
Kuželosečky a kvadriky ve škole i kolem nás

Bc. Aneta Mirová

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.



Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti."

Kuželosečky a kvadriky ve škole i kolem nás

Aneta Mirová, MFF UK

1 Kuželosečky

Kuželosečka se dá definovat několika způsoby. Pro nás je nejvhodnější tento způsob definice:

DEFINICE: Nechť je dána kvadratická rovnice

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

, kde $[a, b, c] \neq [0, 0, 0]$, potom množina všech bodů $X[x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují této rovnici se nazývá *kuželosečka* a rovnice se nazývá *rovnice kuželosečky*.

DEFINICE: Jestliže rovnici kuželosečky nevyhovují reálné souřadnice žádného bodu, budeme ji nazývat *formálně reálná kuželosečka*. V opačném případě hovoříme o *bodově reálné kuželosečce*.

PŘÍKLAD 1: Kuželosečka $k : x^2 + 1 = 0$ je kuželosečka formálně reálná, protože neexistuje $x \in \mathbb{R}$, které by vyhovovalo této rovnici.

DEFINICE: Matici

$$\begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix}$$

nazveme *maticí kuželosečky* $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$. Determinant matice kuželosečky budeme nazývat *determinantem kuželosečky* a budeme jej značit $\mathcal{D}$.

POZNÁMKA: Rovnici kuželosečky můžeme popsat maticovou rovnicí

$$(1 \ x \ y) \cdot \begin{pmatrix} f & d & e \\ d & a & b \\ e & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

POZNÁMKA: Je-li hodnost matice kuželosečky 3 (tj. $\mathcal{D} \neq 0$), pak danou kuželosečku nazýváme *regulární*. Je-li hodnost matice kuželosečky 2 nebo 1 (tj. $\mathcal{D} = 0$), pak danou kuželosečku nazýváme *singulární* nebo *složenou*.

1.1 Kuželosečka a přímka

Uvažujme kuželosečku $k : ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ a přímku p určenou jejím bodem $M [m, n]$ a směrovým vektorem $\vec{u}(u_1, u_2)$. Hledání společných bodu (průsečíků) kuželosečky k a přímky p převedeme na řešení rovnice

$$a(m + t \cdot u_1)^2 + 2b(m + t \cdot u_1) \cdot (n + t \cdot u_2) + c(n + t \cdot u_2)^2 + 2d(m + t \cdot u_1) + 2e(n + t \cdot u_2) + f = 0$$

po úpravě

$$(a \cdot u_1^2 + 2b \cdot u_1 \cdot u_2 + c \cdot u_2^2) \cdot t^2 + 2[u_1 \cdot (a \cdot m + b \cdot n + d) + u_2 \cdot (b \cdot m + c \cdot n + e)] \cdot t + a \cdot m^2 + 2b \cdot m \cdot n + c \cdot n^2 + 2d \cdot m + 2e \cdot n + f = 0$$

Jedná se o rovnici s neznámou t a s reálnými parametry a, b, c, d, e, f . Po dořešení této rovnice s neznámou t dostaneme průsečíky přímky s kuželosečkou. Pokud má přímka s kuželosečkou společné tři různé body, leží celá na kuželosečce.

PŘÍKLAD 2: Sestrojte průsečík kuželosečky $k : x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ s přímkou $p : 5x - y - 5 = 0$.

ŘEŠENÍ: Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Z rovnice pro přímku p si vyjádříme y a dosadíme do rovnice kuželosečky k .

$$\begin{aligned} x^2 - 10x^2 + 10x - 75x^2 + 150x - 75 - 4x - 30x - 30 + 3 &= 0 \\ &\vdots \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 0 \\ x_1 = 1 \quad x_2 &= \frac{1}{2} \\ y_1 = 0 \quad y_2 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Kuželosečka k a přímka p mají společné dva body $A [1, 0]$ a $B [\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}]$.

PŘÍKLAD 3: Sestrojte průsečík kuželosečky $k : x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$ s přímkou $p : x + y + 5 = 0$.

ŘEŠENÍ: Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Z rovnice pro přímku p si vyjádříme x a dosadíme do rovnice kuželosečky k .

$$\begin{aligned} y^2 + 2y + 1 - y^2 - 3y - 3 + y + 2 &= 0 \\ 3 &\neq 0 \end{aligned}$$

Kuželosečka k a přímka p nemají společný žádný bod.

