Mnohočleny z různých stran

Mgr. Karel Pazourek

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

MNOHOČLENY Z RŮZNÝCH STRAN

MNOHOČLENY

Mnohočlen (**polynom**) $P(x)$ (krátce P) o jedné proměnné x je výraz tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde koeficienty a_n, a_{n-1},... a_2, a_1, a_0 jsou reálná čísla. Jestliže číslo n je nejvyšší takové, že koeficient a_n je nenulový, pak říkáme, že n je **stupeň** polynomu $P(x)$. Polynomům 1. stupně se říká **lineární**, polynomům 2. stupně **kvadratické**, polynomům 3. stupně **kubické**. Samotná čísla, např. 5, 47, jsou polynomy nultého stupně, konstanty. **Nulovému polynomu** 0 přiřadíme stupeň -1.
Operace s polynomy (sčítání, odčítání, násobení, dělení) se zavedou jako pro výrazy. Množinu polynomů s reálnými koeficienty značíme $\mathbb{R}[x]$.

DĚLITELNOST POLYNOMŮ

Řekneme, že polynom P **dělí** polynom Q, jestliže existuje polynom R tak, že platí

$$Q = R \cdot P.$$

Například polynom $P = x^2 + 3$ dělí polynom $Q = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$, protože existuje polynom $R = x - 2$ tak, že $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x-2)(x^2+3)$. Stejně tak Q je dělitelný polynomy $2(x-2)$, $\frac{1}{3}(x-2)$, nebo i 1, 2, $\sqrt{2}$ atd.
Jestliže polynom P dělí zároveň polynomy Q_1 a Q_2, pak je jejich **společný dělitel**. Pokud je P největšího možného stupně, pak se nazývá **největší společný dělitel** (NSD) polynomů Q_1, Q_2. NSD dvou polynomů není určen jednoznačně, je pouze jednoznačný až na číselný násobek.
Pokud je $NSD(Q_1, Q_2)$ konstanta, říkáme, že polynomy Q_1 a Q_2 jsou **nesoudělné**, v opačném případě jsou Q_1 a Q_2 **soudělné**.

Jestliže polynom je dělitelný zároveň polynomy Q_1 a Q_2, pak je jejich **společný násobek**. Pokud je P nejmenšího možného stupně, pak se nazývá **nejmenší společný násobek** (NSN) polynomů Q_1, Q_2. NSN dvou polynomů je určen jednoznačně až na číselný násobek!

VĚTA: Pro dvě libovolná přirozená čísla a, b platí $ab = NSD(a,b) \cdot NSN(a,b)$.
Důkaz se snadno provede pomocí prvočíselného rozkladu. □

VĚTA: Pro libovolné dva polynomy $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ se polynomy $P \cdot Q$, $NSD(P,\, Q) \cdot NSN(P,\, Q)$ „rovnají až na reálný násobek“, tj. existuje nějaké číslo $c \in \mathbb{R}$ tak, že $c \cdot P \cdot Q = NSD(P,\, Q) \cdot NSN(P,\, Q)$.

VĚTA: Jestliže $c \in \mathbb{N}$ dělí čísla $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$, pak dělí i $a + b$, $a - b$ a zbytek po dělení čísel a, b.
Důkaz: Jestliže c dělí a, b, pak existují čísla $k, l \in \mathbb{N}$ tak, že $a = k \cdot c$, $b = l \cdot c$. Pak $a + b = k \cdot c + l \cdot c = (k + l)c$, tedy c dělí $a + b$. Podobně protože $a - b = (k - l)c$, číslo c dělí $a - b$.
Pokud z je zbytek po dělení $a : b$, tj. existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $a = mb + z$. Pak ale $k \cdot c = m(l \cdot c) + z$ a odtud $z = k \cdot c - m \cdot l \cdot c = (k - m \cdot l)c$. □

NSD dvou polynomů hledáme pomocí **Eukleidova algoritmu** (**algoritmu postupného dělení** nebo též **řetězového dělení**). Ten vychází z následující věty:

