnujme se algebraickému důkazu. Víme, že pro kompl. číslo z je číslo $z + \bar{z}$ reálné, přesněji $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ a platí $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$. Uvažujme kompl. číslo $a\bar{b}$, pak $\overline{a\bar{b}} = \bar{a}b$ a platí

$$\frac{a\bar{b} + \overline{a\bar{b}}}{2} = \frac{a\bar{b} + \bar{a}b}{2} = \mathrm{Re}(a\bar{b}) \leq |a\bar{b}| = |a||\bar{b}| = |a||b|.$$

Pak

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)(\overline{a+b}) = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) \\ &= a\bar{a} + a\bar{b} + \bar{b}a + \bar{b}\bar{a} \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2, \end{aligned}$$

což jsem chtěli dokázat. Rovnost nastává jen tehdy, pokud je číslo $a\bar{b} = r$ reálné, neboli $a = qb$, kde $q = r/|b|^2 \in \mathbb{R}$.

3.2 Geometrické transformace

V této sekci budeme zobrazením f rozumět zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$,

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \quad z \mapsto w = f(z).$$

Pro pevné $a \in \mathbb{C}$ a libovolné $z \in \mathbb{C}$ uvažujme zobrazení definované

$$f(z) = z + a.$$

Představíme-li si body a a z jako vektory, jde o posunutí bodu z o vektor a do bodu $z + a$. Toto zobrazení tedy představuje translaci.

Další důležité zobrazení má také jednoduchý předpis. Pro reálné číslo r reprezentuje zobrazení

$$f(z) = rz$$

stejnolehlost se středem v počátku souřadnic. Buď $z = |z|e^{i\alpha}$. Potom obraz $w = f(z) = r|z|e^{i\alpha}$ nemění argument, ale jen absolutní hodnotu,

$$|w| = |r||z|.$$

Pro $r > 0$ jsou body z a w na jedné polopřímce a pro $r < 0$ na opačné vzhledem ke středu stejnolehlosti.

Pro komplexní číslo $a = re^{i\alpha}$ je zobrazení

$$f(z) = az$$

spirální podobnost (se středem v počátku souřadnic), neboť kompl. číslo $w = f(z)$ má oproti číslu z změněn argument o hodnotu α. To lze nahlédnout z násobení dvou kompl. čísel vyjádřených v exponenciálním tvaru:

$$az = re^{i\alpha}|z|e^{i\arg z} = r|z|e^{i(\alpha+\arg z)}.$$

Spirální podobnost se středem v bodě $c \in \mathbb{C}$ a komplexním koeficientem a má předpis

$$f(z) = a(z - c) + c.$$

Napišme nyní vztah vyjadřující osovou souměrnost vzhledem k přímce p s rovnicí $y = ax+b$, kde a, b jsou reálná čísla. Víme, že osová souměrnost vzhledem k reálné ose Gaussovy roviny má jednoduchý předpis, a to

$$f(z) = \bar{z}.$$

Toto pozorování využijeme pro konstrukci požadovaného předpisu. Nechť přímka p svírá s kladnou poloosou Re úhel α, tj. a lze psát jako

$$a = \tan \alpha.$$

Následující transformace jsou provedeny v takovém pořadí, abychom přímku p transformovali na přímku shodnou s osou Re. Pro libovolné kompl. číslo z uvažujme postupně transformace, které dohromady popisují osovou souměrnost:

$$\begin{aligned}
&z - b,\\
&(z - b)e^{-i\alpha},\\
&\overline{(z - b)e^{-i\alpha}} = (\bar{z} - b)e^{i\alpha},\\
&(\bar{z} - b)e^{i\alpha}e^{i\alpha} = (\bar{z} - b)e^{2i\alpha},\\
&(\bar{z} - b)e^{2i\alpha} + b.
\end{aligned}$$

