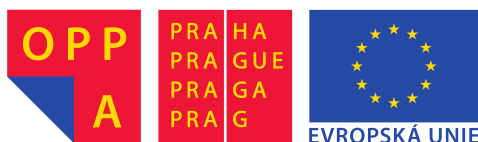

Neeuklidovská geometrie

Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.



Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti."

Neeuklidovská geometrie aneb je rovnoběžka vždy jen jedna?

Lukáš Krump, MFF UK

1 Co způsobily Euklidovy axiomy

V příběhu neeuklidovské geometrie je matematický obsah neodmyslitelně spjat s historií myšlenek a lidí, kteří je přinášeli.

Na samém začátku stojí jméno starořeckého matematika Euklida, který žil zhruba mezi lety 325 a 260 př.n.l. a působil zejména v Alexandrii. Své mnohasvazkové dílo *Stoicheia*, což překládáme jako *Základy*, sepsal za účelem shrnutí v té době známé matematiky a jejího postavení na pevné, nepochybnitelné základy. Nepochybně se mu to podařilo, neboť *Základy* se používaly jako základní zdroj matematiky další zhruba dva tisíce let. Přesto v samotných „základech *Základů*“ byla jedna – řekněme – mezera, která nedala generacím matematiků spát a která nakonec ve svém důsledku vedla právě k objevu neeuklidovské geometrie.

Oč šlo? O takzvaný pátý Euklidův axiom neboli axiom o rovnoběžkách. Nejprve si připomeňme, co je to axiom: axiomem myslíme základní tvrzení, které se v rámci dané teorie nedokazuje, a naopak všechna tvrzení se z daných axiomů dokázat dají. Euklides považoval za „nejzákladnější“ část matematiky geometrii, a proto hned na samém začátku prvního dílu *Základů* se po zavedení nutných pojmů setkáváme s formulací několika axiomů geometrie, dnes bychom řekli euklidovské geometrie v rovině. Existují různé verze formulací i očíslování axiomů, uveďme stručnou, přitom však zcela ilustrativní verzi s pěti axiomy. Euklides požaduje, aby geometrie v rovině splňovala:

1. Každými dvěma body lze vést úsečku. (*Dnes bychom řekli, že dva různé body jsou koncovými body právě jedné úsečky.*)
2. Tuto úsečku lze libovolně prodloužit oběma směry. (*Tedy úsečka určuje přímku, která je „na obě strany nekonečná“.*)
3. Každou úsečkou lze opsat kružnici. (*Neboli je-li dán bod a kladný poloměr, je tím jednoznačně určena kružnice.*)
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny. (*Pravý úhel je podle definice polovina přímého úhlu, axiom tvrdí, že jeho velikost nezávisí na poloze (a pro další účely ji budeme značit $\frac{\pi}{2}$).*)
5. Jsou-li dány tři přímky p, q, r tak, že r protíná přímky p, q pod úhly α, β na stejné straně přímky r , a platí-li $\alpha + \beta < \pi$, pak p a q se protínají, a sice na té straně přímky r , kde jsou úhly α, β .

Zastavme se u pátého axiomu. Na první pohled nás zarazí jeho zřejmá složitost v porovnání s jednoduchými, jasnými a stručnými axiomy 1.–4.

Mnoha lidem již od starověku připadalo, že pátý axiom by měl být spíš větou, která půjde dokázat z prvních čtyř axiomů. Tento dojem je ještě silnější, když si uvědomíme, že se z něj dá snadno odvodit (rozmyslete si!) ekvivalentní tvrzení

5a. Mějme přímku a bod, který na ní neleží. Pak tímto bodem lze vést s danou přímkou právě jednu rovnoběžku.

To už je přeci jen stručnější formulace než ta původní Euklidova, snadno vidíme, co říká, ale problém zůstává. Toto tvrzení říká „očividnou pravdu“, nikdo si nedokáže představit, že by to mohlo být jinak (mohou snad daným bodem vést dvě rovnoběžky? nebo naopak žádná?), přesto se nedaří jej odvodit z prvních čtyř axiomů. Tato formulace se díky své jednoduchosti stala nejslavnější verzí pátého euklidova axiomu a ten se proto často nazývá axiomem o rovnoběžkách. A na dva tisíce let se stal palčivým problémem, nevyřešenou dírou v samotných základech matematiky.