VĚTA: Jestliže Q dělí polynomy P_1 a P_2, pak dělí i polynomy $P_1 - P_2$ a R, kde R je zbytek po dělení $P_1 : P_2$. Speciálně NSD polynomů P a Q dělí i zbytek po jejich dělení.
Důkaz probíhá podobně jako pro přirozená čísla. □

PŘÍKLAD: Najděme NSD polynomů $P_1(x) = 2x^4 + 12x^3 + 11x^2 - 39x - 58$ a $P_2(x) = 2x^3 + 16x^2 + 41x + 34$: Použijeme Eukleidův algoritmus. Vychází z uvedeného tvrzení, že NSD dvou polynomů dělí i zbytek po jejich dělení. Postupně pak budeme snižovat stupeň polynomu, až dojdeme k dělení beze zbytku: Poslední dělitel je pak hledaný NSD.

$$P_1 : P_2 = (2x^4 + 12x^3 + 11x^2 - 39x - 58) : (2x^3 + 16x^2 + 41x + 34) = x - 2,$$

zbytek je $P_3 = 2x^2 + 9x + 10$. Protože $NSD(P_1, P_2) = NSD(P_2, P_3)$, budeme pokračovat v dělení:

$$P_2 : P_3 = (2x^3 + 16x^2 + 41x + 34) : (2x^2 + 9x + 10) = x + \frac{7}{2}, \text{ zbytek } P_4 = -\frac{1}{2}x - 1.$$

Protože NSD je určen jednoznačně až na reálný násobek, můžeme v dalším kroku použít $(-2) \cdot P_4 = x + 2$:

$$P_3 : ((-2)P_4) = (2x^2 + 9x + 10) : (x + 2) = 2x + 5, \text{ zbytek } 0.$$

Proto $NSD(P_1, P_2) = NSD(P_2, P_3) = NSD(P_3, P_4) = (-2)P_4 = x + 2$. (Samozřejmě za $NSD(P_1, P_2)$ bychom mohli vzít i přímo $P_4 = -\frac{1}{2}x - 1$.)
Že jsou polynomy P_1, P_2 násobky P_4 se snadno přesvědčíme: Vyjádříme je pomocí P_4 ze vztahů $P_1 = (x - 2)P_2 + P_3$, $P_2 = (x + \frac{7}{2})P_3 + P_4$ a $P_3 = (2x + 5)(-2)P_4$.

Dostaneme

$$\begin{aligned}
P_1 &= (x-2)\left[\left(x+\frac{7}{2}\right)P_3+P_4\right]+P_3=\left[(x-2)\left(x+\frac{7}{2}\right)+1\right]P_3+P_4= \\
&= \left[(x-2)\left(x+\frac{7}{2}\right)+1\right](2x+5)(-2)P_4+P_4= \\
&= P_4\left(\left[(x-2)\left(x+\frac{7}{2}\right)+1\right](2x+5)(-2)+1\right), \\
P_2 &= \left(x+\frac{7}{2}\right)P_3+P_4=P_4\left[\left(x+\frac{7}{2}\right)(2x+5)(-2)+1\right].
\end{aligned}$$

KOŘENY POLYNOMU

Číslo c se nazývá **kořen** polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, jestliže

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_2c^2 + a_1c + a_0 = 0.$$

VĚTA: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Číslo c je kořen polynomu P.
2. Polynom $x - c$ dělí $P(x)$.
3. Číslo c je řešením rovnice $P(x) = 0$.
4. V bodě c protíná graf funkce $f:\ y = P(x)$ osu x.

