Počítání dvěma způsoby

Štěpán Šimsa, MFF UK

Abstrakt

Mnozí z vás jistě dávno znají kouzlo té nejhravější části středoškolské matematiky – kombinatoriky. A ti ostatní ho snad objeví, až se budou seznamovat s metodou *počítání dvěma způsoby.* Jedná se o metodu, která prověří naši intuici, představu o různých kombinatorických pojmech a pomocí níž se nám podaří dokázat mnoho zajímavých příkladů.

Začneme několika motivačními úlohami, abychom se s metodou seznámili. Následně si připomeneme některé důležité kombinatorické pojmy, bez kterých se neobejdeme. Po trochu náročnějších příkladech přejdeme k jedné specifické oblasti kombinatoriky, kde se počítání dvěma způsoby často využívá, a to ke grafům. Poté, co se s nimi trochu sžijeme, si ukážeme zajímavé tvrzení, které lze touto metodou snadno dokázat a které má přitom široké využití.

V průběhu celého textu se vyskytuje několik cvičení. Doporučuji čtenářům, aby si je vyzkoušeli vyřešit. Pokud si s nějakým z těchto cvičení nebudete moci poradit, na konci textu k nim najdete návody.

Seznámení se s metodou

Začneme jednoduchým příkladem, na kterém si ukážeme, co to počítání dvěma způsoby je.

Příklad. Každý člen komise je zároveň členem právě tří podkomisí, přičemž každá podkomise má právě tři členy. Dokažte, že počet členů je stejný jako počet podkomisí.

Řešení. Označme si počet členů komise n a počet podkomisí k. Kolik je celkem lidí ve všech podkomisích, pokud si dovolíme započítat jednoho člena vícekrát? Podkomisí je k a v každé jsou tři členové komise. Lidí v nich je tedy celkem $3k$. Ale každý člen komise je ve třech podkomisích, takže jich je $3n$. Přitom jsme spočítali dvakrát odpověď na jednu a tu samou otázku, takže $3n = 3k$, neboli $n = k$.

Co tedy znamená snaha dokázat úlohu počítáním dvěma způsoby? Vymyslíme si takovou úlohu, aby jejím řešením byl jeden výraz. Poté úlohu vyřešíme jiným způsobem, abychom dostali jiný výraz. Když máme dvě odpovědi na stejnou úlohu, tak musí být stejné a výrazy se tedy rovnají.

Cvičení 1. Mějme tabulku $m \times n$ vyplněnou reálnými čísly. Ke každému řádku si napíšeme součet všech čísel v tomto řádku. Tomuto součtu budeme říkat řádkový. Podobně si ke každému sloupci napíšeme jeho sloupcový součet. Dokažte, že součet řádkových součtů je stejný jako součet sloupcových součtů.

V dalších úlohách potřebujeme znát pojem kombinačního čísla.

Kombinační číslo zapisujeme $\binom{n}{k}$, čteme ho „n nad k“ a vyjadřujeme jím počet možností, jak vybrat k objektů z n. Hodnota tohoto čísla se dá pro $n \geq k$ spočítat podle známého vzorečku

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}. \tag{1}$$

Proč tento vzoreček platí, si později dokážeme. Zatím nás to ale nemusí trápit, protože ho nebudeme používat. S *kombinačními čísly* budeme pracovat jen kombinatoricky, jako s počtem nějakých možností. To si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad. Dokažte
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Standardní řešení by bylo dosadit za kombinační čísla podle vzorečku (1) a rovnost dokázat několika algebraickými úpravami. My si ale ukážeme, jak tento příklad spočítat technikou počítání dvěma způsoby.

Řešení. Na levé straně máme počet způsobů, jak vybrat k lidí z n. Spočítejme tento počet ještě jinak. Jednoduše dáme stranou nějakých $n-k$ lidí a zbylých k budou ti vybraní. Počet způsobů, jak vybrat k lidí z n je tedy stejný jako počet způsobů, jak dát stranou $n-k$ lidí z n, což přesně odpovídá dokazované rovnosti.