V průběhu staletí se množství myslitelů ze všech možných zemí snažilo dokázat pátý axiom a dařilo se jim jej převést jiná, ekvivalentní tvrzení, která byla shledávána tak očividným, jako axiom 5a., přesto ona očividnost plynula pouze z lidské zkušenosti s euklidovskou geometrií v rovině, z neschopnosti představit si jinou možnost, totiž že by platily první čtyři axiomy, ale pátý nikoli, a až do počátku 19. století se nikomu nepodařilo jej ani dokázat ani vyvrátit. Přitom představa, že by pátý Euklidův axiom mohl být na prvních čtyřech nezávislý, tedy že by snad mohla existovat jiná geometrie než euklidovská, byla dosti děsivá. Zastavme se na chvíli u některých z oněch zmíněných tvrzení, ekvivalentních s axiomem o rovnoběžkách, a zkusme si u každého z nich představit, že by neplatil, přesněji že by platil jeho opak. Většinou se jedná o dosti příšernou představu, no jen posuďte sami. Axiom 5. je tedy ekvivalentní s každým z následujících tvrzení:

5b. Každým vnitřním bodem dutého úhlu (tj. úhlu nejvýše přímého) lze vést přímku, protínající obě ramena úhlu mimo vrchol úhlu. (*V opačném případě tedy existuje nějaký dutý úhel a nějaký jeho vnitřní bod takový, že ŽÁDNÁ přímka jím procházející neprotne obě ramena úhlu, nýbrž nejvýše jedno z nich, s výjimkou přímky jdoucí vrcholem úhlu.*)

5c. Ke každým třem nekolineárním bodům (tj. bodům neležícím na jedné přímce) existuje čtvrtý, stejně od nich vzdálený – tedy střed kružnice těmito třem bodům opsané. (*V opačném případě tedy existuje trojice nekolineárních bodů, kterým nelze opsat kružnici.*)

5d. Ke každé přímce existují tři body, které leží po jedné její straně, jsou od ní stejně vzdálené a jsou kolineární. (*V opačném případě tedy existuje přímka, taková, že když na jedné její straně vezmeme tři body stejně od ní vzdálené, pak nemohou být kolineární.*)

5e. Součet úhlů v každém trojúhelníku je roven π . (*V opačném případě tedy existuje trojúhelník se součtem úhlů menším nebo větším než π .*)

5f. Existují dva trojúhelníky, které si jsou podobné, ale nikoli shodné (tj.

mají stejné úhly, ale různě dlouhé strany). *(V opačném případě tedy platí, že pokud máme dva trojúhelníky, které jsou si podobné, musí být nutně shodné, čili platí věta „uuu“, tj. trojúhelník je zadán svými úhly.)*

Vidíme tedy, že se jedná o dosti zapeklitý problém. Veškerá naše intuice říká, že opak axiomu o rovnoběžkách platit nemůže, protože odporuje jakékoli rozumné představě o geometrii v rovině (jak je vidět z formulací 5a.–f.), ale dokázat tento axiom se taky nedaří. Možná je problém vůbec v našem pojetí pojmu rovnoběžky. Zkuste se sami zamyslet, jak je vlastně definována rovnoběžka k dané přímce. Patrně najdete několik různých způsobů, popřemýšlejte tedy, jak je na sebe vzájemně převést.

2 Sférická geometrie

Čtenář, který se pustil do studia neeuklidovské geometrie, už asi ze samotného názvu tuší rozuzlení. Je to skutečně tak, pátý axiom se dokázat nedá, říkáme, že je na prvních čtyřech nazávislý a podle toho, zda přijmeme pátý axiom nebo jeho opak, vede celý systém axiomů na geometrii euklidovskou nebo neeuklidovskou. Než se dostaneme k popisu toho velkého objevu, kterému říkáme neeuklidovská geometrie, pojďme si na jednom snadném příkladu uvědomit, že odlišné geometrie jsou vůbec možné.

Představme si ideální povrch Země: naši planetu znázorníme jako kouli, a povrchu koule se často říká sféra; to, co nyní zkonstruujeme, se nazývá sférická geometrie. Pojďme na chvíli říkat „přímky“ hlavním kružnicím na sféře, tedy kružnicím, které mají střed ve středu koule. Na povrchu ideální Země by to byl rovník, a také všechny poledníky (brané kolem dokola), ale zeměpisné rovnoběžky jiné než rovník už hlavními kružnicemi nejsou, tedy nemají nárok na název přímka. (Všimněme si, že slovo rovnoběžka se zde používá pro čáru stejně vzdálenou od rovníku, která ale sama NENÍ přímkou. Nepřipomíná nám to negaci axiomu 5d.?) Máme tak zavedený systém přímek a bodů (odlišný od euklidovského) a můžeme tak zkoumat platnost pěti Euklidových axiomů.