Důkaz: Dokažme pouze ekvivalenci prvních dvou tvrzení, ostatní ekvivalence jsou zřejmé.
Dokažme nejprve implikaci $\Rightarrow$: Mějme kořen c polynomu $P(x)$, tj. $P(c) = 0$. Dělme $P(x)$ polynomem $x - c$: Pak existuje polynom $Q(x)$ a konstanta d tak, že $P(x) = (x-c)Q(x)+d$. (Zbytek d po dělení je polynom menšího stupně než $x-c$, tj. stupně 0 nebo -1.) Pak ale dosazením c dostáváme $P(c) = (c-c)Q(c) + d$, tedy $0 = 0 + d$ a $d = 0$, polynom $x - c$ dělí $P(x)$.
Obrácená implikace $\Leftarrow$: Jestliže $x - c$ dělí $P(x)$, pak existuje $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tak, že $P(x) = (x-c)Q(x)$. Pak ale $P(c) = (c-c)Q(c) = 0$ a tudíž c je kořen polynomu $P(x)$. $\square$

Hodnotu polynomu v bodě c můžeme zjišťovat pomocí **Hornerova schématu**. To vychází z přepsání polynomu následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= x(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + a_{n-2}x^{n-3} + \cdots + a_2x + a_1) + a_0 = \\ &= x(x(a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + a_{n-2}x^{n-4} + \cdots + a_2) + a_1) + a_0 = \\ &= \cdots = x(x(\cdots(x(xa_n + a_{n-1}) + a_{n-2})\cdots + a_2) + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

Všimněte si, že při dosazování do posledního výrazu nemusíme umocňovat dosazované číslo. Celý algoritmus se zapisuje obvykle do následujícího schématu:

PŘÍKLAD: Spočtěme hodnotu $P(3)$ polynomu

$$P(x) = 2x^5 - 5x^4 - x^3 + 4x^2\,(+0x) - 2.$$

Koeficienty zapíšeme do řádku, do druhého řádku vlevo zapíšeme dosazované číslo. Do třetího řádku budeme zapisovat součet čísel nad ním. Čísla na druhém řádku vzniknou z čísla na třetím řádku v předchozím sloupci vynásobením dosazovanou hodnotou (v tomto případě 3). Výsledek bude zapsaný v posledním sloupci na třetím řádku.

	2	-5	-1	4	0	-2
3		6	3	6	30	90
	2	1	2	10	30	88

Dostáváme tak $P(3) = 88$. Dosazování ve skutečnosti probíhá do tvaru polynomu

$$P(x) = \big[\big([(2x-5)x-1]x+4\big)x+0\big]\,x - 2.$$

Navíc čísla ve třetím řádku odpovídají koeficientům podílu polynomů $\frac{P(x)}{x-3}$, tedy

$$(2x^5 - 5x^4 - x^3 + 4x^2(+0x) - 2) : (x-3) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 10x + 30 + \frac{88}{x-c}.$$

Obecně pokud při výpočtu hodnoty $P(c)$ vyjde na posledním místě třetího řádku 0, číslo c je kořen polynomu P a ostatní čísla ve třetím řádku jsou koeficienty polynomu $\frac{P(x)}{x-c}$.

ALGEBRAICKÉ METODY ŘEŠENÍ POLYNOMIÁLNÍCH ROVNIC

Řešení obecných algebraických rovnic, tj. rovnic tvaru $P(x) = 0$, pomocí operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, mocnění a odmocňování lze nalézt pouze pro

rovnice stupně menšího než 5 (stupeň rovnice $P(x) = 0$ je stupeň polynomu P). Pro lineární a kvadratickou rovnici se postupy běžně používají. Řešení obecné kubické rovnice je známo od počátku 16. století. Dnes se této metodě říká **Cardanův vzorec**. O pár desítek let později byl objeven i postup pro obecné rovnice 4. stupně. Ve skutečnosti rovnice je velice mladý nástroj, rodil se v Evropě až v 17. – 18. století. Úlohy dnes řešené rovnicemi do té doby lidé řešili pomocí slovních postupů. Některé z nich jsou prakticky totožné se současnými metodami.