Výsledné zobrazení je tedy

$$f(z) = (\bar{z} - b)e^{2i\alpha} + b.$$

Jako cvičení popište, jaké vlastnosti má následujícího zobrazení

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

3.3 Přímka a kruh

V analytické geometrii lze rovnici přímky vyjádřit v různých tvarech. Jedním z nich je vyjádření přímky v tzv. vektorovém tvaru. Uvažujme rovinu v níž je dán bod A a tzv. směrový vektor $\vec{u}$. Každý bod přímky určené bodem A a vektorem $\vec{u}$ lze psát ve tvaru

$$X = A + t\vec{u},$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je reálný parametr (odtud název parametrický tvar). Je-li bod A obrazem kompl. čísla a a $\vec{u}$ je rozdílem kompl. čísel b a a, tj $b - a = \vec{u}$, pak lze libovolné komplexní číslo z ležící na přímce určené kompl. čísly a, b vyjádřit

$$z = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb,$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Pokud bychom uvažovali o bodech na úsečce ab (včetně krajních bodů), uvažujeme parametr t v intervalu $[0, 1]$.

Uvažujme kompl. čísla a, b, c, d. Pak jsou přímky ab a cd rovnoběžné právě tehdy, když

$$\frac{b - a}{\bar{b} - \bar{a}} = \frac{d - c}{\bar{d} - \bar{c}}. \tag{1}$$

K důkazu si stačí uvědomit, co znamená pro kompl. číslo z podíl $z/\bar{z}$. Pišme z v exponenciálním tvaru $z = re^{i\alpha}$. Pak

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{re^{i\alpha}}{re^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}$$

je komplexní jednotka (tzn. kompl. číslo na jednotkové kružnici se středem v počátku souřadnic) s velikostí argumentu 2α.

Nyní snadno zjistíme, kdy jsou tři kompl. čísla a, b, c kolineární: tehdy a jen tehdy, když

$$\frac{a - b}{\bar{a} - \bar{b}} = \frac{a - c}{\bar{a} - \bar{c}}.$$

Rovnost (1) lze přepsat i takto

$$\frac{b - a}{d - c} = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{\bar{d} - \bar{c}} = \overline{\left(\frac{b - a}{d - c}\right)},$$

což znamená, že číslo $(b - a)/(d - c)$ je reálné. Jako cvičení si prozkoumejte komplexní čísla splňující

$$z = \bar{z}, \qquad z = -\bar{z}, \qquad z = -z$$

a podobně.

Rovnoběžnost dokážeme již identifikovat. S kolmostí přímek je to podobně jednoduché. Přímky ab a cd jsou ortogonální právě tehdy, když

$$\frac{b - a}{\bar{b} - \bar{a}} = -\frac{d - c}{\bar{d} - \bar{c}}.$$

Obrazy komplexních čísel a, b, c a d leží na jedné kružnici právě tehdy, když

$$\frac{a - c}{b - c} : \frac{a - d}{b - d} \in \mathbb{R}.$$

3.4 Trojúhelník

V této sekci uvedeme pouze tři základní poučky, a to jak poznat podobnost dvou trojúhelníků nebo jak poznat rovnostranný trojúhelník. Nakonec uvedeme jednoduchý vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku, který můžete použít pro řešení domácího úkolu.

Uvažujme dva trojúhelníky abc a pqr. Řekneme že tyto trojúhelníky jsou podobné a shodně orientované tehdy a jen tehdy, pokud

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{p-r}{q-r}.$$

V této formulce je schována podobnost trojúhelníků podle věty *sus*. Stačí si jen uvědomit co vlastně znamená rovnost dvou komplexních čísel . Uvažujme o rovnosti dvou kompl. čísel u a w z geometrického hlediska (argumenty bereme modulo 2π):

$$u = v \quad \Leftrightarrow \quad |u| = |v| \text{ a } \arg u = \arg v.$$

Následující podmínky nám dovolí identifikovat rovnostranný trojúhelník. Pro kladně orientovaný rovnostranný trojúhelník jsou následující podmínky ekvivalentní:

- $|a-b| = |b-c| = |c-a|$,
- $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$,
- $(b-a)/(c-b) = (c-a)/(a-b)$,
- $(a + eb + e^2c)(a + ec + e^2b) = 0$,

kde $e = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$.

Obsah P trojúhelníku abc je nezáporné reálné číslo (podobný vztah je znám z analytické geometrie)

$$P = \frac{1}{4i} \det \begin{bmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4i}(a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} - \bar{a}b - \bar{b}c - \bar{c}a).$$

Druhá rovnost není nic jiného než výpočet determinantu 3×3 podle Cramerova pravidla.