Než tak učiníme, uvědomme si, že děláme zcela přirozenou věc vzhledem k tomu, že my lidé jsme proti Zemi maličcí a máme tendenci považovat ten kousek Zeměkoule, na který dohlédneme, za kus roviny a měřit vzdálenosti euklidovsky, tedy v zásadě chybně. Pro většinu praktických účelů je aproximace kouskem euklidovské roviny v pořádku, odchylky ve velikostech či úhlech jsou zcela zanedbatelné, když měříme budovy nebo pozemky (kde se navíc ve skutečnosti mnohem více projevuje nerovnost terénu, které jsme vyloučili prohlášením, že Zemi považujeme za přesnou kouli). Ovšem v planetárním měřítku musíme samozřejmě vzít v úvahu zakřivení Země. Ale při pojetí, že „přímka je čára, po které jdu, když jdu pořád rovně, jinými slovy přímka je nejkratší spojnice dvou bodů“, jsou samozřejmě přímky hlavními kružnicemi, jak jsme prve definovali. A mimochodem, zeměpisné rovnoběžky (kromě rovníku) opravdu nejsou přímkami ve smyslu nejkratší spojnice, stačí si uvědomit, že transkontinentální trasy letadel nevedou po rovnoběžkách,

např. let z Říma do New Yorku, který leží na přibližně stejné zeměpisné šířce, nevede po příslušné rovnoběžce, nýbrž podstatně severněji kolem Islandu – prakticky po nejkratší trase čili přímce.

Z téhož důvodu nemáme problém se zavedením pojmu úhel dvou přímek na sféře: z našeho lidského pohledu jsou dvě sférické přímky v malém okolí svého průsečíku nerozeznatelné od euklidovských přímek, stačí tedy vzít jejich úhel jako úhel příslušných dvou přímek. Přísně vzato tedy definujeme úhel dvou sférických přímek jak úhel jejich příslušných tečen.

Splňuje tedy sférická geometrie pět euklidových axiomů? Upřímně řečeno nikoli a je to hned vidět. Jsou totiž splněny pouze axiomy 1. a 4., zatímco 2. a 3. nikoli. Ale tyto dva neplatí vlastně jen z jediného důvodu, a sice kvůli omezené velikosti sféry. Na dané sféře s daným poloměrem jsou samozřejmě omezené vzdálenosti, takže úsečku nelze prodloužit libovolně daleko, stejně jako nelze narýsovat kružnici o poloměru větším, než se na sféru vejde. Ale pokud přidáme do těchto dvou axiomů příslušná délková omezení, budou v zásadě platit a tak se zdá, že to vede na vcelku rozumnou geometrii.

Zajímavý je samozřejmě pátý axiom. Zkusme jej otestovat na formulaci 5e., tedy tvrzení o součtu úhlů v trojúhelníku. Představme si tři body, a sice A=severní pól, B=průsečík rovníku a poledníku 0° a C=průsečík rovníku a poledníku 90° . Trojúhelník daný těmito body je rovnostranný a má u každého vrcholu úhel 90° neboli $\frac{\pi}{2}$, jejich součet je tedy $\frac{3\pi}{2}$ a pátý axiom tudíž neplatí!

Sférická geometrie tedy není plnokrevnou geometrií, jelikož jsou v ní vzdálenosti omezené jistou univerzální konstantou (polovinou délky rovníku) a musíme proto omezovat rozsah u axiomů 2. a 3., ale je prvním příkladem, že pátý axiom nemusí automaticky platit. Ověřme ještě, jak se chová ve formulaci 5a., tedy kolik existuje rovnoběžek k dané přímce jdoucích daným bodem. Uvědomíme si nejprve, že každé dvě přímky na sféře se protínají – vskutku, hlavní kružnice tuto vlastnost mají. Máme-li tedy zadánu přímku p a bod na ní neležící, musí nutně kterákoli přímka q , jdoucí tím bodem, protnout přímku p , což nespadá do žádné rozumné definice rovnoběžky. Na sféře tedy platí verze pátého Euklidova axiomu, kdy k dispozici není ŽÁDNÁ rovnoběžka.

Napadá nás tedy, zda existuje geometrie, kde by naopak bylo rovnoběžek více než jedna. Už jsme na stopě velkého objevu.

3 Velký objev – Lobačevského rovina

Objev neeuklidovské geometrie je spojen zejména se jménem ruského matematika Nikolaje Ivanoviče Lobačevského, který žil v letech 1792–1856 a celý jeho profesní život je spjat s univerzitou v Kazani. S podobnými myšlenkami přišli prakticky zároveň s ním i János Bolyai a velký Carl Friedrich Gauss, ale Lobačevského přínos je zásadní a nejucelenější. Neeuklidovská geometrie má dokonce přesné datum, které lze považovat za její narození:

23.2.1826, kdy Lobačevski přednesl o svém objevu první ústní sdělení. První publikace následovala až o tři roky později, a další rozpracování následovala v dalších letech. Bohužel, Lobačevski zůstal dlouhou dobu nepochopen a jeho publikace byly šmahem odmítány. Dva tisíce let lidé věřili, že pátý axiom musí jít dokázat, a tento člověk tvořivého ducha představil geometrii, která dokazovala opak, který – jak už víme – přináší mnoho velmi podivných důsledků. Proto byl první roky po publikování terčem mnoha odsudků a šíravých kritik. Nakonec si však jeho objev právem našel místo na slunci.