Řešení kvadratické rovnice úpravou na čtverec. Jedna z nejznámějších metod řešení kvadratické rovnice používá vzorce $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$ a $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Ukážeme si ji na příkladu:

PŘÍKLAD: Řešme rovnici $4x^2 + 8x - 60 = 0$. Vezměme polynom $4x^2 + 8x - 60$ na levé straně. Nejprve vytkneme z celého výrazu koeficient kvadratického členu:

$$4x^2 + 8x - 60 = 4[x^2 + 2x - 15] =$$

Poté první dva členy v závorce $x^2 + 2x = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x$ doplníme tak, aby byly ve tvaru prvních dvou členů ve vzorci $A^2 \pm 2AB + B^2$, doplněné číslo (1^2) ještě odečteme, aby se hodnota výrazu nezměnila:

$$= 4[x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2 - 15] = 4[(x^2 + 2x + 1) - 1 - 15] = 4[(x + 1)^2 - 16] =$$

Nyní na výraz v závorce použijeme druhý vzoreček:

$$= 4[(x + 1)^2 - 4^2] = 4[(x + 1 - 4)(x + 1 + 4)] = 4(x - 3)(x + 5).$$

Původní rovnici tak můžeme upravit na tvar $4(x - 3)(x + 5) = 0$ a odtud vidíme kořeny 3 a -5.

Úpravou na čtverec můžeme odvodit i vzorec pro reálné kořeny kvadratické rovnice: Vyjděme od rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že $a > 0$ (jinak vynásobíme rovnici -1). Pomocí uvedeného postupu dostáváme:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right] = \\
&= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =
\end{aligned}$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}^2\right] =$$
$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\right].$$

Z posledního výrazu plyne, že kořeny rovnice $ax^2+bx+c=0$ jsou tvaru

$$-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

přitom odmocnina v posledním výrazu má smysl, pouze když výraz $D = b^2 - 4ac$ (**diskriminant**) je nezáporný. Pokud $D = 0$, dostáváme **dvojnásobný kořen** $-\frac{b}{2a}$. Jestliže $D < 0$, můžeme rovnici řešit v oboru komplexních čísel, tj. čísel tvaru $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, kde pro imaginární jednotku i platí vztah $i^2 = -1$. Pak kořeny mají tvar

$$\frac{-b \pm i \cdot \sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}.$$

Tento vztah rovněž plyne z obecné úpravy na čtverec.

Viètovy vztahy. Pokud známe všech n kořenů x_1, x_2,... x_n polynomické rovnice $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 = 0$, víme, že ji můžeme přepsat do tvaru $a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdot(x-x_n) = 0$. Pokud závorky na levé straně roznásobíme, obdržíme

$$a_n[x^n - (x_1+x_2+\cdots+x_n)x + (x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)x^2 + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n x_1x_2\cdots x_n] = 0.$$

Proto

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n(x_1+x_2+\cdots+x_n), \\ a_{n-2} &= a_n(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n), \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^n a_n \cdot x_1x_2\cdots x_n. \end{aligned}$$

Těmto vztahům mezi kořeny rovnice a jejími koeficienty se říká Viètovy. Avšak vztahy pro kvadratickou rovnici byly vztahy známy už před Francoisem Viètou: Pro kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$ dostaneme $\frac{b}{a} = -(x_1+x_2)$, $\frac{c}{a} = x_1x_2$. Z Viètových vztahů plyne i následující věta:

VĚTA: Mějme polynom $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ n-tého stupně s celočíselnými koeficienty. Pak pro každý racionální kořen $\frac{r}{s}$ platí, že r dělí a_0 a s dělí a_n.
Speciálně je-li kořen celočíselný, pak dělí absolutní člen a_0.

Cardanův vzorec pro řešení kubické rovnice. Cardanův vzorec budeme chápat jako určitou metodu řešení kubických rovnic než pouhý vzorec. Vstupem bude rovnice s jednotkovým koeficientem u kubického členu. Předvedeme si ji na příkladu.