4 Řešené příklady

Úloha 1. V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Jeho výška procházející bodem B protíná kružnici s průměrem AC v bodech P, Q a výška procházející bodem C protíná kružnici s průměrem AB v bodech M, N. Dokažte, že body P, Q, M a N leží na jedné kružnici.

Řešení. Pojďme se podívat nejprve na jedno řešení, které nevyužívá vektorovou algebru. Označme A' patu kolmice z bodu A na stranu BC a V ortocentrum trojúhelníku ABC, viz obrázek (2).

Z mocnosti bodu ke kružnici nad průměrem AB platí

$$|AV||A'V| = |MV||NV|.$$

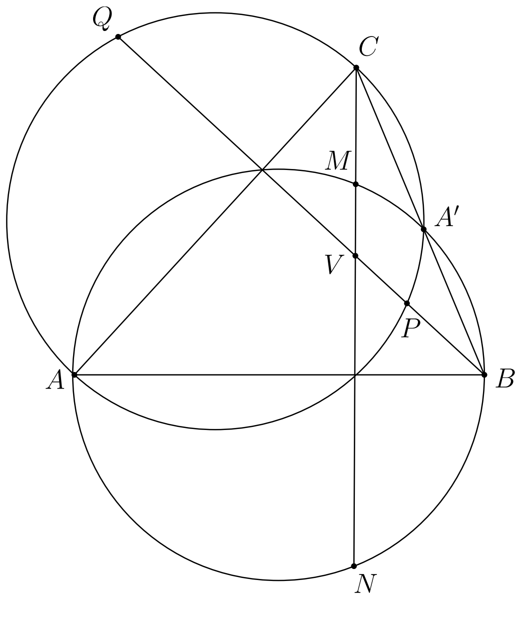
Podobně z mocnosti bodu ke kružnici nad průměrem AC

$$|AV||A'V| = |PV||QV|.$$

Tyto dvě rovnosti dávají dohromady

$$|MV||NV| = |PV||QV|.$$

Bod Q odděluje body M, N a P, Q, které splňují vztah mocnosti, tj. leží na společné kružnici. Tím je úloha vyřešena.



Obrázek 2:

Při využití vektorové algebry může být řešení delší a pracnější, ale zato mnohem poučnější. Platí $|AQ| = |AP|$ a $|AM| = |AN|$, neboť P, Q a M, N leží na kružnicích sestrojených nad průměry AC a AB. Přímky AC a AB, které jsou zároveň osami tětiv PQ a MN, procházejí bodem A. To nám napovídá, že pokud body P, Q, M, N leží na nějaké kružnici, její střed musí být nutně v bodě A.

Bod P leží na výšce z bodu B a přímky PB a AC jsou kolmé, proto

$$\vec{PB} \cdot \vec{AC} = 0.$$

V kružnici nad průměrem AC plyne z Thaletovy věty

$$|\angle APC| = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{AP} \cdot \vec{PC} = 0.$$

Potom platí následující sled rovností

$$\begin{aligned} |PA|^2 &= \vec{AP} \cdot \vec{AP} = \vec{AP} \cdot \vec{AP} + \vec{AP} \cdot \vec{PC} = \vec{AP} \cdot (\vec{AP} + \vec{PC}) = \\ &= \vec{AP} \cdot \vec{AC} = \vec{AP} \cdot \vec{AC} + \vec{PB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AP} + \vec{PB}) \cdot \vec{AC} = \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AC}. \end{aligned}$$

Podobně, ze symetrie zadání úlohy, dostaneme vztahy

$$\vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0, \qquad \vec{AM} \cdot \vec{MB} = 0.$$

Následující sekvence rovností je jejich důsledkem:

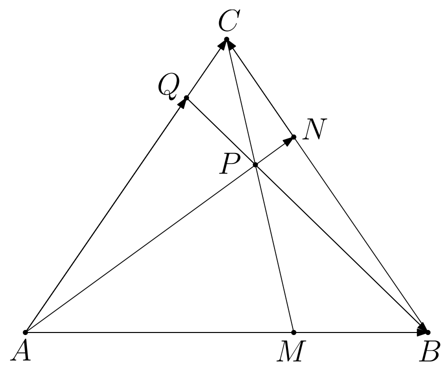
$$\begin{aligned} |AM|^2 &= \vec{AM} \cdot \vec{AM} = \vec{AM} \cdot \vec{AM} + \vec{AM} \cdot \vec{MB} = \vec{AM} \cdot \vec{AB} = \\ &= \vec{AM} \cdot \vec{AB} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AB}. \end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$|AN| = |AM| = |AP| = |AQ|$$

a naše domněnka je tedy dokázána. Body P, Q, M, N leží na jedné kružnici se středem v bodě A.