Tuto geometrii v rovině, splňující čtyři první Euklidovy axiomy a opak pátého, nazýváme nyní na počest jejího hlavního objevitele Lobačevského geometrií, a také už víme, že je vlastně jen jedním z mnoha případů obecnějších neeuklidovských geometrií vyskytujících se ve všech možných dimenzích. O Lobačevského rovině také často mluvíme jako o hyperbolické rovině.

Geometrie hyperbolické roviny má poněkud složitější popis než sférická geometrie zmíněná výše. Situace je navíc poněkud komplikována tím, že existuje více různých způsobů (tzv. modelů), jak hyperbolickou rovinu popsat, přičemž každý má své výhody i nevýhody. Pro další postup zvolíme takzvaný Poincarého polorovinný model, který lze popsat ještě poměrně elementárně.

Označme nejprve písmenem P horní polorovinu v (euklidovské) rovině, tj. $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$. Tato polorovina (bez hraniční přímky, tj. vodorovné osy, kterou nazveme h) bude modelovat náš vznikající hyperbolický svět. Body mimo ni nebudou z pohledu P existovat, ač budou mít svůj význam v mnoha konstrukcích.

Nyní zavedeme přímky, přesněji řečeno budeme mít přímky dvou druhů. Přímkou prvního druhu budeme rozumět každou polokružnici v P , která má střed na h , jinak řečeno jde o průnik kružnice se středem na h s polorovinou P . Přímkou druhého druhu budeme rozumět každou polopřímku v P , kolmou na h . Všimněme si, že oba typy přímek jsou realizovány pomocí čar (tj. polokružnice resp. polopřímky), které jsou kolmé na h , přičemž u polokružnice se přesněji jedná o kolmost h a příslušné tečny.

Dále zavedeme pojem absolutních bodů neboli bodů v nekonečnu. Množinou absolutních bodů A rozumíme sjednocení $A = h \cup \{H\}$, kde h je již zavedená vodorovná osa, a k ní se přidává jediný prvek H , což je podle definice tzv. nevlastní bod, čili směr $(0, 1)$, tedy směr svislého vektoru kolmého na h . To může být na první pohled matoucí, ale uvědomme si, že díky této definici máme na každé přímce dva (různé) absolutní body, tedy body v nekonečnu. Přímka prvního druhu má oba na ose h , přímka druhého druhu má jeden na ose h a druhý je směr H , společný všem přímkám druhého druhu. Absolutní body samozřejmě neleží v P , podobně jako v euklidovské rovině si umíme představit body v nekonečnu, ale nejsou součástí euklidovské roviny. K tomu zavedeme označení: je-li x přímka (prvního nebo druhého druhu), označme x' dvouprvkovou množinu jejích absolutních bodů.

Dále pojmenujeme tři různé vzájemné polohy dvou (různých) přímek. Přímky x, y jsou

1. rovnoběžné, pokud $x' \cap y' \neq \emptyset$ (tedy pokud mají společný absolutní bod),
2. různoběžné, pokud $x' \cap y' = \emptyset, x \cap y \neq \emptyset$ (tedy pokud nemají společný absolutní bod, ale mají společný bod v P),
3. mimoběžné, pokud $x' \cap y' = \emptyset, x \cap y = \emptyset$ (tedy pokud nemají společný absolutní bod ani bod v P).

Máme tedy tři různé vzájemné polohy dvou různých přímek, zatímco v euklidovské rovině jsou jen dvě možnosti (rovnoběžky a různoběžky). Na vysvětlenou, v hyperbolické rovině jsou přímky rovnoběžné, pokud se „potkávají v nekonečnu“, tj. mají společný jeden z absolutních bodů – to odpovídá jedné z možných definic rovnoběžnosti v euklidovské rovině. Pojmy různoběžnosti jsou zcela analogické – přímky se protínají v jednom bodě. Zato případ mimoběžnosti, kde se přímky ani neprotínají ani nemají společný bod v nekonečnu, nemá v euklidovské rovině žádnou analogii. Z toho vidíme, že v hyperbolické rovině je „více místa“, jsou možné tři vzájemné polohy, a srovnejme si to se sférickou geometrií, kde je naopak možná jen jediná vzájemná poloha, a sice různoběžnost.

Rozmysleme si nyní, co se stane s pátým euklidovým axiomem. Bez ohledu na druh zadané přímky, máme-li dán bod, který na ní neleží, lze snadno nahlédnout, že existují právě dvě přímky, které procházejí tímto bodem a zároveň mají se zadanou přímkou společný jeden z jejích dvou absolutních bodů, tedy jsou s ní rovnoběžné! Je to právě způsobeno tím, že každá přímka má dva různé absolutní body. Vidíme tedy, že platí negace původního pátého axiomu s upřesněním, že rovnoběžky jsou právě dvě, a už si dopředu můžeme prozradit, že na základě dalších definic se ukáže, že axiomy 1.–4. jsou beze zbytku splněny, nejsou s tímto posledním ve sporu a tudíž jsme skutečně našli geometrii, která není euklidovská. Dá se tedy očekávat, že se bude i v dalších ohledech chovat jinak než euklidovská rovina, přitom však způsobem, který do sebe zapadá a skrývá v sobě matematickou krásu.

