

Poctivci, lháři a matematici

Miroslav Olšák, MFF UK

1 Úložky logické versus matematické

Po světě se potulují všelijaké logické hádanky – jak převést vlka se zelím, jak rozdělit útvar na stejné kusy, jak poznat správnou žárovku, jak projít rychle tunelem, jak opékat topinky či na kterou stranu jede autobus. Řadu těchto hádanek je možné označit i za hádanky matematické.

Mezi matematickými a logickými hádankami je zhruba ten rozdíl, že logické úlohy se mohou opírat o takzvané chytáky. O něco, co v úloze není jasně řečeno, řešitel si to neuvědomí, a tak se snaží marně vyřešit něco, co ani řešení nemá. Tyto chytáky mohou využívat i „všeobecných znalostí“, že loď je stále stejně ponořená, autobusy jezdí po pravé straně silnice, či že když žárovka dlouho svítí, tak potom pálí.

Zato obtížnost matematických hádanek v pochopení zadání nespočívá. Řešitel matematické hádanky přesně ví, co se po něm chce. Jediný problém je ono řešení najít. Pokud zadání špatně pochopil, může se jednat spíše o chybu zadavatele hádanky a ten ji rád opraví.

I zde probírané úlohy o poctivcích a lhářích budeme chápat jako matematické. To mimo jiné znamená, že nestačí říct, kdo je poctivec a kdo lhář, a ověřit, že říkali, co měli. Je třeba si také rozmyslet, zdali tu nemůže být i jiné řešení. Pokud totiž matematická úloha nevybízí přímo k nalezení nějakého řešení, implicitně předpokládáme, že hledáme všechna řešení. Podobně, pokud zjistíme (a dokážeme precizně odůvodnit), že úloha nemá řešení, jde o správné vyřešení matematické úlohy.

Zdá se, že matematiky není možné zahrnout do úzkých – buď najdou řešení, nebo dokáží, že žádné neexistuje. Leda by existovala úloha, ve které není možné žádné řešení najít a současně není ani možné přijít na to, že neexistuje. Takové „úlohy“ kupodivu opravdu existují a povíme si o nich něco ke konci kurzu.

2 Vyrážíme za poctivci a lháři

Na širém moři leží jeden malý pozoruhodný ostrov – ostrov Logiky. Jen občas na ostrov zavítají turisté, není totiž příliš turisticky atraktivní. Jediné, co je na něm zajímavé, jsou matematicky přesní obyvatelé, a uznejte sami, kdo by plul týdny k nezajímavému ostrovu jen kvůli matematice?

Na tomto ostrově se obyvatelé dělí na dvě skupiny, někteří jsou tzv. poctivci a zbylí tzv. lháři. Poctivci říkají vždy pravdu, lháři vždy lžou. Jinak jsou obyvatelé „vševědoucí“, tedy kupříkladu vědí, kteří obyvatelé jsou kteří.

Úloha Potkají se dva obyvatelé – Honza a Matěj. Honza řekne: „Ale, ale, ... Alespoň jeden z nás je lhář.“ Určete, kdo může být Matěj.

Řešení: Honzova věta buďto platí, nebo neplatí. Pokud by ale měla neplatit, znamenalo by to jednak, že Honza je lhář (protože šíří bludy), a jednak, že oba dva jsou poctivci (protože ani jeden není lhář). Taková situace tedy nemohla nastat, tvrzení je proto pravdivé a Honza je poctivec. Víme však, že někdo z nich je lhářem, a musí to být Matěj.

Úloha Sedí takhle tři obyvatelé ostrova Logiky – Oliver, Roman a Ivan. Oliver: „Mezi námi není ani jeden poctivec.“ Roman: „Mezi námi je přesně jeden poctivec.“ Kdo je Ivan?

Úloha Cestovatel zavítal na ostrov Logiky a vzal si jednoho obyvatele jako průvodce. Cestou potkali dalšího domorodce, inu vyslal cestovatel svého průvodce, aby se jej zeptal, zda je poctivcem, nebo lhářem. „Tvrdí, že je poctivec,“ přinesl zprávu průvodce. Je průvodce poctivec nebo lhář?

Úloha Turista potká dva obyvatele. Zeptá se jich, zda je mezi nimi poctivec. Jeden z nich odpoví a cizinec zná správnou odpověď na svou otázku. Kdo je ten, který odpověděl, a kdo ten druhý?

Úloha Stojíte na rozcestí, jedna cesta vede do vesnice Smrt a druhá do vesnice Svoboda. U tohoto rozcestí stojí rovněž dva obyvatelé, jeden poctivec a jeden lhář. Pomocí jedné otázky s odpovědí ano/ne zjistíte, která cesta vede do vesnice Svoboda.

