Kombinatorické hry

Přednáška z cyklu *Kurzy pro nadané žáky*
pořádaného MFF UK v Praze.

Přednášející: Alena Skálová
25. dubna 2014

Základní pojmy

Teorie her se zabývá rozhodováním v konfliktních situacích. To jsou takové situace, ve kterých výsledek nezávisí jenom na tom, jak se zachováme my, ale i na tom, jak se zachovají ostatní účastníci (hráči). Dobrým příkladem jsou například šachy.

Na přednášce se budeme věnovat pouze jedné skupině her – takzvaným kombinatorickým hrám. Ujasněme si hned zkraje, co musí hra splňovat, abychom ji nazvali **kombinatorickou**.

(1) Hrají dva *hráči* proti sobě.
(2) Hráči se pravidelně střídají. Není-li uvedeno jinak, hráč nesmí vynechat tah.
(3) Je dáno (zpravidla konečně mnoho) *pozic*, ve kterých se hra může nacházet. Jedna z pozic je označena jako *startovní*. Pozicím, ve kterých hra končí, a to buď *výhrou* jednoho z hráčů a *prohrou* druhého, nebo *remízou*, se říká *koncové*.
(4) Pravidla hry určují pro každého hráče všechny přípustné *tahy* z každé pozice.
(5) Ve hře nejsou žádné náhodné prvky.
(6) Oba hráči mají *úplnou informaci*.
(7) Oba hráči jsou *racionální*.

Často se ještě přidává podmínka, že hra má být *konečná*, čili má skončit po konečném počtu kol bez ohledu na to, jak hráči hrají. Občas se v kombinatorických hrách nepřipouští možnost remízy – spolu s podmínkou konečnosti to pak znamená, že hra nutně skončí vítězstvím jednoho z hráčů. My tyto podmínky nebudeme vyžadovat, ačkoliv většina her, kterými se budeme zabývat, je splňuje.

Strategií hráče rozumíme soubor rozhodnutí, jaké tahy volit v jednotlivých pozicích hry.[1] *Vyhrávající strategie* je taková, která vede k vítězství hráče bez ohledu na to, jak chytře hraje jeho protihráč (tedy bez ohledu na protihráčovu strategii). Obdobně, má-li jeden z hráčů *neprohrávající strategii*, znamená to, že pokud se jí bude držet, hru neprohraje, ať jeho soupeř hraje sebelépe.

Poslední dva pojmy se mohou lišit ve hrách připouštějících remízu nebo v nekonečných hrách. Ujasněme si nejprve, jak vlastně může hra dopadnout (všimněte si, že jsme schválně nenapsali „skončit“):

(A) Vítězstvím prvního hráče a prohrou druhého.
(B) Prohrou prvního hráče a vítězstvím druhého.
(C) Remízou – hra skončila, ale ani jeden z hráčů nevyhrál ani neprohrál.
(D) Hra neskončí v konečném počtu tahů, neboli nikdy se nedostane do koncové pozice.[2]

[1] Přesněji lze definovat strategii jako funkci, která každé možné pozici přiřadí tah hráče.

[2] To se může stát například u piškvorek hraných na nekonečně velkém hracím plánu.

Má-li první hráč vyhrávající strategii, pak umí hrát tak, aby nastal případ (A). Naproti tomu, má-li neprohrávající strategii, je v jeho možnostech „pouze“ zabránit případu (B). Analogicky pro druhého hráče.

Případy (C) a (D) nebudeme pro jednodušší vyjadřování rozlišovat a oba budeme shodně nazývat remízou.

Zaměřme se na chvíli pouze na konečné hry nepřipouštějící remízu. V takových hrách můžeme každou pozici označit buď jako vyhrávající, nebo jako prohrávající. Jak už název napovídá, nachází-li se hráč ve **vyhrávající pozici**, pak (bude-li hrát, jak nejlépe lze) hru vyhraje. Naopak, nachází-li se v **prohrávající pozici**, hru nutně prohraje (pokud jeho soupeř neudělá chybu, což neudělá, neb jsme se již výše dohodli, že oba hráči jsou racionální).

Vyhrávající a prohrávající pozice budeme značit symboly V a P.

Jak u konkrétní pozice v dané hře poznáme, zda je vyhrávající, nebo prohrávající? Pomohou nám k tomu následující pozorování:

(i) Jedná-li se o koncovou pozici, pak pravidla určují, zda je V, nebo P.