4 Úhly a vzdálenosti

Aby byla geometrie plnohodnotná, musíme mít kromě vzájemných poloh přímek zavedeno měření úhlů a vzdáleností. Začneme s úhly – definice je snadná. Úhlem dvou přímek v P budeme rozumět úhel jejich tečen. Co to konkrétně znamená?

Jsou-li dvě přímky různoběžné, protínají se v jednom bodě, v něm sestrojíme tečny (pokud je jedna z přímek druhého druhu, tečna s ní splývá) a jejich úhel je náš hledaný úhel. Znamená to tedy, že úhly se „znázorňují správně“, tedy úhel dvou přímek v P je to, co vidíme jako úhel jejich euklidovských obrazů.

Pokud jsou přímky rovnoběžné, potkávají se v absolutním bodě a pak je úhel jejich tečen nutně 0. Proč? Pokud je společný absolutní bod jeden z bodů přímky h , pak už víme, že jsou na ni obě přímky kolmé, tedy svírají nulový úhel. Pokud je společným absolutním bodem směr H , jedná se nutně o dvě přímky druhého druhu, a tedy o rovnoběžky v euklidovském smyslu, čili jejich úhel je opět nula.

A konečně v případě mimoběžek nedává tato definice smysl – přímky totiž nemají žádný průsečík ani v P ani v A , tedy není kde konstruovat tečny ani měřit úhel. Ale můžeme si prozradit, že lze úhel přímek zavést jistým složitějším vzorcem, který dává výše uvedené výsledky pro různoběžky a rovnoběžky, ale pro mimoběžky vychází hodnota úhlu imaginární.

Je-li řeč o úhlu, můžeme rovnou zavést trojúhelník. Trojúhelníkem budeme rozumět útvar ohraničený třemi různými přímkami, přičemž každé dvě se protínají v jednom bodě (vrcholu trojúhelníka), lhotejno zda je to bod v P nebo v A (tedy dvě sousední strany trojúhelníka můžou být různoběžné nebo rovnoběžné). Úhly v trojúhelníku pak určujeme podle uvedené definice a vidíme, že je několik možností podle toho, zda je vrchol trojúhelníka absolutním bodem nebo ne (tedy zda jsou příslušné dvě strany rovnoběžné či nikoli). Trojúhelník nazveme c -krát asymptotickým, pokud $c = 1, 2, 3$ jeho vrcholů je absolutních; u takového vrcholu je pak samozřejmě nulový úhel. Tříkrát asymptotický trojúhelník pak tedy má všechny tři úhly nulové! Tedy i jejich součet je nula a to neguje axiom 5e. z úvodní kapitoly.

Chceme-li zavést vzdálenost, musíme opět rozlišit dva případy podle typu přímky, na které oby body leží.

Začneme s případem, že body A, B leží na přímce druhého druhu. Označíme na chvíli písmenem P ten z absolutních bodů přímky AB , který leží na přímce h (ten druhý je totiž H). Označíme symbolem $e(XY)$ euklidovskou vzdálenost bodů X, Y a definujeme hyperbolickou vzdálenost bodů AB jako

$$d(AB) = |\log_2 e(AP) - \log_2 e(BP)| = \left| \log_2 \frac{e(AP)}{e(BP)} \right|.$$

Abychom si dokázali představit, jak se takto zavedená vzdálenost dá znázornit, zamysleme se nad tím, jak najít bod ve vzdálenosti 1 od daného bodu. Buď tedy dán bod A , hledáme bod B , který bude s bodem A ležet na přímce druhého druhu a jejich vzdálenost bude $d(AB) = 1$. Vyjděme z definice a nejprve odstraňme absolutní hodnotu:

$$\log_2 \frac{e(AP)}{e(BP)} = \pm 1.$$

Dále odstraníme logaritmus:

$$\frac{e(AP)}{e(BP)} = 2^{\pm 1}.$$

Vidíme tedy, že řešením jsou dva body B_1, B_2 , které mají euklidovskou vzdálenost od absolutního bodu P dvojnásobnou, resp. poloviční než je euklidovská vzdálenost $e(AP)$.

Pokud tedy nakreslíme celočíselnou škálu na přímce druhého druhu, vidíme, že se vzdálenosti směrem dolů (k ose h) zkracují, směrem vzhůru se naopak roztahují. Tedy vzdálenosti se – na rozdíl od úhlů – zobrazují zkresleně.