Úloha V klubovně sedí pět obyvatelů ostrova Logiky: Mirek, Jarka, Jindra, Červenáček a Rychlonožka. Mirek prohlásí: „Můžu říct, že Jarka může říct, že Jindra může říct, že Červenáček může říct, že Rychlonožka může říct, že je mezi námi sudý počet lhářů.“ Může být Mirek lhář?

Návod: Rozhodte libovolně povahy jednotlivým obyvatelům a určete, zda je Mirkova věta pravdivá, nebo ne. Dále si rozmyslete, jak se pravdivost změní při změně povahy některého z těchto obyvatel.

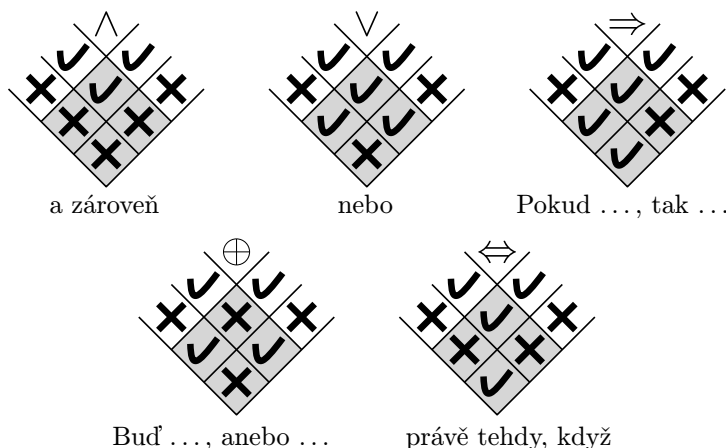
3 Výroky a logické spojky

Ne u všech vět dává smysl mluvit o tom, zda jsou pravdivé či nepravdivé (říkáme tomu pravdivostní hodnota). Těm, u kterých se to dá, říkáme výroky, v češtině se zpravidla jedná o věty oznamovací – kupříkladu „Včera přelo.“, „Matfyz je prestižní fakulta.“, „Existují mimozemšťané.“ či „Jsem egyptská královna.“. Jiné výroky můžeme psát jazykem matematiky, například výrok „ $2^4 = 4^2$ “ platí, zatímco výrok „ $7 + 5 = 13$ “ neplatí. Výraz „ $a^2 + b^2 = c^2$ “ nemůžeme ani považovat za výrok, dokud nevíme, co je myšleno pod proměnnými a, b, c .

Může se stát, že chceme nakombinovat více výroků do jednoho, přitom je potřeba dát najevo, jak se spočítá pravdivostní hodnota složeného výroku na základě jednotlivých jednoduchých výroků. K tomu slouží takzvané logické spojky – opět se jedná i o některé spojky z češtinářského pohledu, ale pouze o ty, které se týkají pravdivostní hodnoty. Za logickou spojku tak považujeme „a“, případně „nebo“, avšak už nikoli třeba „neboť“.

Jako příklad složeného výroku uvedeme „Jestli $7 + 5 = 13$, tak jsem egyptská královna.“ Čtenáře neznalého logických spojek (především implikace) by mohla překvapit skutečnost, že tento výrok je pravdivý.

Na následujícím obrázku najdete nejpoužívanější logické spojky. Nahoře je vždy symbol logické spojky, vlevo možné hodnoty levého výroku, vpravo možné hodnoty pravého výroku (křížek znamená nepravdu, fajfka pravdu). V šedé oblasti pak najdete hodnotu výsledného výroku.



Například výroku „Jestli $7 + 5 = 13$, tak jsem egyptská královna.“ odpovídá logická spojka $\Rightarrow$. Také by bylo možné tento složený výrok formálně napsat jako

$$(7 + 5 = 13) \Rightarrow \text{jsem egyptská královna.}$$

Hodnoty obou jednoduchých výroků jsou nepravda, proto jako výslednou hodnotu použijeme tu spodní, což je pravda.

Jako poslední zmíníme logickou spojku negace. Jedná se o formulaci „Není pravda, že ...“. Negaci výroku V pak značíme $\neg V$. Narozdíl od ostatních logických spojek negace výroky vlastně nespojuje, protože bere coby parametr pouze jeden výrok.

Úloha Felix: „Bydlím na pobřeží a jsem lhář.“ Šimon: „Bydlím na pobřeží nebo jsem lhář.“ Bydlí někdo z těchto Logičanů na pobřeží? A kdo jsou tito obyvatelé?