Příklad. Dokažte
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Řešení. V tomto případě začneme u pravé strany, která vypadá přístupněji. Kombinační číslo $\binom{n+1}{k+1}$ vyjadřuje počet možností, jak vybrat $k+1$ lidí z $n+1$ možných. Tento počet možností chceme spočítat ještě jinak. Vidíme, že v obou kombinačních číslech na levé straně vybíráme pouze z n lidí. Jelikož ale máme lidí celkem $n+1$, musíme dát jednoho stranou. V tuto chvíli už jen stačí rozlišit případy, zda tento odložený člověk bude vybraný, nebo ne. Pokud bude vybraný, stačí vybrat ze zbylých n lidí už jen k. V opačném případě musíme ze zbylých n lidí vybrat $k+1$. Tím jsme dostali přesně levou stranu a důkaz je tedy hotový.

Příklad. Dokažte
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Řešení. Začneme například od levé strany. Chceme vybrat k lidí z n a potom ještě jednoho z nich učinit kapitánem. Tento výsledek zkusíme získat i z pravé strany. Protože tam chceme vybírat už jen $k-1$ lidí, jednoho musíme vybrat ještě předtím. Pokud tedy nejdřív vybereme kapitána ze všech n lidí, zbývá nám vybrat $k-1$ lidí z $n-1$ zbylých lidí. Tak jsme dostali přesně pravou stranu.

Mohlo by se zdát, že jsme si v těcho příkladech práci spíše přidali – dosazení do vzorečku by bylo rychlejší. Hned si ale předvedeme další příklady, které by algebraickými úpravami vyřešit nešly, nebo jen velmi obtížně.

Příklad. Dokažte
$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Řešení. Zatímco dosazení do vzorečku daleko nevede (vyzkoušejte si), počítáním dvěma způsoby dosáhneme výsledku snadno. Začneme od pravé strany, protože vypadá jednodušeji. Víme, že vyjadřuje počet způsobů, jak vybrat $k+1$ lidí z $n+1$. Na levé straně vybíráme vždy jen k lidí. Jednoho tedy musíme vybrat jinak. Nejdřív vybereme jen jednoho a podle způsobu výběru spočítáme počet možností, jak vybrat zbytek. Pokud lidi očíslujeme od 1 po $n+1$, můžeme se ptát, jaké číslo má nejmenší vybraný člověk. Když to bude hned ten první, tak zbylých k lidí vybíráme už jen z n za tím prvním. Pokud vybereme člověka s číslem 2, tak už vybíráme jen z $n-1$ lidí za ním, atd. Takto dostaneme přesně levou stranu rovnosti.

Další kombinatorické pojmy

Abychom se s metodou seznámili, ukázali jsme si několik příkladů. Nyní si předvedeme nejčastěji používané pojmy a techniky, bez kterých se neobejdeme.

Nejjednodušším konceptem je pravidlo součtu. To nám připadá velice přirozené, protože ho často používáme. Když chceme zjistit, kolik je nějakých možností, tak si rozebereme několik případů a jednotlivé počty možností sečteme. Musíme dávat pozor jen na to, abychom na žádnou možnost nezapomněli nebo některou naopak nezapočítali vícekrát. Pokud například víme, že si tři lidi koupili nanuk a dva zmrzlinu, a zajímá nás, kolik lidí si něco z toho koupilo, nemůžeme s jistotou tvrdit, že je takových lidí pět. Započítali bychom totiž dvakrát všechny, co si koupili nanuk i zmrzlinu. Pravidlo součtu jsme využili už v prvním příkladě, když jsme rozebírali, jestli jsme první prvek vybrali ($\binom{n}{k}$ možností), nebo ne ($\binom{n}{k+1}$ možností).