PŘÍKLAD: Mějme rovnici $y^3 - 6y^2 + 6y - 5 = 0$. Nejprve se zbavíme kvadratického členu, a to substitucí. Pokud je kvadraitický člen tvaru ax^2, pak použijeme substituci $y = x - \frac{a}{3}$, v našem příkladu $y = x - \frac{-6}{3} = x + 2$.

$$\begin{aligned}
(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 6(x+2) - 5 &= 0 \\
x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6(x^2 + 4x + 4) + 6x + 12 - 5 &= 0 \\
x^3 - 6x - 9 &= 0
\end{aligned}$$

Nyní použijeme tzv. **polarizaci**, za x dosadíme součet $u + v$ dvou nových proměnných u, v a upravíme:

$$\begin{aligned}
(u+v)^3 - 6(u+v) - 9 &= 0 \\
u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 6(u+v) - 9 &= 0 \\
u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 6(u+v) - 9 &= 0 \\
u^3 + v^3 + (3uv - 6)(u+v) - 9 &= 0
\end{aligned}$$

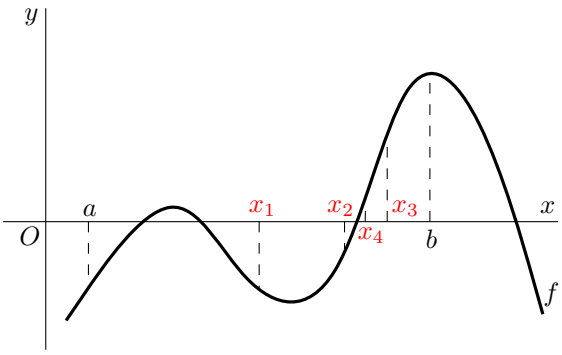
Nyní upřesníme vztah mezi u a v. Nechme prostřední člen vypadnout, tj. položme $3uv - 6 = 0$, tj. $uv = 2$. Potom dostaneme rovnici $u^3 + v^3 - 9 = 0$. Umocníme-li vztah $uv = 2$ na třetí, spolu s předešlou rovnicí tvoří soustavu $u^3 + v^3 = 9$, $u^3v^3 = 8$.
Použijeme Viètovy vztahy pro kvadratickou rovnici. Uvedená soustava říká, že čísla u^3, v^3 jsou kořeny kvadratické rovnice $z^2 - 9z + 8 = 0$. Kořeny této rovnice jsou $z_1 = 1$, $z_2 = 8$. Položme například $u^3 = 1$, $v^3 = 8$. Pak $u = 1$, $v = 2$. Odtud už snadno dopočítáme $x = u + v = 3$, $y = x + 2 = 5$.
Cardanův vzorec tedy nalezne jeden kořen kubické rovnice. Pokud bychom chtěli najít i další kořeny této rovnice, vydělíme polynom $y^3 - 6y^2 + 6y - 5$ z levé strany původní rovnice dvojčlenem $y - 5$:

$$(y^3 - 6y^2 + 6y - 5) : (y - 5) = y^2 - y + 1.$$

Snadno ověříme, že kvadratický polynom $y^2 - y + 1$ nemá reálné kořeny, jeho diskriminant je $-3 < 0$. Komplexní kořeny tak mají tvar $y_{1,2} = \frac{1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Iterační metody přistupují k problému jinak: Jestliže $P(a) \cdot P(b) < 0$, ze spojitosti[1] příslušné polynomické funkce $f: \ y = P(x)$ vyplývá, že rovnice $P(x) = 0$ má na intervalu $(a; \ b)$ řešení. Postupně sestrojujeme posloupnost hodnot x_1, x_2, x_3, ... z intervalu $(a; \ b)$ tak, že se tyto hodnoty blíží k hodnotě kořenu. Ono „blížení“ nemusí být „přímočaré“, záleží na konkrétním tvaru rovnice a zadaných podmínkách. Předvedeme si metody, které jsou úzce spojeny s grafem příslušné polynomické funkce $f: \ y = P(x)$.

Metoda půlení (bisekce) intervalu spočívá v postupném půlení zadaného intervalu. Podívejme se na následující obrázek. Je na něm graf polynomické funkce $f: \ y = P(x)$.