Úloha Jeden obyvatel řekl: „Tak jestli tady není zakopaný poklad, tak jsem lhář.“ Je tento obyvatel lhář? A je na ostrově Logiky zakopaný poklad?

Úloha Sejdou se Igor, Lukáš a Michal z ostrova Logiky. Igor: „Lukáš je poctivec.“ Lukáš: „Pokud je Igor poctivec, tak je poctivec i Michal.“ Kdo je kdo?

Pomocí logických spojek se dá zbavit původního dělení na poctivce a lháře. Kdykoli obyvatel o řekne výrok V , znamená to jen to, že platí výrok „obyvatel o je poctivec $\Leftrightarrow V$ “. Takto můžeme přeformulovat úlohy, aby princip poctivců a lhářů nepotřebovaly. Například první úlohu v tomto dokumentu přeformulujeme jako „Honza je poctivec právě tehdy, když je Honza i Matěj lhář.“.

Úlohy typu „někdo něco řekl“ nebývá problém tupě urozebírat. Počet možností, kdo je kdo, je roven 2^n , kde n značí počet přítomných osob.

Úloha Potkají se David, Vojta a Saša z ostrova Logiky. David: „Vojta je lhář a Saša je poctivec.“ Vojta: „Buď je David poctivec, anebo je poctivec Saša a já jsem lhář.“ Saša: „Vojta je lhář a současně jsem poctivec buď já, anebo David.“ Kdo je kdo?

Řešení: Označíme si výrok „David je poctivec“ jako D , výrok „Vojta je poctivec“ jako V a výrok „Saša je poctivec“ jako S . Zajímá nás, pro které kombinace hodnot těchto výroků platí výrok

$$D \Leftrightarrow ((\neg V) \wedge S) \quad \wedge \quad V \Leftrightarrow (D \oplus ((\neg V) \wedge S)) \quad \wedge \quad S \Leftrightarrow ((\neg V) \wedge (D \oplus S)).$$

Tento výrok označíme X . Jednotlivé tři části výroku X vznikly prostým přepisem vět, které říkali jednotliví obyvatelé, a přidáním ekvivalence na začátek s tím, že je pronášel poctivec. V následující tabulce vyzkoušíme všech 8 možností hodnot výroků D, V, S a na základě nich určíme hodnotu výroku X . Každé možnosti odpovídá jeden řádek tabulky.

D	V	S	$\neg V$	$(\neg V) \wedge S$	$D \oplus S$	$D \oplus ((\neg V) \wedge S)$	$(\neg V) \wedge (D \oplus S)$	$D \Leftrightarrow ((\neg V) \wedge S)$	$V \Leftrightarrow (D \oplus ((\neg V) \wedge S))$	$S \Leftrightarrow ((\neg V) \wedge (D \oplus S))$	X
×	×	×	✓	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓
×	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	✓	×
×	✓	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×
×	✓	✓	×	×	✓	×	✓	×	×	×	×
✓	×	×	✓	×	✓	✓	×	×	×	×	×
✓	×	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	×	×	×
✓	✓	×	×	×	✓	×	×	×	✓	✓	×
✓	✓	✓	×	×	×	✓	×	×	✓	×	×

Jediný případ, kdy X vyšel pravdivý, je, když všichni tři jsou lháři. To je tedy jediným řešením úlohy.

Úloha Na ostrově logiky se sešli Emil, Filip a Vilda. Emil: „Filip je poctivec nebo mám stejnou povahu jako Vilda.“ Filip: „Emil s Vildou jsou poctivci.“ Vilda: „Buď je Filip poctivec, anebo já jsem lhář a Emil poctivec.“ Kdo je kdo?

Úloha Setkali se Standa, Pavel a Milan z ostrova Logiky. Standa: „Milan je poctivec a současně jsem lhář buď já, anebo Pavel.“ Pavel: „Mezi námi je alespoň jeden poctivec a alespoň jeden lhář.“ Milan: „Standa je poctivec a Pavel lhář.“ Kdo je kdo?

Úloha Požádali jste tři obyvatele ostrova Logiky (Amose, Ivana a Oskara), ať vám o sobě něco řeknou. Zde jsou odpovědi: Amos: „Buď je Oskar poctivec, anebo jsem lhář já i Ivan.“ Ivan: „Oskar je lhář právě

tehdy, když je současně Amos poctivec a já lhář.“ Oskar: „Ivan je lhář a zároveň je Amos poctivec.“ Kdo je kdo?

Úloha Bez použití obratu „Co bys řekl, kdybych se zeptal . . .“ zjistíte od obyvatele pomocí jedné otázky (tedy otázky na pravdivost jednoho výroku), zda je na ostrově připojení k Internetu.