(ii) Vede-li z nějaké pozice alespoň jeden tah do P pozice, pak je tato V. Pokud se totiž právě v takové pozici nacházíme, můžeme svým tahem do oné prohrávající pozice svého soupeře postavit a tím mu zaručit prohru a sobě výhru.

(iii) Vedou-li z nějaké pozice všechny tahy pouze do V pozic, pak je tato P. Ať totiž z takové pozice hrajeme jakkoliv, vždy „předáme“ soupeři hru ve vyhrávající pozici, tedy my se musíme nacházet v prohrávající pozici.

Vyslovme si důležitou větu o kombinatorických hrách. Myšlenka důkazu není nijak obtížná – už jsme si ji v podstatě rozmysleli spolu se zavedením V a P pozic.

Věta (O vyhrávající strategii)**.** *V konečné hře nepřipouštějící remízu má právě jeden z hráčů vyhrávající strategii.*

Poznámka. Obdobně jako V a P pozice by se daly v konečných hrách s možností remízy zavést *neprohrávající* a *nevyhrávající pozice*. Rovněž platí, že jeden z hráčů má vždy neprohrávající strategii, a to dokonce i v nekonečných hrách. Stačí si rozmyslet, co znamená nemít vyhrávající strategii – pokud ji totiž nemám, pak mi protivník vždy umí zabránit ve výhře, a tedy sám má neprohrávající strategii.

Metody řešení

Když už známe všechny podstatné pojmy, můžeme se vesele pustit do hraní rozličných kombinatorických her. V následujících podkapitolách si postupně představíme různé metody hledání vyhrávajících a neprohrávajících strategií. Není-li řečeno jinak, pak „vyřešením“ hry se míní nejen nalezení vyhrávající strategie pro jednoho z hráčů, ale i její popsání.

Zpětný rozbor

První metoda je založena na rozboru vyhrávajících a prohrávajících pozic. Budeme ji nazývat *zpětný rozbor*, cizím slovem *backtracking*, neboť hru vlastně (vy)řešíme od konce.

Hra 1 (Sedm sirek)**.** Na stole je hromádka sedmi sirek. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Hráč, který je na řadě, odebere z hromádky jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

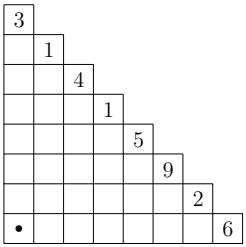
Hra 2. Na stole leží 15 sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat 1 až 4 sirky. Kdo nemůže táhnout, prohrál. ([1], úloha 1)

Hra 3. Pravidla jsou stejná jako v předchozí hře, ale kdo nemůže hrát, vyhrál.

Hra 4. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranná věž (může se pohybovat jen doleva nebo dolů). Hráči se střídají v tazích, přičemž si mohou vybrat, o kolik polí (minimálně však o jedno) pohnou věží v jednom z povolených směrů. Kdo nemůže táhnout, prohrál. ([1], úloha 12)

V následujících dvou hrách nejde ani tolik o to, kdo vyhraje, jako (o) kolik vyhraje. Mohlo by se zdát, že se jedná o zcela jiný typ her (a v jistém smyslu tomu tak skutečně je), nicméně metoda zpětného rozboru velmi dobře funguje i na ně.

Hra 5. Max a Mína si z šachovnice vyřezali zubatou desku a na kosmou diagonálu napsali čísla – viz obrázek.



Do levého dolního rohu postavili vymyšlenou figurku prince a střídají se v tazích – vždy smí s princem táhnout o jedno pole doprava nebo nahoru. Když se dostanou

na očíslované pole, hra končí. Max se snaží, aby princ skončil na poli s co největším číslem, kdežto Mína se snaží výsledné číslo minimalizovat. S jakým číslem hra skončí, začíná-li Mína? A s jakým, začíná-li Max? ([1], úloha 34)

Hra 6. Max a Mína tentokrát žádnou šachovnici neničili, jen si její pole v horním řádku a pravém sloupci popsali čísly – viz obrázek.