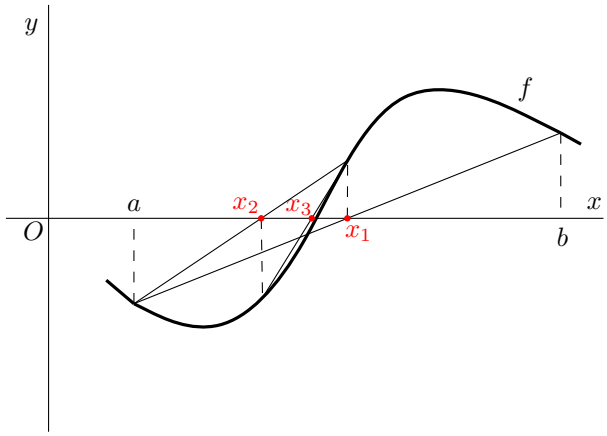
Začneme hledat kořen na intervalu $(a; \ b)$, kde hodnoty $P(a)$, $P(b)$ mají různá znaménka. Tedy ze spojitosti funkce plyne, že její graf musí na intervalu $(a; \ b)$ alespoň jednou protnout osu x.
Označme x_1 střed intervalu $(a; \ b)$. Spočítejme hodnotu polynomu v tomto bodě. Vidíme, že $P(x_1) < 0$. Tedy polynom musí mít alespoň jeden kořen na intervalu $I_1 = (x_1; \ b)$.
V dalším kroku najdeme střed x_2 intervalu $I_1 = (x_1; \ b)$ a proces zopakujeme. Dostaneme střed x_3 intervalu $I_2 = (x_2; \ b)$. Po určitém počtu kroků se hodnota polynomu v bodech iterace začne zmenšovat. Pak stačí spočítat tolik různých iterací, až hodnota $P(x_k)$ pro nějaké k bude menší než předem daná odchylka.
Jinou možností stanovení přesnosti řešení rovnice je podmínka na velikost intervalu I_k, tj. absolutní hodnotu rozdílu jeho krajních bodů.

[1] Podstatnou vlastností polynomických funkcí je jejich spojitost, zjednodušeně řečeno že jejich graf tvoří na daném intervalu „nepřetržená“ křivka. Metody zde popsané lze použít právě pro spojité funkce.

Metoda sečen spočívá v postupné konstrukci sečen grafu funkce f a jejich průsečíků x_k s osou x. Jednotlivé iterace x_k pak mají tvar

$$x_k = \frac{a_k \cdot P(b_k) - b_k \cdot P(a_k)}{P(b_k) - P(a_k)},$$

kde $a_k, b_k \in \{a, b, x_{k-2}, x_{k-1}\}$ jsou voleny tak, aby se interval $I_k = (a_k;\ b_k)$ postupně zmenšoval a v každém kroku měla čísla $P(a_k)$, $P(b_k)$ různá znaménka.



Vzorec pro iteraci x_k lze snadno odvodit: Najděme rovnici sečny s grafu procházející body $P(a)$ a $P(b)$ a její průsečík x_1 s osou x. Sečna s je přímka, její předpis pak je $y = px + q$, $p, q \in \mathbb{R}$. Protože $P(a), P(b) \in s$, musí být splněno

$$\begin{aligned} P(a) &= pa + q, \\ P(b) &= pb + q. \end{aligned}$$

Odečtením rovnic obdržíme $P(a) - P(b) = p(a - b)$, tedy $p = \frac{P(a)-P(b)}{a-b}$. Odtud dosazením do druhého vztahu získáme

$$q = P(a) - pa = P(a) - \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \cdot a = \frac{a \cdot P(b) - b \cdot P(a)}{a - b}.$$