Dalším z přirozených pravidel je pravidlo součinu. To říká, že pokud máme m možností, jak něco udělat, a pro každou z nich máme n možností, jak udělat něco dalšího, tak celkový počet možností je $m \cdot n$. Například pokud nás zajímá, kolik je možností, kdy nám při prvním hodu na šestistěnné kostce padne liché číslo a při druhém hodu sudé číslo, je to $3 \cdot 3 = 9$. Protože nezávisle na tom, jaké liché číslo padne při prvním hodu, máme tři možnosti, jaké sudé číslo může padnout při druhém hodu. Toto pravidlo jsme využili v předposledním příkladu, když jsme násobili počet způsobů, jak vybrat k lidí z n, počtem způsobů, jak z těchto k lidí vybrat kapitána.

Při počítání dvěma způsoby je klíčové si osvojit ještě jednu schopnost. Když dostaneme nějaký počet možností, třeba m^n, potřebujeme vymyslet příklad, kterému by tento počet odpovídal. Pojďme si to rovnou zkusit na m^n. Jednoduše můžeme zapsat

$$m^n = \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n}.$$

Nyní stačí n-krát zopakovat něco, co lze provést m způsoby (a to jak poprvé, tak při opakování). Díky pravidlu součinu tak totiž dostaneme přesně požadované číslo $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m$. Takže m^n může například vyjadřovat počet možností, jak n krát dát jednomu z m lidí korunu.

Velmi často se v kombinatorice setkáváme s permutacemi. To je počet možností, jak uspořádat několik prvků. Pojďme si tento počet možností vyjádřit. Mějme n lidí a zajímejme se, kolika způsoby je můžeme uspořádat. Na první místo si můžeme vybrat z n lidí. Ať vybereme kteréhokoliv člověka, na druhé místo vybíráme jen z $n-1$ lidí. Třetího už jen z $n-2$ lidí atd., až nám zbude jen jeden člověk (a máme proto jen jednu možnost, koho vybrat). Počet možností je tedy

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1.$$

Protože se permutace vyskytují tak často, označili matematici toto číslo $n!$ (čteme „n faktoriál“). Důležité je uvědomit si, že řazené věci musí být různé. Kdybychom například měli dvě stejné zelené a dvě stejné modré kuličky a chtěli je seřadit, tak to nejde $4! = 24$ způsoby, ale jen 6, jak jednoduše zjistíme výpisem všech možností $zzmm, zmzm, zmmz, mzzm, mzmz, mmzz$ (zelenou kuličku znázorňuje z a modrou m). A kdybychom měli pouze zelené kuličky, tak je možnost jen jedna.

Nyní jsme připraveni dokázat si vzorec ze zadání.

Tvrzení. Kombinační číslo se dá spočítat pomocí vzorce

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Důkaz. Připomeneme si, že kombinační číslo na levé straně vyjadřuje počet možností, jak vybrat k objektů z n. Nejdříve upravme výraz na pravé straně do příhodnější podoby.

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 1}{k!\cdot(n-k)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!}\\ &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.\end{aligned}$$

Nyní se zaměřme na to, co vyjadřuje číslo v čitateli. Nejprve máme n možností, potom $n-1$, atd. To už jsme někde viděli. U permutací. Tak na to půjdeme podobně. Mějme n lidí a řaďme je. Na první místo vybereme jednoho z n lidí, na druhé z $n-1$, a budeme pokračovat. Ale u čísla $n-k+1$ končíme. To znamená, že jsme seřadili jen nějakých k lidí. Jinak řečeno k lidí jsme vybrali a nějak je dali do řady.

Mohlo by se zdát, že už máme hotovo. Vždyť jsme vybrali k lidí z n možných. Nyní ale vyvstává otázka, jaký význam má $k!$ ve jmenovateli. Museli jsme některé možnosti započítat vícekrát. Pro malá čísla, např. $n = 3$ a $k = 2$, dostáváme možnosti $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$. Výběr prvních dvou lidí jsme započítali dvakrát, stejně tak u zbylých možností. Nesmíme totiž zapomenout, že jsme lidi dávali do řady, ačkoli nás nezajímá jejich pořadí. Proto musíme počet možností $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$, který zatím máme, podělit číslem, jež značí, kolikrát jsme každou požadovanou možnost započítali. Ale každou možnost jsme přece započítali tolikrát, kolik je způsobů, jak vybraných k lidí uspořádat do řady. Jak už víme, to je $k!$.