1.2 Asymptotické směry kuželosečky

V této kapitole budeme mluvit o asymptotických směrech kuželosečky, nikoli o asymptotách.

DEFINICE: Směr v rovině, daný nenulovým vektorem $\vec{u} = (u, v)$, se nazývá *asymptotickým směrem kuželosečky* o rovnici $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, jestliže $au^2 + 2buv + cv^2 = 0$.

DŮSLEDEK: Jestliže je jeden vektor násobkem jiného vektoru, pak jsou tyto dva vektory shodné. Proto můžeme za u zvolit libovolné číslo, dopočítat v a tímto dostaneme jednoho ze zástupců asymptotických směrů.

POZNÁMKA: Některé kuželosečky asymptotické směry mají a některé nemají. Nyní se podíváme, kdy kuželosečka asymptotický směr bude mít:

$$\begin{aligned} au^2 + 2buv + cv^2 &= 0 \\ au^2 + buv + buv + cv^2 &= 0 \\ u(au + bv) + v(bu + cv) &= 0 \\ u(au + bv) &= -v(bu + cv) \\ \frac{au + bv}{bu + cv} &= -\frac{v}{u} \\ au + bv &= -\lambda v \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ bu + cv &= \lambda u \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

z předchozích vztahů platí:

$$\begin{aligned} au + (b + \lambda)v &= 0 \\ u(b - \lambda) + cv &= 0. \end{aligned}$$

Po vynásobení první rovnice $u(b - \lambda)$ a druhé rovnice $-au$ dostáváme:

$$\begin{aligned} a(b - \lambda)u^2 + uv(b^2 - \lambda^2) &= 0 \\ -au^2(b - \lambda) - acuv &= 0. \end{aligned}$$

Tyto dvě rovnice můžeme sečíst $uv(b^2 - \lambda^2 - ac)$, a protože $u \neq 0$ a $v \neq 0$, musí platit, že $-b^2 + \lambda^2 + ac = 0$.

Nyní mohou nastat tři případy:

- $ac - b^2 > 0$, takže neexistuje λ , tj. neexistuje asymptotický směr kuželosečky
- $ac - b^2 = 0$, takže $\lambda = 0$, tj. existuje jeden asymptotický směr kuželosečky, pro který platí $au + bv = 0$ a $bu + cv = 0$.
- $ac - b^2 < 0$, takže existují $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tj. existují dva různé asymptotické směry kuželosečky

PŘÍKLAD 4: Vypočítejte asymptotické směry kuželosečky $k : 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

ŘEŠENÍ: Nejdřív zjistíme, kolik asymptotických směrů bude zadaná kuželosečka mít. $2 - 4 < 0$, takže kuželosečka bude mít dva různé asymptotické směry. Tyto směry musí splňovat rovnici $2u^2 - 4uv + v^2 = 0$, zvolíme si $v = 1$ a dopočítáme u .

Zadaná kuželosečka má dva asymptotické směry $\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ a $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

1.3 Střed kuželosečky a singulární bod kuželosečky

DEFINICE: Bod $X[x, y]$ budeme nazývat *středem kuželosečky*, jestliže souřadnice tohoto bodu budou řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} ax + by + d &= 0 \\ bx + cy + e &= 0 \end{aligned}$$

DEFINICE: Bod $M[m, n]$ budeme nazývat *singulárním bodem kuželosečky*, jestliže souřadnice tohoto bodu budou řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} am + bn + d &= 0 \\ bm + cn + e &= 0 \\ dm + en + f &= 0 \end{aligned}$$

DŮSLEDEK: Kuželosečka se singulárním bodem se tedy skládá ze dvou různoběžek, z jedné přímky nebo pouze z tohoto singulárního bodu, a to podle toho, má-li dva asymptotické směry, jeden asymptotický směr nebo nemá-li žádný asymptotický směr. Je-li kuželosečka přímkou, je každý její bod bodem singulárním.

PŘÍKLAD 5: Najděte střed, popř. singulární bod, kuželosečky $k : 2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$.

ŘEŠENÍ: Souřadnice středu kuželosečky musí splňovat rovnice:

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 1 &= 0 \\ -3x + 5y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Střed má souřadnice $M[2, 1]$. Aby byl střed singulárním bodem, musí jeho souřadnice být ještě řešením $-x + y + 1 = 0$.