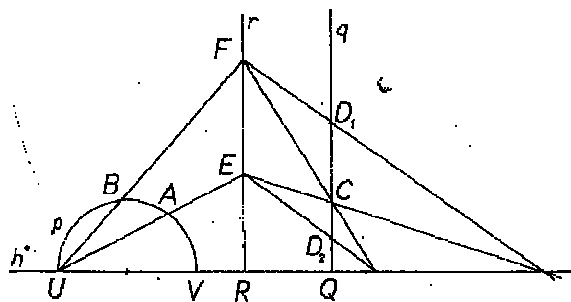
Domácí úkol 1. Střed úsečky na přímce druhého druhu. Nechť A, B jsou dva body na přímce druhého druhu. Najděte podmínku (vyjádřenou v **euklidovských** vzdálenostech), kterou musí splňovat střed úsečky AB (střed ve smyslu hyperbolické vzdálenosti). Popište geometrickou konstrukci tohoto středu. Pomůže vám mocnost bodu ke kružnici.

V druhém případě uvažujme body A, B ležící na přímce prvního druhu. Označíme-li písmeny α resp. β úhel, který svírá poloměr kružnice příslušný bodu A resp. B s osou h , zavádíme vzdálenost bodů jako

$$d(AB) = \left| \log_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \log_2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right| = \left| \log_2 \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \right|.$$

Abychom oba případy dali do souvislosti, popišme si přenášení vzdáleností mezi oběma případy. Nejprve přeneseme vzdálenost mezi dvěma přímkami druhého druhu. Jsou-li A, B dva body na přímce druhého druhu a a C bod na jiné přímce druhého druhu c , hledáme bod D na téže přímce takový, že $d(AB) = d(CD)$. Konstrukce je snadná: postupně kreslíme (euklidovské) přímky takto: AC , její průsečík s h označme U , dále přímku BU , její průsečík s přímkou c je jedno hledané řešení D_1 , což vyplývá z podobnosti trojúhelníků a z definice $d(CD)$. Podobně druhé řešení D_2 najdeme tak, že nakreslíme přímku BC , její průsečík s h bude V , dále přímku VA a její průsečík s c je D_2 .

Jak přenést vzdálenost mezi přímkou prvního druhu a přímkou druhého druhu? K tomu nám stačí dokázat, že jsou-li A, B na přímce prvního druhu a , E, F na přímce druhého druhu c spojeny tak, že průsečík přímek AE a BF splývá s absolutním bodem U , který je absolutním bodem přímky a , pak $d(AB) = d(EF)$. To je obsahem následujícího úkolu.



Domácí úkol 2. Přenesení vzdálenosti z přímky prvního druhu na přímku druhého druhu. Dokažte z definice hyperbolické vzdálenosti, že na obrázku platí $d(AB) = d(EF) = d(CD_1) = d(CD_2)$. Pomůže vám věta o středovém a obvodovém úhlu.

Domácí úkol 3. Kolmice k přímkce jdoucí daným bodem. Je-li dána přímka a (prvního nebo druhého druhu) a bod M , který na ní neleží, dokažte, že existuje právě jedna přímka m , procházející bodem M a kolmá na přímkou a . Pro přímkou a prvního druhu vám pomůže mocnost bodu ke kružnici.

5 Kružnice, úhel rovnoběžnosti, plocha trojúhelníka

Jak vypadají kružnice v hyperbolické rovině? Definice je analogická definici v euklidovské rovině. Je-li dán střed S a poloměr $r > 0$, pak jimi určená kružnice je množina

$$K_{S,r} = \{X \in P; d(XS) = r\}.$$

Na první pohled není vůbec zřejmé, jak takto definovaná množina může vypadat; víme už přeci, že vzdálenosti se zobrazují zkresleně. Naštěstí lze dokázat, že kružnice se znázorní jako euklidovská kružnice, přičemž její střed se znázorní posunutě, přesněji hyperbolický střed kružnice je vůči euklidovskému středu posunut poněkud dolů – to souvisí s dříve uvedenou konstrukcí středu úsečky.

Popišme si nyní fenomén zvaný úhel rovnoběžnosti. Mějme jednu asymptotický trojúhelník ARU , přičemž bod U je absolutní (tedy je u něj nulový úhel) a u vrcholu R je pravý úhel. Označíme dále $d = d(AR)$ a φ úhel u vrcholu A . Pak platí

$$d = \log_2 \cotg \frac{\varphi}{2}.$$

Uvědomme si nejprve euklidovskou analogii – při daném nastavení jsou přímky AU a RU rovnoběžné a tedy svírají s přímkou AR stejný, tedy pravý úhel. V hyperbolickém případě je ale tento úhel φ odlišný od pravého (přesněji je menší než pravý). Nazývá se úhlem rovnoběžnosti a uvedený vzorec je důležitý tím, že jej dává do vzájemně jednoznačného vztahu s délkou d . Pokud se délka d zmenšuje k nule, roste velikost úhlu φ k pravému.