Příklady

Nyní jsme připraveni na trochu náročnější příklady.

Příklad. Dokažte

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Řešení. Začněme u pravé strany. Nebude pro nás těžké interpretovat, co vyjadřuje, protože už jsme to udělali s m^n. Víme tedy, že stačí něco, u čeho můžeme dvě možnosti zopakovat n-krát. Dvě možnosti jsou typicky ano/ne, nebo vybrat/nevybrat. Vezměme si tedy n lidí a u každého z nich se rozhodněme, jestli ho vybereme, nebo ne.

Co jsme vlastně spočítali? Přeci všechny možné kombinace vybraných lidí. Můžeme vybrat jen prvního, nebo třeba všechny ostatní, nebo nikoho. Na levé straně vidíme kombinační čísla, která mají nahoře n, budeme tedy vybírat z našich n-lidí. Postupně vybíráme žádného z nich, poté jednoho atd. Jinak řečeno, rozlišíme jednotlivé případy podle toho, kolik lidí chceme vybrat. A součet možností, kdy jsme vybrali všechny bezčlenné skupinky, jednočlenné, dvoučlenné atd., je určitě stejný jako počet případů, kdy jsme vybrali skupinku libovolné velikosti.

Příklad. Dokažte

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}.$$

Řešení. Zkusme u tohoto příkladu začít levou stranou. Opět vybíráme několik věcí z n. Vezměme si tedy znovu n lidí a chtějme z nich vytvořit nějakou skupinku. Buď vybereme skupinku jednoho člověka. Nebo vybereme skupinku dvou lidí a pak z nich ještě vybereme jednoho, např. jako kapitána. A nebo vybereme skupinku tří lidí a z nich vybereme jednoho kapitána. Jinak řečeno, počítáme počet možností, kdy vybereme nějakou neprázdnou skupinku a některý z členů bude kapitán. To můžeme spočítat také tak, že nejdřív vybereme kapitána (to je n možností) a teprve poté zbytek skupinky, což je jednoduše libovolná podmnožina zbylých $n-1$ lidí a máme tedy na výběr této skupinky 2^{n-1} možností. Celkem dostáváme přesně pravou stranu $n \cdot 2^{n-1}$.

Příklad. Dokažte
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

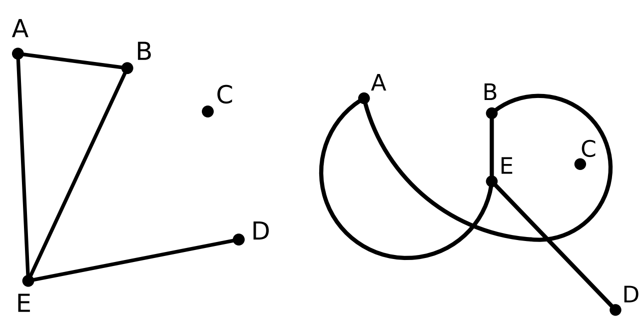
Řešení. Začněme levou stranou. Nejprve vybereme r lidí z n. Pro každých takovýchto vybraných r lidí pak chceme vybrat k vyvolených. Na pravé straně vybíráme k lidí z n. Chceme tedy začít výběrem k vyvolených, ale tentokrát je vybíráme ze všech. Jelikož všech vybraných má být r, zbývá nám jich vybrat $r-k$. Ale k lidí už je vyvolených, můžeme je tedy vybírat jen ze zbylých $n-k$ lidí. Proto násobíme číslem $\binom{n-k}{r-k}$.

Cvičení 2. Dokažte
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Počítání dvěma způsoby a grafy

Počítání dvěma způsoby se často využívá v jednom typu příkladů, a to v grafových úlohách. Nejprve si musíme vysvětlit, co to graf je.

Graf je množina vrcholů a hran. Hrana je přitom nějaká dvojice vrcholů. Ta může být buď orientovaná, nebo neorientovaná (tedy buď vede jen jedním směrem, nebo oběma) – podle toho rozlišujeme grafy orientované a neorientované (my se budeme zabývat těmi neorientovanými). Jelikož se takto graf těžko představuje, obvykle si kreslíme vrcholy jako tečky a hrany jako spojnice mezi nimi, například jako na tomto obrázku.