Bod $M[2, 1]$ je singulárním bodem kuželosečky k .

1.4 Singulární kuželosečky

Singulárním kuželosečkám se také někdy říká kuželosečky *složené*.

DEFINICE: Kuželosečka, pro kterou se determinant matice kuželosečky $\mathcal{D}$ roven nule, se nazývá *singulární kuželosečka*.

POZNÁMKY: Klasifikace singulárních kuželoseček:

- $ac - b^2 > 0$, kuželosečka nemá žádný asymptotický směr a skládá se z jediného singulárního bodu
- $ac - b^2 < 0$, kuželosečka má dva asymptotické směry a skládá se ze dvou různoběžných přímk, které se protínají v singulárním bodě
- $ac - b^2 = 0$, kuželosečka má jeden asymptotický bod a pro:
 - $af - d^2 = 0$ se skládá z jedné přímky
 - $af - d^2 > 0$ je formálně reálná
 - $af - d^2 < 0$ se skládá ze dvou rovnoběžných přímk

PŘÍKLAD 6: Určete o jakou kuželosečku se jedná k : $-6x^2 - \frac{5}{2}xy + y^2 + 19x - 2y - 8 = 0$.

ŘEŠENÍ: Nejdřív si spočítáme determinant matice kuželosečky

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} -6 & -\frac{5}{4} & \frac{19}{2} \\ -\frac{5}{4} & 1 & -1 \\ \frac{19}{2} & -1 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Kuželosečka je singulární.

$ac - b^2 = -6 - \frac{25}{4} < 0$ má dva asymptotické směry.

Výpočet asymptotických směrů:

$$-6u^2 - \frac{5}{2}uv + v^2 = 0$$

$$u = 1$$

$$v^2 - \frac{5}{2}v - 6 = 0$$

$$v_1 = -\frac{3}{2}$$

$$v_2 = 4$$

Zadaná kuželosečka má asymptotické směry $\vec{u}_1 = (1, -\frac{3}{2})$ a $\vec{u}_2 = (1, 4)$.

Výpočet singulárního bodu:

$$-6x - \frac{5}{4}y = -\frac{19}{2}$$

$$-\frac{5}{4}x + y = 1$$

$$\frac{19}{2}x - y = 8$$

Řešením této soustavy rovnic je bod $M[\frac{12}{11}, \frac{26}{11}]$.

Kuželosečka k se skládá ze dvou přímek, které mají asymptotický směr a procházejí singulárním bodem, tj. z přímek:

$$\begin{aligned}4x - y - 2 &= 0 \\ \frac{3}{2}x + y - 4 &= 0.\end{aligned}$$

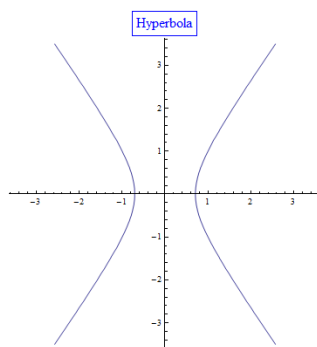
1.5 Regulární kuželosečky

DEFINICE: Kuželosečka, pro kterou není determinant matice kuželosečky $\mathcal{D}$ roven nule, se nazývá *regulární kuželosečka*.

POZNÁMKA: O těchto kuželosečkách víme, že neobsahují přímku.

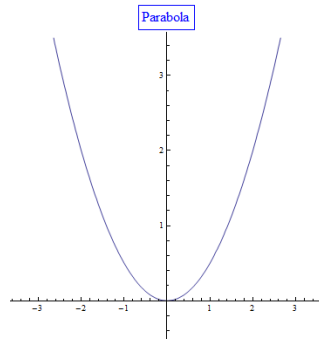
POZNÁMKY: Klasifikace regulárních kuželoseček:

- $ac - b^2 < 0$, kuželosečka je hyperbola



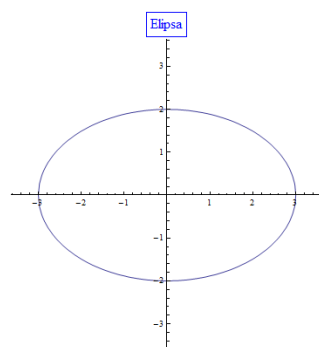
Obrázek 1: Hyperbola

- $ac - b^2 = 0$, kuželosečka je parabola



Obrázek 2: Parabola

- $ac - b^2 > 0$, kuželosečka nemá žádný asymptotický směr a pro:
 - $a \cdot \mathcal{D} < 0$ je elipsa



Obrázek 3: Elipsa

- $a \cdot \mathcal{D} > 0$ je kuželosečka formálně reálná

PŘÍKLAD 7: Určete o jakou kuželosečku se jedná $k : 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 100 = 0$.