Úloha 2. Nechť M a N jsou postupně vnitřní body stran AB a BC rovnostranného trojúhelníku ABC, pro které platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P průsečík přímek AN a CM. Dokažte, že přímky BP a AN jsou navzájem kolmé.



Obrázek 3:

Řešení. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $|AB| = 1$. Označme Q průsečík přímek BP a AC. Základní myšlenka je ukázat kolmost vektorů $\vec{AN}$ a $\vec{QB}$.

Nejprve ale zjistíme v jakém poměru dělí bod Q stranu CA trojúhelníku ABC. Protože $|AM| = |BN| = \frac{2}{3}$ a $|BM| = |CN| = \frac{1}{3}$, je podle Cèvovy věty

$$1 = \frac{|AM|}{|BM|}\frac{|BN|}{|CN|}\frac{|CQ|}{|AQ|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|CQ|}{|AQ|} = \frac{1}{4}.$$

Proto $|CQ| = \frac{1}{5}$ a $|AQ| = \frac{4}{5}$.

Nyní můžeme vyjádřit vektory $\vec{AN}$ a $\vec{QB}$ např. pomocí vektorů $\vec{AC}$ a $\vec{AB}$. V trojúhelníku ABC platí

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad \Longrightarrow \quad \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}. \tag{2}$$

Z trojúhelníku ANC vyjádříme (s využitím rovnosti (2))

$$\vec{AN} = \vec{AC} - \vec{NC} = \vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}. \tag{3}$$

Z trojúhelníku ABQ vyjádříme

$$\vec{QB} = \vec{AB} - \frac{4}{5}\vec{AC}. \tag{4}$$

Dokážeme-li, že skalární součin $\vec{AN} \cdot \vec{QB} = 0$, bude úloha vyřešena. Podle (3) a (4) platí

$$\begin{aligned} \vec{AN} \cdot \vec{QB} &= \left(\frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}\right) \cdot \left(\vec{AB} - \frac{4}{5}\vec{AC}\right) = \\ &= \frac{1}{3}|AB|^2 + \frac{6}{15}\vec{AB} \cdot \vec{AC} - \frac{8}{15}|AC|^2 = \frac{1}{3} + \frac{6}{15}\frac{1}{2} - \frac{8}{15} = 0, \end{aligned}$$

kde jsme využili vztahů $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = |AB|^2 = 1$, $\vec{AC} \cdot \vec{AC} = |AC|^2 = 1$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |AB||AC| \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Úloha 3. Uvnitř strany BC lichoběžníku $ABCD$ (s delší základnou AB) leží bod K. Z bodů C a B sestrojme rovnoběžky s přímkami KA a KD (v tomto pořadí). Dokažte, že se tyto rovnoběžky protínají na přímce AD.

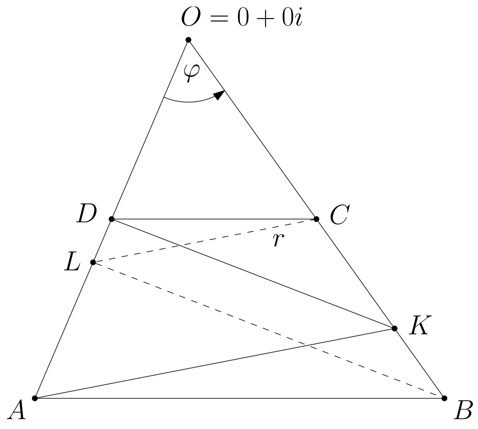
Řešení. Protože $|AB| > |CD|$, existuje průsečík přímek AD a BC. Označme ho O a ztotožněme ho s počátkem Gaussovy roviny, $O = 0 + 0i$. Označme dále φ kladně orientovaný úhel AOB.