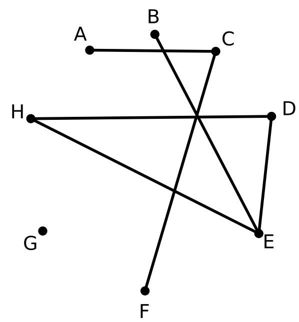
(a) Nakreslení grafu (b) Jiné nakreslení stejného grafu

Obrázek 1: Grafy

Důležité je uvědomit si, že nezáleží na tom, jak jsme si graf nakreslili. Jen si ho znázorňujeme, abychom měli lepší představu a pěkně viděli, jaké vrcholy jsou spojené. Takový jednoduchý příklad grafu může být skupina lidí, z nichž se někteří znají. Například graf na obrázku 1 odpovídá skupině pěti lidí – Adama, Bedřicha, Cyrila, Dana a Emila. Přitom Adam se zná s Bedřichem a Emilem, Bedřich zná Adama a Emila, Cyril nezná nikoho, Dan zná pouze Emila a Emil zná všechny až na Cyrila. Abychom mohli s grafy pracovat, zavedeme si několik pojmů.

Stupeň vrcholu je počet hran, které z tohoto vrcholu vycházejí. V grafu na obrázku 2 má vrchol A stupeň 1, vrchol E stupeň 3 a vrchol G stupeň 0.

Souvislý graf je takový graf, ve kterém se dostaneme z libovolného vrcholu do libovolného jiného vrcholu, pokud se můžeme přesouvat po hranách. Náš graf souvislý není například proto, že z vrcholu B se nedostaneme po hranách do vrcholu F.



Obrázek 2: Graf se třemi komponentami

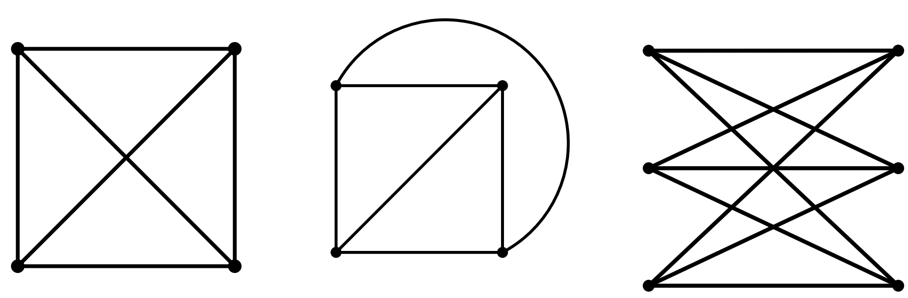
Komponenta grafu je část grafu, která je souvislá a přitom z žádného jejího vrcholu nevede hrana pryč z této komponenty. Náš graf má tři komponenty. V první jsou vrcholy A, C, F, ve druhé B, D, E, H a třetí komponenta obsahuje pouze vrchol G.

Tvrzení. Když sečteme stupně jednotlivých vrcholů v neorientovaném grafu, dostaneme sudé číslo.

Důkaz. Tento součet můžeme počítat dvěma způsoby. První máme přímo řečený v zadání, chceme sečíst stupně jednotlivých vrcholů. Nyní toto číslo chceme spočítat jinak, abychom dostali sudé číslo (a tedy i první – stejné – číslo bylo sudé). Zatím jsme součet stupňů počítali přes vrcholy, protože však stupně mluví o vztahu mezi vrcholy a hranami, je přirozené zkusit jejich součet spočítat přes hrany. Zkusme hrany po jedné přidávat do našeho grafu. Začneme tedy s grafem, kde nejsou žádné hrany, tam je součet stupňů vrcholů (označme ho D) roven nule. Když přidáme jednu hranu, tak se D zvětší o dva, protože se o jedna zvětšil stupeň obou krajních vrcholů. Po přidání všech h hran bude tedy D rovno $2h$, což je opravdu sudé číslo a důkaz je tak hotov.