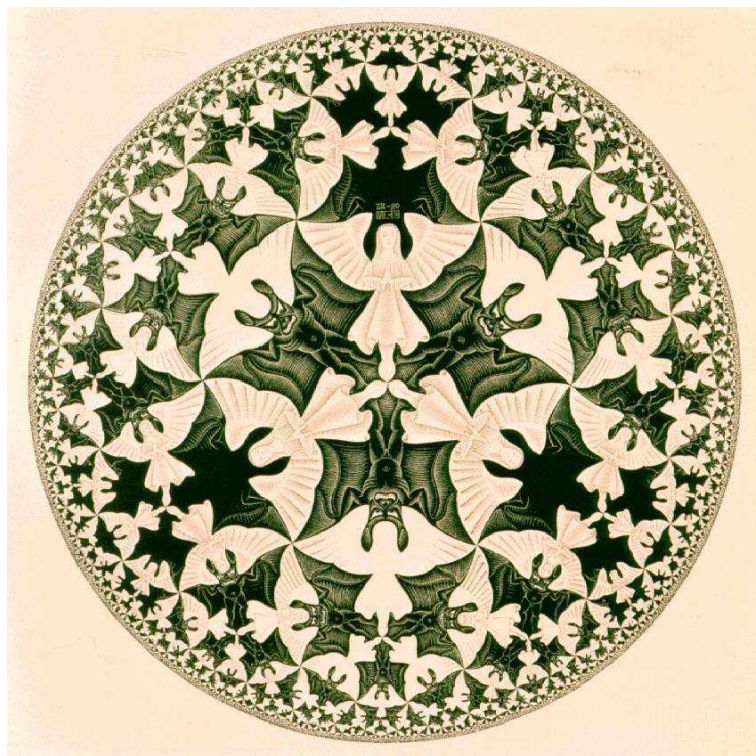
Je to tedy situace zcela odlišná od euklidovské. V euklidovské geometrii je velikost úhlu φ nezávislá na délce d , v hyperbolické geometrii na ní závisí. To v důsledku znamená, že v hyperbolické geometrii si nemůžeme volit jednotku délky, jak jsme zvyklí z euklidovské. Abychom věděli, co je jeden metr, musíme ho nějak zavést, např. jistou dobu byla za definici metru brána délka kovového etalonu. Přitom pro úhel žádný takový etalon nebyl třeba – bylo zřejmé, co je plný úhel a jeho zlomky. V hyperbolické geometrii je naopak jednotka délky závislá na úhlu, a je tudíž také dána absolutní mírou, a žádný etalon tudíž není potřeba. Tento fakt byl velkým trnem v oku Lobačevského kritikům, kteří považovali takovou geometrii za nemožnou.

Tento fenomén ukazuje ještě jeden důležitý fakt: euklidovská geometrie je v jistém smyslu limitním případem hyperbolické. Řekněme si to znovu:

pokud se délka d zmenšuje k nule, roste velikost úhlu φ k pravému, a tedy se situace blíží euklidovské. Jinak řečeno, pokud bychom uvažovali jen velmi malé vzdálenosti, téměř nerozlišíme hyperbolickou geometrii od euklidovské. To je podobné jako v naší úvaze o sférické geometrii: z pohledu maličkých lidí, jako jsme my, vypadá povrch planety rovný, euklidovský. Až při pohledu zvenčí vidíme, že není.

Nyní se ještě vrátíme k trojúhelníku a ukážeme si vzorec pro výpočet jeho plošného obsahu. Začneme vzorcem pro obsah trojúhelníka na sféře.

Domácí úkol 4. Plocha sférického trojúhelníka. Uvažujme sféru (=povrch koule) o poloměru r . Víte-li, že plošný obsah dvojúhelníka D_α daného úhlem α je $P_{D_\alpha} = 2\alpha r^2$, dokažte, že plošný obsah sférického trojúhelníka T s vnitřními úhly α, β, γ je $P_T = r^2((\alpha + \beta + \gamma) - \pi)$.



Jak nám to pomůže v hyperbolickém případě? Dá se ukázat, že hyperbolická rovina se v určitém smyslu chová jako sféra o jistém imaginárním poloměru $r = ki$, kde i je imaginární komplexní jednotka a k je nějaké kladné reálné číslo. Po dosazení do uvedeného vzorce ($r^2 = -k^2$) dostáváme vzorec pro plošný trojúhelníka v hyperbolické rovině $P_T = k^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$. Protože plocha trojúhelníka je automaticky kladné číslo, plyne z toho, že součet úhlů v trojúhelníku je zde menší než π . A zároveň odtud plyne, že se plocha trojúhelníka dá vyjádřit pouze pomocí jeho úhlů a nejsou k tomu potřeba délky stran, což je opět věc euklidovské geometrii zcela cizí.