9	8	7	6	5	4	3	2
							8
							7
							6
							5
							4
							3
•							2

Do levého dolního rohu postavili postupně

(i) prince (smí o jedno pole doprava nebo nahoru),
(ii) věž (smí o libovolný počet polí doprava nebo nahoru),
(iii) krále (smí o jedno pole doprava, nahoru nebo doprava nahoru)

a s každou figurou si zahráli stejnou hru jako před chvílí – střídají se v tazích, hra končí spočinutím figury na očíslovaném poli. Max se snaží výsledek maximalizovat, Mína minimalizovat. Jak všechny hry dopadnou, je-li Max galantní a nechává Mínu začínat?

Kradení strategií

Metoda *kradení strategií* je založena na následující úvaze: „kdyby měl vyhrávající strategii můj soupeř, mohl bych ji okopírovat (ukrást), a tím pádem bychom měli vyhrávající strategii oba, takže on ji mít nemohl“.

Hra 7 (Piškvorky)**.** Na nekonečně velký čtverečkovaný papír kreslí do prázdných polí dva hráči střídavě křížky (první hráč) a kolečka (druhý hráč). Vyhrává ten, který jako první vytvoří nepřerušenou řadu – svisle, vodorovně nebo diagonálně – alespoň pěti svých symbolů.

Hra 8 (Dvojité šachy)**.** Pravidla jsou stejná jako v klasickém šachu s jediným rozdílem – hráč, který je na řadě, dělá tahy dva.

Hra 9 (Přičítání dělitelů)**.** Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele.[3] Kdo jako první překročí hodnotu 5774, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5774, vyhrál?

[3] Vlastní dělitelé jsou dělitelé ostře menší než číslo samotné. Např. vlastní dělitelé čísla 12 jsou čísla 6, 4, 3, 2, 1.

Symetrie

Následující technika se dá použít ve hrách, které jsou určitým způsobem symetrické – umožňují hráči kopírovat soupeřovy tahy. Základní myšlenka by se dala popsat slovy „dokud může hrát soupeř, mohu i já“.

Hra 10 (Lámání čokolády)**.** Riikka a Jussi dostali velkou (200 gramů, 4×8 kostiček) finskou hruškovou čokoládu a rozhodli se zahrát si s ní následující hru. Ve svém tahu může hráč rozlomit (láme se rovně po vyznačených čárách) libovolný kus čokolády, který ještě rozlomit lze. Kdo rozlomí poslední kousek, vyhrál a může celou čokoládu sníst. Kdo vyhraje, začíná-li lámat Riikka a pravidelně se s Jussim střídají? ([1], úloha 5)

Hra 11 (Lámání čokolády bez 1×1)**.** Na Vánoce Riikka s Jussim dostali jinou velkou (4×8 kostiček) finskou čokoládu, tentokrát peprmintovou. Protože minule se jim hra moc nelíbila, přidali pravidlo, že se nesmí ulamovat dílky velikosti 1×1. Kdo nemůže v souladu s pravidly táhnout, prohrál. Má začínající Riikka vyhrávající strategii, nebo si na čokoládě pochutná pro změnu Jussi?

(MKS, 21. ročník, 7. série, úloha 3)

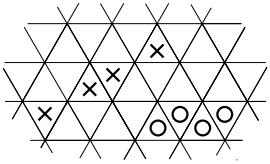
Hra 12. Dva hráči střídavě kreslí křížky do tabulky 3×3. Vyhraje ten, kdo první vytvoří souvislou trojici křížků (vodorovně nebo svisle).

Hra 13. Je dána tabulka o rozměrech 17×68. Hráč si ve svém tahu vybere nějaký podčtverec tabulky, ve kterém ještě není vybarveno žádné políčko, a celý ho vybarví. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Párování a obarvování

Není-li možné nalézt ve hře takovou symetrii, která by nám dovolila použít předchozí metodu, můžeme zkusit metodu *párování*. Myšlenka je stále stejná – „dát hráči do ruky odpověď na každý protihráčův tah“. Často se tak děje rozdělením pozic do párů, odtud také název metody. Zahraje-li soupeř na jednu z pozic v páru, já zahraji na druhou. Další možností je rozdělení pozic/tahů do obecnějších skupin.

Hra 14 (Trojúhelníkové piškvorky)**.** Dva hráči hrají piškvorky na nekonečně velkém trojúhelníkovém papíře a střídají se v tazích. Ten, kdo je na tahu, vždy nakreslí svou značku do některého volného políčka. Vyhraje hráč, který má jako první nepřerušenou rovnou řadu (směřující jedním ze tří možných směrů podél čar trojúhelníkové sítě) alespoň n svých znaků, kde n je nějaké přirozené číslo. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající nebo neprohrávající strategii.