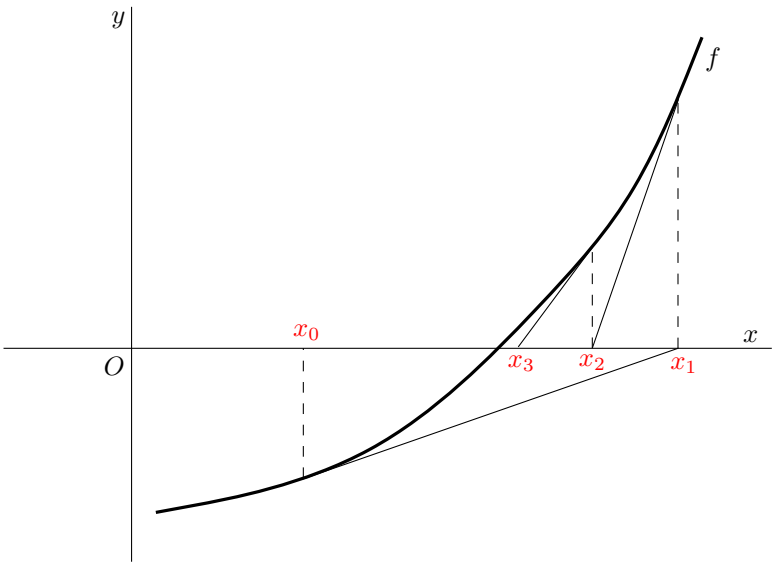
Rovnice sečny tak je

$$s: \quad y = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \cdot x + \frac{a \cdot P(b) - b \cdot P(a)}{a - b}.$$

Odtud spočítáme průsečík x_1 sečny s a osy x dosazením $y = 0$ a vyjde x-ová souřadnice průsečíku x_1 stejného tvaru jako je vzorec na začátku tohoto odstavce.

Metoda tečen (Newtonova metoda) spočívá v sestrojování tečen ke grafu funkce f a hledání jejích průsečíků s osou x. Tuto metodu nelze použít pro každou funkci, f musí splňovat další podmínky: Je třeba, aby derivace $P'(x)$ polynomu byla nenulová na intervalu $\langle a;\ b\rangle$ (tj. polynom $P'(x)$ nemá na intervalu $\langle a;\ b\rangle$ kořen) a druhá derivace $P''(x)$ neměnila znaménko na tomto intervalu. Jednotlivá přiblížení x_k mají tvar

$$x_k = x_{k-1} - \frac{P(x_{k-1})}{P'(x_{k-1})}.$$



Kdy se algoritmus zastaví, záleží na stanovené odchylce ε, tj. hledáme k tak, aby $|P(x_k)| < \varepsilon$.

Odvození vzorce pro k-tou iteraci se provádí úplně stejně jako v metodě sečen, pouze využijeme vyjádření tečny: Směrnice tečny t ke grafu funkce $y = P(x)$ v bodě x_{k-1} je $P'(x_{k-1})$, tedy dostáváme $t:\ y = P'(x_{k-1})x + q$. Protože tečna t prochází bodem $[x_{k-1};\ P(x_{k-1})]$, dosazením získáme $P(x_{k-1}) = P'(x_{k-1})x_{k-1} + q$ a odtud $q = P(x_{k-1}) - P'(x_{k-1})x_{k-1}$. Tedy rovnice tečny t je

$$y = P'(x_{k-1})x + P(x_{k-1}) - P'(x_{k-1})x_{k-1}.$$

Položíme-li $y = 0$, zjistíme, že průsečík tečny t s osou x je v bodě $x_k = x_{k-1} - \frac{P(x_{k-1})}{P'(x_{k-1})}$.

Uvedené metody se používají i pro řešení složitějších rovnic než polynomických. Jejich výhodou je relativně snadná implementace. Metody se často pro urychlení výpočtů kombinují.

ÚKOLY KE KURZU POLYNOMY Z RŮZNÝCH STRAN

1. Najděte pomocí Eukleidova algoritmu největšího společného dělitele polynomů $x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 22x^2 - 11x + 30$ a $x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 27x - 18$.

2. Najděte všechna reálná řešení rovnice $x^3 + 9x^2 + 9x - 62 = 0$.

3. Najděte přibližnou hodnotu $\bar{x}$ kořenu polynomu $P = x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ na intervalu $[-1;\, 3]$ pomocí metody půlení intervalu (bisekce) tak, aby $|P(\bar{x})| < 0{,}001$.

4. Najděte přibližnou hodnotu $\bar{x}$ kořenu polynomu $P = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ na intervalu $[-1;\, 2]$ pomocí metody sečen tak, aby $|P(\bar{x})| < 0{,}001$.

5. Najděte polynom P třetího (nebo nižšího) stupně, pro který platí $P(-1) = -2$, $P(0) = -8$, $P(1) = -10$, $P(3) = 22$.