Rovinné grafy

Rovinné grafy jsou speciálním případem grafů. Jsou to takové grafy, které lze nakreslit do roviny (odtud název „rovinné“) tak, aby se jednotlivé hrany nekřížily. Například graf 3*a*) je rovinný, protože jde nakreslit jako 3*b*), kde se hrany nekříží. Graf 3*c*) rovinný není, protože ať vrcholy a hrany umístíme jakkoliv, vždy se některé dvě hrany budou křížit.



(a) Rovinný graf (b) Stejný rovinný graf (c) Nerovinný graf

Obrázek 3: Rovinné grafy

Dalším důležitým pojmem je *stěna* rovinného grafu. Když si graf rozdělíme tak, že se hrany nekříží, tak nám rozděluje rovinu na několik oblastí. Ty nazýváme stěny grafu (Graf $3b$ má 4 stěny – nesmíme zapomenout tu stěnu „kolem grafu").

Pro rovinné grafy platí toto užitečné tvrzení.

Tvrzení. (Eulerův vzorec) Mějme souvislý rovinný graf s n vrcholy, h hranami a s stěnami. Pak

$$n - h + s = 2.$$

Dokázat se dá například indukcí podle počtu vrcholů. Můžete si to vyzkoušet jako cvičení. My ale tvrzení využijeme k tomu, abychom si dokázali něco ještě zajímavějšího.

Tvrzení. Rovinný graf s n vrcholy má maximálně $3n - 6$ hran.

Důkaz. Pokud je $n = 1$ nebo $n = 2$, tak tvrzení platí zřejmě. Jinak si vezměme takový graf na n vrcholech, který má největší možný počet hran. Označme h počet jeho hran a s počet jeho stěn. Tento graf je určitě souvislý (kdyby nebyl, tak bychom mohli přidat hranu mezi jeho dvě komponenty a získali bychom rovinný graf s větším počtem hran). Navíc každá stěna v grafu je trojúhelníková (tedy leží mezi třemi hranami). Kdyby totiž nebyla, tak můžeme mezi dva nesousední vrcholy přidat hranu, čímž by graf zůstal rovinný a počet hran by se zvýšil.

Víme tedy, že každá stěna sousedí se třemi hranami. Nyní můžeme dvěma způsoby spočítat, kolik je dvojic hrana a s ní sousedící stěna. Už víme, že každá stěna sousedí se třemi hranami, těchto dvojic je tedy $3s$. Na druhou stranu víme, že každá hrana sousedí se dvěma stěnami, takže je dvojic $2h$. Proto $2h = 3s$, neboli $s = \frac{2}{3}h$. Nyní stačí dosadit do Eulerova vzorce:

$$\begin{aligned} n - h + s &= 2 \\ n - h + \frac{2}{3}h &= 2 \\ n &= 2 + \frac{1}{3}h \\ h &= 3n - 6. \end{aligned}$$

To znamená, že náš graf má $3n - 6$ hran. Jelikož jsme vzali ten z rovinných grafů na n vrcholech, který má největší možný počet hran, tak má každý rovinný graf nejvýše $3n - 6$ hran.

Právě dokázané tvrzení má zajímavé důsledky. Například politická mapa světa je vlastně rovinný graf. Každý stát je jeden vrchol a vrcholy spojíme, pokud mají nějaký společný úsek hranice (tedy ne jen jeden bod). Čistě praktická otázka je, kolik potřebujeme barev, abychom mapu obarvili a aby žádné dva sousední státy neměly stejnou barvu. Nyní se už ví, že na to nejsou potřeba více než čtyři barvy. Dlouhou dobu se ale umělo dokázat jen to, že nám stačí barev 5. A právě pro důkaz této věty se využívá následující tvrzení, vycházející z toho, že rovinný graf má nejvýše $3n - 6$ hran.

Tvrzení. V každém rovinném grafu existuje vrchol se stupněm nejvýše pět.