Pro upřesnění ještě dodejme, že vyobrazená posloupnost křížků **není** řadou, zatímco posloupnost koleček **je** řadou. (MKS, 27. ročník, 2. série, úloha 8)

Hra 15 (Piškvorky do čtverce)**.** Lukáše s Viktorem už přestalo bavit hrát při hodinách obyčejné piškvorky, a tak vymysleli obměnu – hrají na čtverečkovaném papíře 10×10. V každém tahu hráč nakreslí svůj symbol do volného pole. Lukáš vyhraje, pokud vytvoří ze svých symbolů čtverec 2×2, a Viktor vyhraje, když se mu v tom podaří zabránit. V tazích se pravidelně střídají, Lukáš začíná. Který z nich má vyhrávající strategii?

Hra 16 (Proužek čísel)**.** Na proužku papíru je za sebou napsáno $2n$ čísel, kde n je libovolné přirozené číslo. Mišo s Háňou čísla postupně odstřihávají – ten, který je na řadě, si vybere jeden ze dvou konců a číslo na něm si ustřihne. Na konci oba sečtou všechna čísla, která si pro sebe ustřihli, a kdo má větší součet, vyhrál. Je-li součet stejný, nastává remíza. Který z nich má neprohrávající strategii, když Háňa začíná a pravidelně se v tazích střídají?

Směs příkladů

Podstatnou částí řešení bývá přijít na to, kterou metodu použít – v následujících příkladech vám nikdo předem neprozradí, jakou metodou se mají řešit. Občas to bude metoda probraná v předchozích odstavcích, jindy bude nutné vymyslet nový způsob, jak se s danou hrou vypořádat.

Úlohy jsou přibližně seřazené podle obtížnosti.

Hra 17. Na stole leží hromádka n sirek, kde n je libovolné přirozené číslo. Hráči z ní sirky střídavě odebírají, a kdo nemůže hrát, prohrál. Tentokrát ale může hráč v jednom tahu odebrat 1, 2, nebo 4 sirky. Který hráč má (v závislosti na n) vyhrávající strategii? A co kdyby se směly odebírat všechny mocniny dvojky?

([1], úloha 11)

Hra 18 (Mince na stole)**.** Loupežníci Kenny a Jarda ukořistili truhlu plnou zlatých kulatých mincí a rozhodli se zahrát si o ně hru. Odněkud vytáhli čtvercový stůl a postupně na něj pokládají mince. Ten, kdo je zrovna na řadě, na stůl položí jednu minci tak, aby (ani zčásti) neležela na jiné minci a nepřesahovala okraj stolu. Začíná Kenny. Prohraje ten, kdo už na stůl nemůže položit další minci. Kdo má vyhrávající strategii? ([1], úloha 20; MKS, 27. ročník, 2. série, úloha 5)

Hra 19 (Dělitelnost 7)**.** Dva hráči píší dvaceticiferné číslo tak, že zleva doprava střídavě připisují jednu cifru. První hráč vyhraje, pokud výsledné číslo nebude dělitelné sedmi. Druhý vyhraje, pokud dělitelné sedmi bude. ([1], úloha 6)

Hra 20 (Dělitelnost 13)**.** Stejná hra jako předchozí, pouze vyměníme 7 za 13.

([1], úloha 7)

Hra 21. V pravém horním rohu šachovnice stojí jednostranný král (smí se pohybovat právě o jedno pole dolů, doleva nebo doleva dolů). Hráči jím střídavě táhnou, a kdo nemůže hrát, prohrál. ([1], úloha 13)

Hra 22 (Plus minus)**.** V řadě za sebou je napsáno několik minusů. Matěj s Jonášem střídavě překreslují jeden až dva sousední minusy na plus. Vyhraje ten, který překreslí poslední minus. ([1], úloha 22)

Hra 23 (Plus minus podruhé)**.** Ema se rozhodla předchozí hru mírně pozměnit – minusy napsala do kruhu (tedy každé znaménko mělo na začátku dva sousedy), zbylá pravidla ponechala stejná. ([1], úloha 23)

Hra 24 (Razítka)**.** Vejtek se z dlouhé chvíle pustil do následující hry. Postupně dává na prázdná šachovnicová pole razítka, střídavě červené a zelené, a to tak, že nově orazítkované pole musí hranou sousedit s polem, které bylo orazítkováno těsně před ním. První – zelené – razítko může dát Vejtek kamkoliv. Prohrává ta barva, jejíž razítko už Vejtek nikam dát nemůže. Během celé hry Vejtek samozřejmě hraje co nejlépe podle toho, kterou barvu zrovna zastupuje – je-li na tahu zelené razítko, hraje Vejtek v jeho prospěch, a je-li na tahu razítko červené, pak hraje ve prospěch červeného.

