Funkcionální rovnice

Vít Musil, MFF UK

Úlohy, kterými se budeme zabývat, mají většinou krátké zadání, které zpravidla začíná slovy „Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro které platí …“ Podmínky, které si klademe na funkci f, mohou vypadat třeba takto:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

nebo

$$f\big(y - f(x)\big) = f(y) - f\big(f(x)\big) + f(x) - x.$$

To jsou jen dva příklady z nepřeberného množství funkcionálních rovnic, ve kterých hledáme reálnou funkci f, která by rovnici vyhovovala pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, nikoliv hodnotu pro x jako v klasické rovnici.

Od úplných základů až k pokročilým trikům

Na přednášce se budeme zpočátku věnovat důkladnému pochopení zadání, ujasníme si, co se po nás při hledání řešení funkcionální rovnice vlastně chce a jak k úloze přistupovat. Následně si ukážeme typické metody řešení a vyvodíme několik obecných vlastností funkcí, jejichž znalost se nám bude v mnoha příkladech hodit. Nakonec díky zvládnuté teorii vyřešíme společnými silami i náročnější příklady.

Ukázka příkladu s funkcionální rovnicí

Příklad. Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x) + 6xy\sqrt[3]{f(y)} + x^3.$$

Návod. Pokud si nevíte rady, zkuste za y dosadit nulu. Ihned obdržíte $f(x) = x^3$, což je řešení, které ještě musíte ověřit zkouškou v původní rovnici.

Po absolvování této přednášky budete podobné i obtížnější obraty ve funkcionálních rovnicích přirozeně ovládat a žádný z podobných příkladů by vás neměl zaskočit.