Úloha Ve vesnici Ratata na ostrově Logiky obyvatelé namísto „Ano“ a „Ne“ odpovídají „Bum“ a „Cink“, ale ne nutně v tomto pořadí. Obyvatelé rozumí česky, tedy je možné se zeptat například „Znamená cink ano?“.

- Zeptejte se ratařana na jednu otázku tak, abyste určitě dostali odpověď „Bum“.
- Zeptejte se jiného ratařana tak, abyste zjistili, zda je poctivec.
- Zeptejte se ještě jiného ratařana tak, abyste zjistili, zda je ten první poctivec.
- Zeptejte se ještě jiného ratařana tak, abyste zjistili, co znamená „Cink“.

4 Špion na ostrově

Jednou se stalo, že na ostrov zavítali špioni. Ti jsou k nerozeznání od původních obyvatel, ale mohou říkat, cokoli je napadne. V následujících čtyřech úlohách máte tři lidi na ostrově Logiky – Kubu, Frantu a Pepu, kteří jsou v nějakém pořadí poctivec, lhář a špion.

Úloha Kuba: „Já jsem poctivec.“ Franta: „Já jsem lhář.“ Pepa: „Já jsem špion.“ Kdo je kdo?

Úloha Každého jsme se zeptali, který z nich je špion. Honza s Frantou označili Pepu, jen Pepa označil Honzu. Kdo je kdo?

Úloha Zeptali jsme se každého na otázku, kdo je Franta. Každý odpověděl jinak a ze získaných informací stále nebylo možné jednoznačně určit, kdo je kdo. Jak odpověděl Franta?

Úloha (The hardest logic puzzle ever) Na základě tří otázek s možnou odpovědí „Ano“ nebo „Ne“ určete, kdo jsou Kuba, Franta a Pepa. Pro každou otázku rozhodnete, kterému obyvateli ji položíte. Znění otázky a dotazovanou osobu můžete volit podle předchozích odpovědí. Je povoleno se ptát jednoho obyvatele vícekrát (ale v takovém případě se zas jiného nezeptáte vůbec).

Úloha Bylo by možné vyřešit předchozí úlohu s požadavkem, že se každého smíme zeptat pouze jednou?

Návod: Kolik je možností, jak jednotliví obyvatelé odpovědí? Kolik je možností, jak rozdělit povahy jednotlivým obyvatelům? Uvědomte si, že každému rozložení povah musí odpovídat dvě trojice odpovědí, protože si špion může vybrat, jak odpoví.

5 Co je matematická logika?

Matematika je věda, která narozdíl od ostatních nepřipouští důkazy „pozorováním“. Pokud fyzik objeví, že hmotné předměty se přitahují, a potvrdí to hromadou experimentů, dále tomu věří a počítá s tím. Pokud chcete o něčem přesvědčit matematika, je provádění experimentů zcela zbytečné. Matematiky nezajímá, že pravděpodobnost nějakého tvrzení je 99,999999%. Jediné důkazy, které matematici uznávají, jsou takové, které se opírají čistě o logické argumenty. Takovými argumenty může být například:

- Ať V a W jsou jakékoli výroky, platí $V \Rightarrow (W \Rightarrow V)$. (logický axiom)
- Množina všech přirozených čísel obsahuje s každým číslem n i číslo $n + 1$. (cca axiom teorie množin)
- Mějme dva již dříve odvozené výroky V a $V \Rightarrow W$. Na základě nich odvodíme W . (odvozovací pravidlo modus ponens)
- Pokud jsme zkusili předpokládat, že výrok V neplatí, a došli jsme k nějakému nesmyslu (jako třeba $5 > 6$), odvodíme, že V platí. (důkaz sporem)

Vypisovat všechny axiomy a odvozovací pravidla tu nebudeme. Pokud matematik čte důkaz, řídí se zpravidla spíš svým zdravým rozumem než tabulkou axiomů a odvozovacích pravidel. Je ale dobré vědět, že existuje všeobecně uznávaná sada elementárních úvah, na kterých je vybudovaná téměř celá matematika.

Z pojmu *matematická logika* může laik nabýt dojmu, že se jedná o nějaké základy matematiky. O něco, bez čeho člověk pomalu ani nemůže myslet. Že by se mělo jednat o jednoduchou a především logickou disciplínu. Těžko najít větší omyl.

Matematická logika není základ matematiky, nýbrž „matematika aplikovaná sama na sebe“. Matematická logika používá matematiku k tomu, aby manipulovala s formálními „větami“ a exaktně popisovala, kterou posloupnost písmen považujeme za výrok či kterou posloupnost písmen považujeme za jeho důkaz.