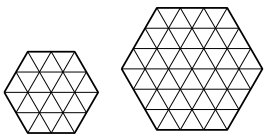
Hra 25. V řadě za sebou je napsáno n jedniček ($n > 1$) a mezi každými dvěma sousedními jedničkami je otazník. Dva hráči se pravidelně střídají v tazích – hráč, který je na tahu, přepíše libovolný z otazníků na znaménko $+$ nebo $\times$. Na konci hry, kdy už je všech $n - 1$ otazníků změněno na jedno ze znamének, se celý výraz vyhodnotí (klasicky – násobení má přednost před sčítáním). Je-li výsledné číslo sudé, vyhrává první hráč, je-li liché, tak druhý hráč.

V závislosti na n určete, který z hráčů má vyhrávající strategii.

Hra 26. Dvě šachu znalá PraSátka – Kuba a Anička – střídavě pokládají jezdce své barvy na šachovnici tak, aby se žádná dvojice znepřátelených jezdců neohrožovala. Kdo nemůže položit dalšího jezdce, prohrál. Kuba je galantní a nechá Aničku začínat. ([1], úloha 21)

Hra 27 (Mazání dělitelů)**.** Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 16. Hráč, který je na tahu, smaže nějaké číslo a spolu s ním všechny jeho dělitele, kteří na tabuli ještě zbyli. Prohrává hráč, který nemůže táhnout – tedy ten, na kterého zbyla čistá tabule.

Hra 28 (Šestiúhelníky)**.** Helča s Alčou se neznámo kde dostaly k čokoládám ve tvaru pravidelného šestiúhelníku. Každá čokoláda je rozdělena na trojúhelníkové dílky. Na obrázku jsou čokolády o hraně délky 2 a 3.



Hráčky si vybraly jednu čokoládu o hraně délky n a hrají s ní následující hru. Ta, která je na tahu, rozlomí (láme se rovně po vyznačených čárách) čokoládu na dvě části, z nichž jednu sní a druhou předá zpátky soupeřce. V tazích se pravidelně střídají, začíná Helča. Kdo nemůže táhnout, prohrává. Řešte postupně pro $n = 2$, $n = 3$, libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Hra 29 (Dvě hromádky)**.** Šavlík s Monču mají dvě (ne nutně stejně početné) hromádky kávových bonbónů. Hráč, který je na tahu, sní všechny bonbóny z jedné hromádky a druhou hromádku rozdělí na dvě – dle vlastního uvážení, ale v obou nových hromádkách musí být alespoň jeden bonbón. Pravidelně se střídají v tazích. Kdo nemůže táhnout (což nastane právě tehdy, bude-li na obou hromádkách po jednom bonbónu) prohrál. ([1], úloha 18; [2], strana I – 6)

Hra 30. Martina a Olin střídavě (Olin začíná) vybarvují políčka tabulky 5×5. Olin ve svém tahu vždy vybarví jeden čtvereček, Martina libovolně natočené triomino. Jednou vybarvené políčko již nelze vybarvit znovu. Pokud Martina už nemůže táhnout, dovybarví Olin zbytek. Vyhrává ten, kdo vybarvil více políček. Který z hráčů má vyhrávající strategii, pokud Martina smí vybarvovat

(i) pouze triomina typu I: ?

(ii) pouze triomina typu L: ?

Hra 31 (Chomp)**.** Tabulka čokolády je rozlámána na kostičky. Kostička v levém dolním rohu je otrávená (kdo ji sní, prohraje). Hráč si ve svém tahu vybere kostičku, sní ji a spolu s ní sní rovněž všechny kostičky v pomyslném obdélníku, jehož levým dolním rohem je právě vybraná kostička.[4] Hráči se pravidelně střídají v tazích. V závislosti na rozměrech určete, kdo zvítězí, je-li čokoláda

(i) čtvercová,

(ii) obdélníková. ([2], strana I – 6)

Hra 32 (Barvení bodů)**.** Pepa a Mirek obarvují body v rovině. Začíná Pepa obarvením jednoho bodu oranžově, poté Mirek obarví 100 bodů žlutě, Pepa jeden oranžově, Mirek 100 žlutě, ... Přebarvovat již jednou obarvené body není možné. Dokažte, že Pepovi se podaří vytvořit rovnostranný trojúhelník s oranžovými vrcholy.