Označme r přímku procházející bodem C, která je rovnoběžná s přímkou AK. Buď L průsečík přímek r a AD. Uvažujme kompl. číslo $\omega_1 \in \mathbb{C}$, $\omega_1 \neq 0$, které reprezentuje spirální podobnost o úhel φ kolem bodu O, jíž přejde bod A do bodu K,

$$K = \omega_1 A.$$

Protože $AK \parallel r$, jsou trojúhelníky AKO a LCO podobné. Bod L přejde proto v zobrazení ω_1 do bodu C,

$$C = \omega_1 L. \tag{5}$$



Obrázek 4:

Uvažujme spirální podobnost ω_2 ($0 \neq \omega_2 \in \mathbb{C}$) o úhel $-\varphi$ kolem bodu O, v níž přejde bod K do bodu D,

$$D = \omega_2 K.$$

S ohledem na vyjádření K platí

$$D = \omega_2 K = \omega_2 \omega_1 A = \omega_1 \omega_2 A. \tag{6}$$

V (6) převádí zobrazení $\omega_1\omega_2$ bod A do bodu D. Co je $\omega_1\omega_2$ za zobrazení? Jde o složení dvou spirálních podobností s úhly φ a $-\varphi$. Zobrazení $\omega_1\omega_2$ je proto stejnolehlost. Toto pozorování navíc potvrzuje fakt, že body A a D leží na jedné polopřímce.

Body B a D leží na jedné polopřímce a trojúhelníky ABO a DCO jsou podobné. Zobrazení $\omega_1\omega_2$ proto zobrazuje bod B do bodu C,

$$C = \omega_1 \omega_2 B. \tag{7}$$

Chceme-li ukázat rovnoběžnost $KD \parallel BL$ neboli podobnost trojúhelníků OKD a OBL, musíme ukázat platnost vztahu $L = \omega_2 B$. Připomeňme, že ω_2 je zobrazení, v němž přejde bod K do bodu D. Ze vztahů (5) a (7) obdržíme

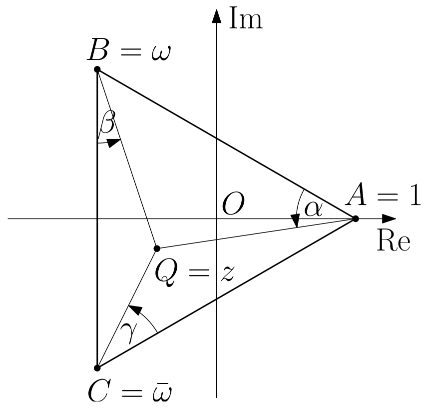
$$C = \omega_1 L = \omega_1 \omega_2 B$$

a po vydělení nenulovým číslem ω_1 dostaneme požadovaný vztah $L = \omega_2 B$. Ten nám říká, že v zobrazení ω_2 přejdou body B a L postupně v body L a D neboli že přímky BL a KD jsou rovnoběžné. To jsme ale chtěli dokázat – bod L je totiž průsečík přímek BL a CL a zároveň leží na úsečce AD.

Úloha 4. Uvnitř rovnostranného trojúhelníku ABC najděte všechny body Q, které splňují podmínku

$$|\angle QAB| + |\angle QBC| + |\angle QCA| = \pi/2.$$

Řešení. Umístěme trojúhelník ABC do Gaussovy roviny tak, aby body A, B a C splynuly postupně s obrazy komplexních čísel, jež jsou řešením rovnice $z^3 - 1 = 0$. Tj. jsou to postupně obrazy komplexních čísel $1, \omega$ a $\omega^2 = \bar{\omega}$.