ŘEŠENÍ: Neprve si ověříme jestli se jedná o regulární kuželosečku:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} -100 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & 2 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

Zadaná kuželosečka je regulární.

$$ac - b^2 = 2 \cdot 5 - 2^2 = 6$$

Zadaná kuželosečka může být formálně reálná nebo elipsa.

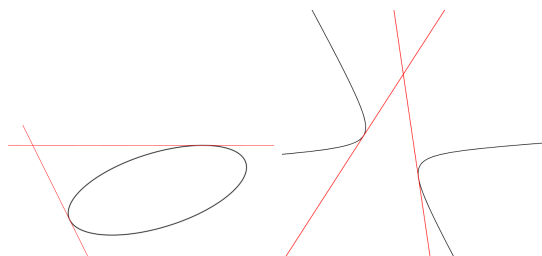
$$a \cdot \mathcal{D} < 0$$

Zadaná kuželosečka je elipsa.

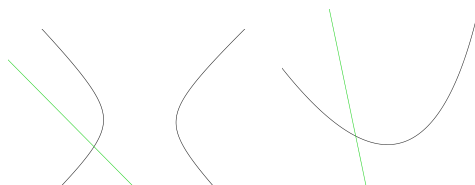
1.6 Tečny, asymptoty a polára kuželosečky

DEFINICE: Tečna je přímka, která má s kuželosečkou společný jeden bod dotyku. Na rozdíl od průsečíku leží všechny okolní body kuželosečky ve stejné polorovině určené tečnou.

POZNÁMKA: Tečna kuželosečky může být nadefinovaná různými způsoby, pro lepší názornost si uvedeme několik příkladů:



Obrázek 4: Příklady tečen

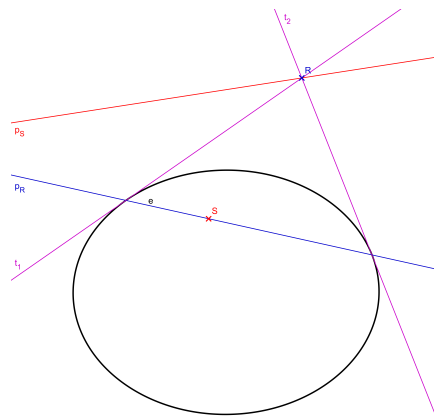


Obrázek 5: Příklady přímek, které mají s kuželosečkou společný jeden bod a nejsou tečny.

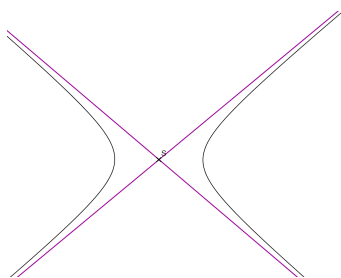
Tečna procházející bodem $M[m, n]$, který je bodem dotyku má obecnou rovnici $(am + bn + d)x + (bm + cn + e)y + dm + en + f = 0$.

DEFINICE: *Asymptotou* nazveme přímku, která má asymptotický směr a prochází středem kuželosečky.

POZNÁMKA: Elipsa nemá žádné asymptoty, protože nemá asymptotické směry. Parabola nemá žádné asymptoty, protože nemá střed. Jediná regulární kuželosečka, která má asymptoty je hyperbola.



Obrázek 7: Polára.



Obrázek 6: Hyperbola a její asymptoty.

DEFINICE: Přímku $(ar + bs + d)x + (br + cs + e)y + dr + es + f = 0$ nazveme *polárou* bodu $R[r, s]$, jestliže bod R není bodem kuželosečky.