([1], úloha 26)

Hra 33 (Piškvorky 2 : 1)**.** Majkl s Ančou hrají piškvorky na nekonečně velkém papíře s následující úpravou pravidel. Začínající Anča v každém svém tahu nakreslí jeden křížek, zatímco Majkl nakreslí v každém tahu dvě kolečka. Majkl vyhraje, když vytvoří nepřerušenou řadu sta koleček – buď svisle, nebo vodorovně. Anča se mu v tom samozřejmě snaží zabránit. Dokažte, že Majkl má vyhrávající strategii.[5]

([1], úloha 25)

[4] Tedy včetně kostičky samotné a kostiček přímo napravo a nahoru od ní.

[5] Jak víme, obecně má u nekonečných her jeden z hráčů pouze neprohrávající strategii. V této hře si ale Majkl umí zajistit výhru.

Binární vsuvka

V naší civilizaci jsme zvyklí zapisovat čísla v desítkové soustavě. Zápis 5702 je ve skutečnosti zkrácením rozpisu $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$, z čehož je hned patrné, proč mu říkáme desítkový – využívá rozložení čísla na součet mocnin desítky. Není to ovšem jediný možný zápis. Nám se bude hodit *binární zápis*, neboli zápis čísla ve *dvojkové soustavě*, či chcete-li v *bázi o základu dva*.

Platí, že každé přirozené číslo x lze jednoznačně rozepsat pomocí mocnin dvojky s koeficienty 0 nebo 1. Jinými slovy, ke každému x existuje právě jedno $m \in \mathbb{N}_0$ a jednoznačně určená $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_0 \in \{0, 1\}$, kde $x_m = 1$, taková, že

$$x = x_m \cdot 2^m + x_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \cdots + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0.$$

Binárním zápisem čísla x pak rozumíme výraz $(x_m x_{m-1} \ldots x_1 x_0)_2$. Nulu zapisujeme jako $(0)_2$. Závorku budeme občas vynechávat, bude-li bez ní zápis přehlednější. Tedy například

$$26 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = (11010)_2 = 11010_2.$$

Jak převádět čísla do binárního zápisu. Na převod čísel z desítkové soustavy do dvojkové můžeme použít následující algoritmus. Vznikající binární zápis píšeme zprava doleva!

(i) Je-li číslo sudé, zapiš si nulu. Je-li liché, zapiš si jedničku a odečti ji od svého čísla.
(ii) Vyděl číslo dvěma a dále pracuj s novým číslem.
(iii) Opakuj kroky (i) a (ii), dokud ti nezbude nula.

Cvičení 1. Převeďte čísla 7, 11, 38 a 325 do dvojkové soustavy.

Cvičení 2. Převeďte čísla $(1010)_2$, $(10111)_2$ a $(100101)_2$ do desítkové soustavy.

K řešení hry Nim (viz dále) se nám bude hodit speciální operace na nezáporných celých číslech – takzvaný Nim-součet. Abychom jej odlišili od klasického součtu, budeme místo symbolu + používat symbol $\oplus$.

Definice (Nim-součet)**.** *Nim-součtem* čísel $(x_m \ldots x_0)_2$ a $(y_m \ldots y_0)_2$ je takové číslo $(z_m \ldots z_0)_2$, že pro každé $k = 0, 1 \ldots, m$ platí $z_k = x_k + y_k \pmod 2$, neboli $z_k = 1$, pokud $x_k + y_k = 1$, a $z_k = 0$ jinak. Píšeme

$$(x_m \ldots x_0)_2 \oplus (y_m \ldots y_0)_2 = (z_m \ldots z_0)_2.$$

Tvrzení. *Pro Nim-součet libovolných tří nezáporných celých čísel x, y, z platí*

(i) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ *(asociativita),*
(ii) $x \oplus y = y \oplus x$ *(komutativita),*
(iii) $0 \oplus x = x$ *(neutrální prvek),*
(iv) $x \oplus x = 0$ *(opačný prvek),*
(v) $x \oplus y = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(jednoznačnost opačného prvku).*

Tvrzení (Pravidlo krácení)**.** *Pokud pro nezáporná celá čísla x, y, z platí rovnost $x \oplus y = x \oplus z$, potom nutně $y = z$.*

Cvičení 3. Kolik je $41 \oplus 13$? Kolik je $5 \oplus 14 \oplus 24$?