Obrázek 5:

Uvažujme spirální podobnost se středem v bodě A, která převede bod B do bodu Q. Takové zobrazení má předpis

$$(\omega - 1) r_1 e^{i\alpha} = z - 1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\alpha} = \frac{1}{r_1} \frac{z-1}{\omega - 1},$$

kde r_1 je nějaké reálné číslo. Podobně uvažujme spirální podobnosti, které převádí bod C do bodu Q a bod A do bodu Q:

$$(\bar{\omega} - \omega) r_2 e^{i\beta} = z - \omega \quad \Rightarrow \quad e^{i\beta} = \frac{1}{r_2} \frac{z-\omega}{\bar{\omega} - \omega},$$

$$(1 - \bar{\omega}) r_3 e^{i\gamma} = z - \bar{\omega} \quad \Rightarrow \quad e^{i\gamma} = \frac{1}{r_3} \frac{z-\bar{\omega}}{1 - \bar{\omega}}.$$

Exponenciály jsme vyjádřili z důvodu, abychom mohli využít podmínku $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$. Vynásobením exponenciál dostaneme

$$\frac{1}{r_1 r_2 r_3} \frac{(z-1)(z-\omega)(z-\bar{\omega})}{(\omega-1)(1-\bar{\omega})(\bar{\omega}-\omega)} = e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\pi/2} = i.$$

Vidíme, že při splnění předpokladu musí být komplexní číslo ryze imaginární (číslo $r_1 r_2 r_3$ je totiž reálné). Budeme nyní upravovat číslo

$$\frac{(z-1)(z-\omega)(z-\bar{\omega})}{(\omega-1)(1-\bar{\omega})(\bar{\omega}-\omega)}.$$

Jmenovatel zlomku upravíme takto

$$(\omega - 1)(1-\bar{\omega})(\bar{\omega} - \omega) = (\omega - \bar{\omega})(1-\omega)(\overline{1-\omega}) = (\omega - \bar{\omega})|1-\omega|^2$$

a čitatel takto

$$\begin{aligned}(z-1)(z-\omega)(z-\bar\omega) &= (z-1)(z^2 - z(\omega+\bar\omega)+\omega\bar\omega) = \\ &= (z-1)(z^2+z+1) = z^3-1,\end{aligned}$$

kde jsme využili vztahy

$$\omega+\bar\omega+1=0, \qquad \omega\bar\omega = |\omega|^2 = 1. \tag{8}$$

První rovnost v (8) vlastně říká, že vektorový součet vektorů $\vec{OA} = (1,0)$, $\vec{OB} = (\mathrm{Re}\,\omega, \mathrm{Im}\,\omega)$ a $\vec{OC} = (\mathrm{Re}\,\bar\omega, \mathrm{Im}\,\bar\omega)$ je nula (vektorová samozřejmě), a druhý, že absolutní hodnota komplexního čísla ω je 1.

Celkem máme

$$\frac{(z-1)(z-\omega)(z-\bar\omega)}{(\omega-1)(1-\bar\omega)(\bar\omega-\omega)} = \frac{z^3-1}{(\omega-\bar\omega)|1-\omega|^2}.$$

Toto číslo musí být, jak už víme, ryze imaginární. Vzhledem k tomu, že číslo $\omega-\bar\omega$ je ryze imaginární a číslo $|1-\omega|$ je reálné, musí být z^3-1 reálné, tj. číslo z^3 musí být reálné. Kdy to nastane?

Pišme $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pak $z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi)$ je reálné právě tehdy, když $\sin 3\varphi = 0$. Řešení této goniometrické rovnice v intervalu $[0, 2\pi)$ je $\varphi = k\pi/3$ $(k = 0,1,2)$.

Rovnosti výše říkají, že hledaná množina bodů je sjednocení výšek v trojúhelníku ABC. Jak jistě tušíte, zatím jsme našli jen nutnou podmínku.

Nyní musíme ukázat ještě obrácenou implikaci: dokázat, že bod každé výšky v trojúhelníku ABC splňuje podmínku ze zadání. Tato část je ovšem jednoduchá.

Předpokládejme, že bod Q je např. na výšce procházející bodem C. Pak $|\angle QCA| = \pi/6$. Dále $|\angle QAB| = |\angle QBA|$ a $|\angle QBA| + |\angle QBC| = \pi/3$, takže

$$|\angle QAB| + |\angle QBC| + |\angle QCA| = \pi/2.$$

Závěr: hledanou množinou bodů je sjednocení výšek trojúhelníku ABC.