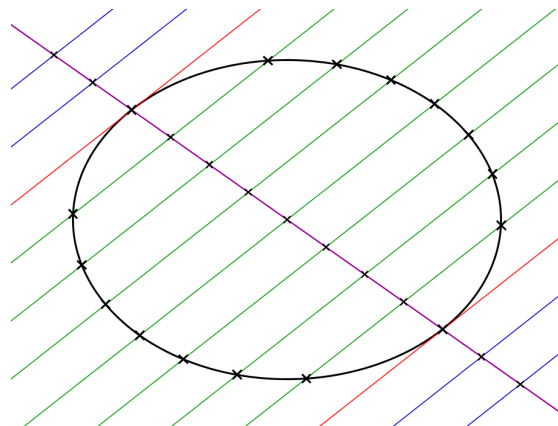
POZNÁMKA: Průsečíky poláry bodu R a kuželosečky jsou dotykové body tečen vedených z bodu R . Pokud polára bodu R nemá s kuželosečkou žádný společný bod, nelze z bodu R spustit ke kuželosečce tečny. Poláru bodu R budeme značit p_R .

DŮSLEDEK: Leží-li bod S na poláře bodu R , musí polára bodu S procházet bodem R .

PŘÍKLAD 8: V bodě $T[-1, 1]$ sestrojte tečnu ke kuželosečce $k : 3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$.

VÝSLEDEK: Tečna má rovnici $9x + 2y + 7 = 0$.

PŘÍKLAD 9: Z bodu $R[0, 0]$ spusťte tečny ke kuželosečce $k : 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$.



Obrázek 8: Sdružené směry.

ŘEŠENÍ: Nejprve si odvodíme rovnici poláru bodu R vzhledem ke kuželosečce k .

$$p_R : 2x + 2,5y + 1 = 0$$

Určíme průsečíky poláry bodu R s kuželosečkou k . (tj. řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.)

$$T_1[-1, \frac{2}{5}] \quad T_2[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$$

Z bodu R můžeme ke kuželosečce k spustit dvě tečny, jedna je určeta body T_1 , R a druhá tečna je určena body T_2 , R .

A mají obecné rovnice: $t_1 : 2x + 5y = 0$ a $t_2 : 2x + y = 0$.

1.7 Sdružené směry, sdružené průměry a osy kuželosečky

Mějme dán směr $\vec{u} = (u, v)$, tímto máme dānu i množinu přímek tohoto směru. Některé z těchto přímek budou sečny kuželosečky a budou ji protínat ve dvou bodech.

DEFINICE: Středy všech takových tětiv budou ležet na přímce, tzv. *sdruženém průměru* se směrem $\vec{u}$.

DEFINICE: Kolmým sdruženým směrem kuželosečky budeme říkat *směry os kuželosečky*.

DEFINICE: *Osou kuželosečky* nazveme přímkou, která má směr os a prochází středem kuželosečky.

POZNÁMKA: Protože osy musí být na sebe kolmé, musí splňovat soustavu rovnic:

$$\rho u = au + bv$$

$$\rho v = bu + cv$$

, kde ρ je řešením rovnice $\begin{vmatrix} a - \rho & b \\ b & c - \rho \end{vmatrix} = 0$

DEFINICE: *Vrcholem kuželosečky* budeme rozumět průsečík kuželosečky a os.

PŘÍKLAD 10: Sestrojte osy kuželosečky a její vrcholy $k : 2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0$.

VÝSLEDEK: Osy jsou $o_1 : x + 2y - 1 = 0$ a $o_2 : -2x + y - 1 = 0$ a vrcholy mají souřadnice $[-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{2}, \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{2}]$ a $[-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{2}, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{2}]$.

2 Kvadriky

DEFINICE: Necht' je dána kvadratická rovnice

$$ax^2 + 2bxy + 2gxz + cy^2 + 2hyz + jz^2 + 2dx + 2ey + 2kz + f = 0$$

, potom množina všech bodů $X[x, y, z]$, jejichž souřadnice vyhovují této rovnici se nazývá *kvadrika* a rovnice se nazývá *rovnice kvadriky*.

DEFINICE: *Matice kvadriky* :

$$\begin{pmatrix} f & d & e & k \\ d & a & b & g \\ e & b & c & h \\ k & g & h & j \end{pmatrix}$$

2.1 Klasifikace podle hodnoty matice kvadriky

POZNÁMKA: Budeme říkat, že kvadrika má hodnotu n , pokud matice kvadriky bude mít hodnotu n .