6 Závěrem

Uvedli jsme zde neeuklidovskou geometrii pomocí polorovinného modelu. Dlužno říci, že tato geometrie lze znázornit i mnoha jinými způsoby, které lze na sebe převádět. Jen ve stručnosti, jedním z dalších modelů je Poincarého kruhový model, kde jako prostor P slouží vnitřek kruhu a přímky jsou všechny kruhové oblouky, kolmé na vnější kružnici (jsou jen jednoho typu). Tento model byl zpopularizován M.C.Escherem v jeho obrazech, např. Circle limit IV, kde jsou vidět systémy přímek, a trojúhelníky jimi určené jsou nahrazeny anděly a démony. Každý anděl má hyperbolicky stejné rozměry a stejný plošný obsah.

Viděli jsme množství fenoménů, které jsou vlastní hyperbolické geometrii, jsou naprosto odlišné od euklidovského světa a můžeme se tedy ptát, zda má tato geometrie nějaký reálný význam, zda se vyskytuje někde v přírodě (podobně jako sférickou geometrii vlastně používáme k popisu povrchu naší planety). Překvapivě je odpověď ano – a dokonce to tušil už Lobačevski, ač neměl dost prostředků, aby to dokázal. Lobačevski předpokládal, že by jeho geometrie (rozšířená do dimenze tři) mohla být reálnou geometrií ve vesmíru, i když zjistitelná jen na obrovských vzdálenostech, a snažil se to určit výpočtem úhlů mezi vzdálenými hvězdami – nevypočítal ovšem odchylku větší, než byla předpokládaná chyba měření.

Průlom přišel až s Albertem Einsteinem na začátku 20. století. Jeho obecná teorie relativity je přímo postavená na neeuklidovské geometrii (přesněji na Riemannově geometrii, která je širokým zobecněním té Lobačevského) a zhruba řečeno říká, že velmi hmotná tělesa zakřivují prostor kolem sebe a to tak, že vypadá jako kusy hyperbolického prostoru. Platnost obecné teorie relativity byla již mnohokrát prokázána a vlastně se bez ní již dnes neobejdeme: například systém GPS používá ve vzorcích k určování polohy tzv. relativistickou korekci, která započítává rychlosti a vzdálenosti, v nichž se pohybují příslušné družice okolo Země, a bez tohoto výpočtu by bylo určování polohy beznadějně chybné.

Neeuklidovská geometrie aneb je rovnoběžka vždy jen jedna?

Lukáš Krump, MFF UK

Úlohy

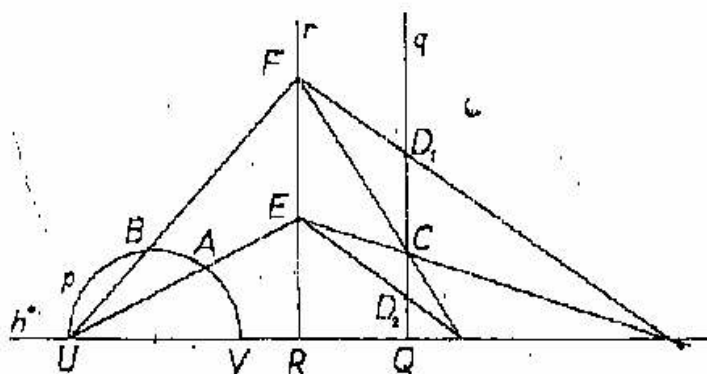
1. Střed úsečky na přímce druhého druhu. Nechtě A, B jsou dva body na přímce druhého druhu. Najděte podmínku (vyjádřenou v **euklidovských** vzdálenostech), kterou musí splňovat střed úsečky AB (střed ve smyslu hyperbolické vzdálenosti). Popište geometrickou konstrukci tohoto středu. Pomůže vám mocnost bodu ke kružnici.

Neeuklidovská geometrie aneb je rovnoběžka vždy jen jedna?

Lukáš Krump, MFF UK

Úlohy

2. Přenesení vzdálenosti z přímky prvního druhu na přímku druhého druhu. Dokažte z definice hyperbolické vzdálenosti, že na obrázku platí $d(AB) = d(EF) = d(CD_1) = d(CD_2)$. Pomůže vám věta o středovém a obvodovém úhlu.



Neeuklidovská geometrie aneb je rovnoběžka vždy jen jedna?

Lukáš Krump, MFF UK

Úlohy

3. Kolmice k přímce jdoucí daným bodem. Je-li dána přímka a (prvního nebo druhého druhu) a bod M , který na ní neleží, dokažte, že existuje právě jedna přímka m , procházející bodem M a kolmá na přímku a . Pro přímku a prvního druhu vám pomůže mocnost bodu ke kružnici.

Neeuklidovská geometrie aneb je rovnoběžka vždy jen jedna?

Lukáš Krump, MFF UK

Úlohy

4. Plocha sférického trojúhelníka. Uvažujme sféru (=povrch koule) o poloměru r . Víte-li, že plošný obsah dvojúhelníka D_α daného úhlem α je $P_{D_\alpha} = 2\alpha r^2$, dokažte, že plošný obsah sférického trojúhelníka T s vnitřními úhly α, β, γ je $P_T = r^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$.