Úloha 5. Pro pravidelný sedmiúhelník $A_0A_1\ldots A_6$ dokažte rovnost

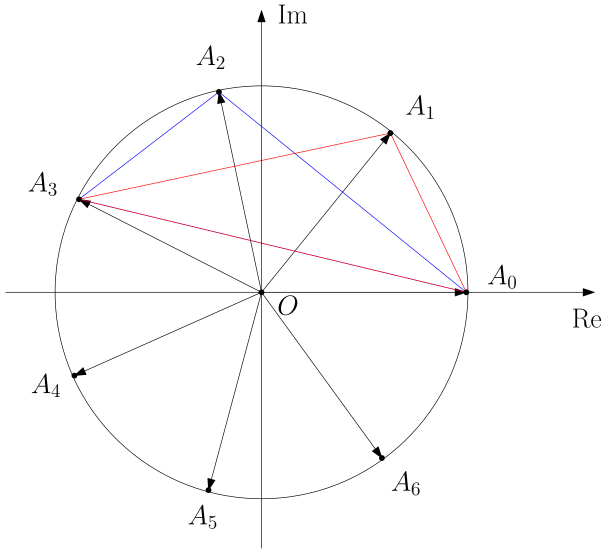
$$\frac{1}{|A_0A_1|} = \frac{1}{|A_0A_2|} + \frac{1}{|A_0A_3|}.$$

Řešení. Body A_k nechť jsou obrazy kompl. čísel $a_k = \varepsilon^k$ pro $k = 0,1,\ldots,6$, kde $\varepsilon = \exp(i2\pi/7)$, viz obrázek 6.

Z vlastností obvodových a úsekových úhlů plynou rovnosti úhlů: $|\angle A_3A_0A_2| = |\angle A_3OA_2|/2 = 2\pi/14$ a $|\angle A_3A_0A_1| = |\angle A_3OA_1|/2 = 2\pi/7$.

Uvažujme proto rotaci okolo bodu a_0 o úhel $\omega = 2\pi/14$ a o úhel $\varepsilon = \omega^2 = 2\pi/7$. V první rotaci přejde bod a_2 do bodu

$$a_2' = \omega(a_2 - a_0) + a_0 = \omega(a_2 - 1) + 1,$$



Obrázek 6:

v druhé rotaci přejde bod a_1 do bodu

$$a_1' = \varepsilon(a_1 - a_0) + a_0 = \varepsilon(a_1 - 1) + 1.$$

Rotaci bodů a_1 a a_2 jsme provedli tak, aby body a_3, a_2', a_1' byly kolineární. Pro ověření dokazované rovnosti proto stačí dokázat následující rovnost

$$\frac{1}{a_1' - 1} = \frac{1}{a_2' - 1} + \frac{1}{a_3 - 1}.$$

S ohledem na vyjádření čísel a_1', a_2', a_1, a_2 a a_3 stačí dokázat

$$\frac{1}{\omega^2(\omega^2 - 1)} = \frac{1}{\omega(\omega^4 - 1)} + \frac{1}{\omega^6 - 1}.$$

Po roznásobení a uspořádání dostaneme

$$\omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega^5 + \omega^3 + \omega.$$

Jednoduchým trikem převedeme liché mocniny na sudé. Platí totiž $\omega^5 = -\omega^{12}$, $\omega^3 = -\omega^{10}$ a $\omega = -\omega^8$. Tyto rovnosti se dají snadno dokázat geometricky z obrázku 6. Stačí si uvědomit, jaká je velikost úhlu ω a co znamená geometricky mocnina komplexního čísla. Můžeme proto psát

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^{12} + \omega^{10} + \omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 \\ &= \varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon^1 + 1 \\ &= \frac{\varepsilon^7 - 1}{\varepsilon - 1}. \end{aligned}$$

Nyní se ptáme: platí tato rovnost? Odpověď je ano, neboť ε je jeden z kořenů binomické rovnice $z^7 - 1 = 0$ (navíc zřejmě $\varepsilon \neq 1$). Dospěli jsem k rovnosti $0 = 0$ a požadovaná rovnost je dokázána.

Úloha 6. (**Ptolemayova věta**) Pro čtyři různé body A, B, C a D v rovině platí $|AB||CD| + |AD||BC| \geq |AC||BD|$. Rovnost platí právě tehdy, když A, B, C, D jsou kolineární nebo koncyklické (kde A, C oddělují B, D).