- Kvadrika hodnoty 2 je tvořena dvojicí rovin.
- Kvadrika hodnoty 3 je kuželová nebo válcová plocha.
- Kvadrika hodnoty 4 je regulární kvadrikou.

2.2 Přímka a kvadrika

Uvažujme kvadriku $k : ax^2 + 2bxy + 2gxz + cy^2 + 2hyz + jz^2 + 2dx + 2ey + 2kz + f = 0$ a přímku p určenou jejím bodem $M[m, n, o]$ a směrovým vektorem $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$. Hledání společných bodů (průsečíků) kvadriky k a přímky p převedeme na řešení soustavy rovnic, podobně jako když jsme hledali průsečík přímky s kuželosečkou.

Pokud má přímka s kvadrikou společné tři různé body, leží celá na kvadrice.

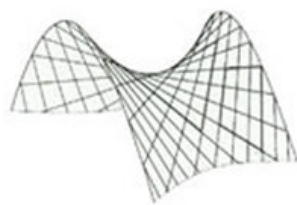
PŘÍKLAD 11: Sestrojte průsečík kvadriky $k : z^2 + xy - yz - 5x = 0$ s přímkou $p \equiv AB$. $A[-1, -2, -3]$, $B[2, 4, 6]$.

VÝSLEDEK: Kvadrika k a přímka p mají společné dva body $C[0, 0, 0]$ a $D[1, 2, 3]$.

2.3 Přímkové regulární kvadriky

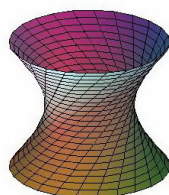
Součástí některých regulárních kvadrik může být přímka, tyto kvadriky nazýváme přímkovými kvadrikami.

Hyperbolický paraboloid.



Obrázek 9: Paraboloid jako přímková plocha.

Jednodílný hyperboloid.



Obrázek 10: Hyperboloid jako přímková plocha

Obsah

1	Kuželosečky	1
1.1	Kuželosečka a přímka	2
1.2	Asymptotické směry kuželosečky	3
1.3	Střed kuželosečky a singulární bod kuželosečky	4
1.4	Singulární kuželosečky	5
1.5	Regulární kuželosečky	6
1.6	Tečny, asymptoty a polára kuželosečky	8
1.7	Sdružené směry, sdružené průměry a osy kuželosečky	10
2	Kvadriky	11
2.1	Klasifikace podle hodnoty matice kvadriky	11
2.2	Přímka a kvadrika	11
2.3	Přímkové regulární kvadriky	12

Kuželosečky a kvadriky ve škole i kolem nás

Aneta Mirová

Příklady

1. Sestrojte průsečík přímky r a kuželosečky k v závislosti na parametru p . $r : x = p$, $k : x^2 - 2xy + 2x + 3y - 5 = 0$.
2. Pro která $p, q \in \mathbb{R}$ je kuželosečka $k : x^2 + 2pxy + y^2 + 2x + 2qy - 3 = 0$ singulární a má jeden asymptotický směr?
3. Z bodu $R[3, 4]$ spusťte tečny ke kuželosečce $k : 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$ a zjistěte body dotyku.
4. Určete osy a vrcholy kuželosečky $k : 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$.
5. Určete průsečík kvadriky $k : x^2 + 3y^2 - z^2 + 1 + 2xy - 4x + 2z = 0$ s přímkou $p \equiv AB$, $A[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $B[2, 2, -3 - \sqrt{2}]$.

Příklady na procvičení

1. Sestrojte průsečík přímky p a kuželosečky k . $p : x = -y - 1$ $k : x^2 - y^2 + 3x + y + 2 = 0$.
2. Pro které $p \in \mathbb{R}$ se bude kuželosečka $k : p(x^2 + y^2) + (1 + p^2)xy + (1 + p)(x + y) + 1 = 0$ skládat ze dvou různoběžných přímek?
3. Z bodu $R[0, 0]$ spusťte tečny ke kuželosečce $k : x^2 - 4xy - y^2 + 4x - 1 = 0$ a zjistěte body dotyku.
4. Určete osy a vrcholy kuželosečky $k : x^2 - 12xy - 4y^2 + 5 = 0$.
5. Určete průsečík kvadriky $k : 2x^2 - 3y^2 + z^2 - 2xy + 4x + 2z = 0$ s přímkou $p \equiv AB, A[2, 2, -2], B[-1, -1, 1]$.