Důkaz. Označme si počet vrcholů n a počet hran h. Kdyby měl každý vrchol stupeň alespoň 6, tak by byl součet stupňů všech vrcholů alespoň $6n$. Ale my víme, že tento součet je roven dvojnásobku počtu hran, tedy $2h$. To by znamenalo, že $h \geq 3n$, což je ve sporu s tím, že v rovinném grafu je hran nejvýše $3n - 6$.

Několik cvičení na závěr

Cvičení 3. Určete, čemu se rovná

$$1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + n^2\binom{n}{n}.$$

Cvičení 4. Dokažte

$$3^n = 2^0\binom{n}{0} + 2^1\binom{n}{1} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}.$$

Cvičení 5. Dokažte

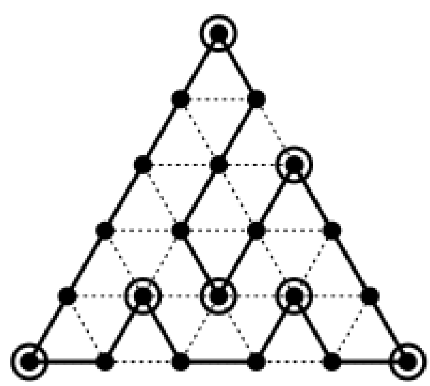
$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Cvičení 6. Dokažte

$$\binom{n+r+1}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+r}{r}.$$

Následující cvičení je úloha z třetí série třetího ročníku korespondenčního semináře iKS, který je určený pro ty nejzkušenější středoškoláky z České a Slovenské republiky. Proto je o něco obtížnější, ale s návodem se vám ji jistě podaří vyřešit.

Cvičení 7. (těžké) Rovnostranný trojúhelník o straně délky n je vyplněný jednotkovou trojúhelníčkovou mřížkou. Uzavřená lomená čára vede podél této mřížky a každý vrchol mřížky potká právě jednou. Dokažte, že tato čára alespoň $(n+1)$-krát zahne do ostrého úhlu.



Literatura a zdroje

Čerpal jsem z archivů následujících soutěží:
PraSe (Matematický korespondenční seminář) **mks.mff.cuni.cz**,
KMS (Korespondenčný matematický seminár) **kms.sk**,
iKS (Internacionální korespondenční seminář) **iksko.org**.

Návody ke cvičením

Cvičení 1. *Návod:* Počítejte dvěma způsoby součet všech čísel v tabulce.

Cvičení 2. *Návod:* Počítejte, kolik je dvojic mezi $2n$ lidmi. U druhého způsobu si všechny lidi neprve rozdělte na dvě skupiny po n lidech.

Cvičení 3. *Návod:* Počítejte dvěma způsoby počet možností, jak z n lidí vybrat nějak velkou skupinku, ve které je jeden inteligent a jeden sportovec (přičemž může jít o stejného člověka).

Cvičení 4. *Návod:* Vyberte několik lidí z n a rozdělte je na dvě skupinky. Pak zkuste to samé spočítat a zaměřte se přitom na možnosti pro jednotlivé lidi.

Cvičení 5. *Návod:* Rozdělte si $2n$ lidí na dvě skupiny a rozeberte možnosti, kolik lidí vezmete ze které skupiny (vzpomeňte si přitom, že kombinační čísla jsou symetrická, tedy vybírat k možností z n je stejné jako vybírat $n - k$ možností z n).

Cvičení 6. *Návod:* Rozeberte možnosti podle toho, kolik lidí ze začátku je vybráno (není vybraný ani první/je vybraný první, ale druhý ne/jsou vybraní první dva, ale třetí ne atd.).

Cvičení 7. *Návod:* Vybarvěte si trojúhelníčky, které jsou otočené špičkou nahoru. Všimněte si, že každá část lomené čáry s nějakým z těchto trojúhelníčků sousedí a že tam, kde čára vede podél dvou stran vzniká ostrý úhel. Nyní spočítejte dvěma způsoby délku lomené čáry – přímo pomocí počtu vrcholů v trojúhelníkové síti a poté pomocí počtu trojúhelníčků otočených nahoru, kde čára vede podél jedné nebo podél dvou stran.