Řešení. Tuto úlohu lze elegantně řešit pomocí komplexních čísel. Označme a, b, c, d komplexní čísla odpovídající bodům A, B, C, D. Platí

$$(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b) = ab - ad + dc - bc = (a-c)(b-d).$$

Uvažujme absolutní hodnoty čísel, pak podle trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\begin{aligned} |AB||CD| + |AD||BC| &= |(b-a)||(d-c)| + |d-a||c-b| \geq \\ &\geq |(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)| = \\ &= |(a-c)(b-d)| = |AC||BD|. \end{aligned}$$

Rovnost v (9) nastane, pokud

$$(b-a)(d-c) = t(d-a)(c-b)$$

pro nějaké $t > 0$. To znamená, že komplexní číslo $(d-a)/(b-a)$ je kladný násobek $(d-c)/(c-b)$, proto

$$\arg\{(d-a)/(b-a)\} = \arg\{(d-c)/(c-b)\},$$

tj. $|\angle DAB| = 180^\circ - |\angle DCB|$, což nastane tehdy, když A, B, C, D jsou kolineární nebo koncyklické, kde A, C oddělují B, D.

Úloha 7. Uvažujme zobrazení $f(z) = Az + B$ s komplexními koeficienty A a B. Víme, že maximální hodnota $|f(z)|$ na segmentu $\{x \in [-1,1], y = 0\}$ v komplexní rovině ($z = x + yi$) je M. Dokažte, že pro každé z platí

$$|f(z)| \leq M\varrho,$$

kde ϱ je součet vzdáleností bodu z od bodů 1 a -1.

Řešení. Protože v zadání mluvíme o vzdálenosti bodu z od bodu 1, tj. $|z-1|$, a od bodu -1, tj. $|z+1|$, upravme předpis zobrazení $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) = Az + B &= \frac{1}{2}((z+1)(A+B) + (z-1)(A-B)) \\ &= \frac{1}{2}((z+1)f(1) + (z-1)f(-1)), \end{aligned}$$

kde jsme označili $f(1) = A + B$ a $f(-1) = A - B$.

Vezmeme-li v úvahu předpoklad ze zadání, tj. že platí

$$|f(-1)| \le M \qquad |f(-1)| \le M,$$

a definici ϱ, tj.

$$\varrho = |(z+1)| + |(z-1)|,$$

můžeme odhadnout absolutní hodnotu $f(z)$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{2}|((z+1)f(1) + (z-1)f(-1))| \\ &\le \frac{1}{2}(|(z+1)| + |(z-1)|)M = \frac{1}{2}\varrho M, \end{aligned}$$

kde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost. Dokázali jsme dokonce silnější tvrzení.

5 Poděkování

Tento text vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí". Rád bych tímto poděkoval všem organizátorům a zvláště Dr. Šírovi za příležitost se takového projektu zúčastnit.

6 Literatura

- Dušan Djurkič a kol., The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Springer 2006, ISBN 0-387-24299-6.
- Marko Radovanovič, Complex Numbers in Geometry, The Author(s) and the IMO Compendium Group 2007, *www.imomath.com*.

Úloha 1. Uvažujme komplexní čísla $a = 1 + i$, $b = 3 + 2i$ a $c = 4 - 3i$. Zjistěte, zda leží v jedné přímce a pokud ne, spočtěte obsah trojúhelníku abc. Výsledek ověřte pomocí vektorové součinu.

Úloha 2. Popište množinu všech komplexních čísel splňující současně následující podmínky:

$$|z - 1| \geq |z - (-2i)|, \qquad |z - 2| < 4.$$

Úloha 3. Odvoďte vzorce pro $\cos 3x$ a $\sin 3x$ využívající pouze mocnin $\cos x$ a $\sin x$. Při odvození použijte Moivrovu větu.

Úloha 4. Rozeberte podrobně zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kde

$$f(z) = \frac{r^2}{\bar{z}},$$

kde r je reálné číslo. Jak se toto zobrazení nazývá?

Úloha 5. Ke každé straně libovolného n-úhelníka ($n \geq 3$) sestrojíme vektor, který je na tuto stranu kolmý, směřuje ven z tohoto n-úhelníka a má délku shodnou s délkou strany. Dokažte, že součet těchto vektorů je nulový vektor.