A právě toto odkazování sama na sebe vede k paradoxům. Začneme třeba prostým dotazem, zda lhář může vyslovit výrok „Můžu říct výrok, který vznikne napsáním následující věty dvakrát za sebe. Můžu říct výrok, který vznikne napsáním následující věty dvakrát za sebe.“

Matematická logika se sporu samozřejmě brání, takže výsledkem je něco, co je matematicky korektní. Jen značně neintuitivní.

6 Příjezd matematiků a následný blázeň

Tentokrát namísto špiónů přijeli na ostrov matematici. Zatímco poctivci a lháři pravdu znají (jinak by nemohli odpovídat), matematik pouze čerpá z dostupných informací a logicky odvozuje. Pokud například matematik vidí dva obyvatele jako v první úloze (předpokládejme, že matematici jsou od místních snadno rozeznatelní), usoudí, že Honza je poctivec a že Matěj je lhář. **Matematik může říkat přesně to, co je možné dokázat**, tedy to, co odvodí logickými a matematickými úvahami.

Pokud pro změnu matematik pouze slyší někoho říkat „Jsem poctivec“, nemůže o něm říci nic nového. Může o něm však říkat „On je buď poctivec, anebo lhář.“, „Pokud je pravda, že je poctivec, tak je poctivec.“, atd.

Může se zdát, že oproti vševědoucím poctivcům a lhářům jsou matematici konečně trochu realističtí a lidštití. Přesto je lepší se na matematiky dívat spíše jako na „stroj na důkazy“, než se do nich empaticky vcítit.

Představte si, že nějaký obyvatel (špión, který tu ale nemá co dělat) prohlásí: „Jsem lhář.“ Co v takovém okamžiku udělá matematik? Uvědomí si, že je to podvod? Že tento člověk je pochybný? Nikoli, dále „logicky“ odvozuje. Matematik přece „ví“, že každý člověk je buď poctivec nebo lhář. Dostal spor „s ničím“.

V takovém okamžiku má matematik velmi mocný nástroj k dokázání čehokoli. Například sporem: „Pro spor předpokládejme, že neplatí Velká Fermatova věta¹. No jo, ale tamhleten člověk tvrdil, že je lhář. Z toho plyne, že není lhář ani poctivec, a to je spor! Velká Fermatova věta dokázána!“ Úplně stejným způsobem je takový matematik schopen dokázat, že Velká Fermatova věta neplatí, a může takto (stejně jako špión) říkat zcela cokoli.

Definice Pokud je matematik schopný dokázat každý výrok (tedy i to, co neplatí), říkáme o něm, že se zbláznil.

Představte si nyní následující situaci. Na ostrově vedle sebe na lavičce sedí dva matematici, Hilbert a Cantor. Hilbert přesně zná (či je přinejmenším přesvědčen, že zná) Cantorovo myšlení i všechny informace, které Cantor slyšel. Ve skutečnosti je ale Cantor špión, který najednou začne říkat úplné hovadiny, takže to vypadá, že se Cantor (coby matematik) zbláznil. Je to impuls pro Hilberta, aby se také zbláznil?

Vypadá to, že Hilbertova představa „Cantor je matematik úplně stejný jako já“ měla v Hilbertovi vyvolat reakci „Jeddamane. Cantor se zbláznil, to znamená, že objevil spor. Takže tu je nějaký spor, na základě kterého já taky můžu říkat, co se mi zlíbí. Jsem poctivec. Jsem lhář. A vůbec nejsem blázeň, he.“ Tyto úvahy jsou správné jen z počátku. Hilbert opravdu odvodí, že může říkat cokoli. Může tedy říkat i například „Můžu říct, že jsem poctivec. Můžu říct, že jsem lhář.“ Akorát ani to mu (kupodivu) nedovoluje opravdu cokoli říkat.

On „ví“, že se zbláznil, to by ale byl spor jen za předpokladu, že by uměl dokázat, že se nezbláznil. Může se mu to podařit? Nemůže. Jestli nebyl blázeň už před tím, tak sice má dokázanou zjevnou lež (to, že se zbláznil), ale přesto stále nemůže říkat cokoli. Ještě jiný matematik (Gödel) totiž přišel s následujícím objevem.

Věta (O neúplnosti) Z matematiků jen blázeň může prohlásit, že se nezbláznil.

Důkaz: Dozvíte se na kurzu.

¹ Velká Fermatova věta je slavný matematický problém, jehož důkaz zabral mnoho let a mnoho stránek. Říká, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá řešení v přirozených číslech pro $n \geq 3$.