Cvičení 4. Nalezněte x, pro které platí, že $57 \oplus x = 42$.

Cvičení 5. Nalezněte x, pro které platí, že $x \oplus 7 \oplus 20 \oplus 25 = 10$.

Cvičení 6. Pro jaká x, y platí, že $x \oplus y = x + y$?

Hra Nim

Hra Nim je jednou z nejznámějších kombinatorických her. Nejde o nic jiného, než o odebírání[6] sirek, jehož obměny jsme potkali v předchozích hrách. Základní varianta hry je následující:

Hra 34 (Nim)**.** Na stole je n hromádek ($n \in \mathbb{N}$) obsahujících postupně x_1 až x_n sirek. Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere jednu hromádku a odebere z ní libovolný počet sirek, minimálně však jednu. Hráč, který nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Pro hru s n hromádkami a počty sirek $x_1, \ldots, x_n$ budeme pozice zapisovat ve tvaru $(x_1, \ldots, x_n)$.

Jak vyhrát Nim

Následující větu dokázal v roce 1902 Charles L. Bouton. Na první pohled není jasné, jak spolu souvisí Nim a binární zápis čísel, ale nenechte se tím zmást. Funguje to!

Věta (Bouton)**.** *Ve hře Nim s n hromádkami je pozice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prohrávající právě tehdy, když je Nim-součet jednotlivých hromádek roven nule, čili $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.*

Cvičení 7. Je pozice $(12, 9, 8, 3)$ prohrávající? Pokud není, nalezněte tah vedoucí do P pozice.

Cvičení 8. Je pozice $(12, 19, 27)$ prohrávající? Pokud není, nalezněte všechny vítězné tahy čili tahy vedoucí do P pozice.

Cvičení 9. Znáte-li pozice ve hře $(3, 5, 6)$ a nyní hrajete hru $(3, 5, 6, 9, 13, 21)$, je nutné rozebírat celou hru, nebo by stačilo zjistit, jak se hraje $(9, 13, 21)$ a „hrát každou hru zvlášť“? Fungovalo by to i v případě, že by pozice $(3, 5, 6)$ nebyla prohrávající?

[6] Však také samotný název hry nejspíš pochází z německého „Nimm!“, tedy „Ber!“.

Nim v převleku

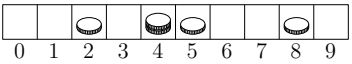
Hra 35 (Želvy)**.** V řadě za sebou stojí/leží n želv. Každá želva buď stojí, tedy je nahoru krunýřem (značíme písmenem K), nebo je vzhůru nohama (značíme písmenem N). Jedna z možných pozic pro deset želv je v následující tabulce.

K	K	N	K	N	N	N	K	N	K
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Dva hráči střídavě želvy obracejí. V jednom tahu si hráč vybere želvu, která je vzhůru nohama, obrátí ji nahoru krunýřem, a pokud chce, může ještě převrátit jednu libovolnou želvu nalevo od ní – ať už je nahoru krunýřem, nebo nohama. Hráč, který už nemůže převrátit žádnou želvu (všechny stojí na nohou), prohrál.

([2], strana I – 12)

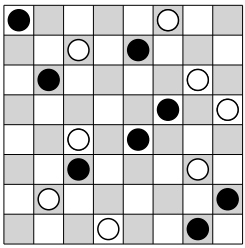
Hra 36. Mějme pásek polí očíslovaných $0, 1, 2, 3, \ldots$ a na pásku konečný počet mincí. Každá mince je na nějakém políčku, přičemž na jednom políčku jich může být i více – třeba jako na obrázku.



Dva hráči se střídají v tazích. Ve svém tahu si hráč vybere nějakou minci a posune ji na libovolné pole nalevo od původního. S mincemi, které leží na nultém poli, už nejde hrát. Kdo nemůže táhnout, prohrál. ([2], strana I – 12)

Hra 37. Anča s Lukášem hrají hru na schodišti s 2013 schody. Na začátku je na stupních schodiště rozmístěno konečně mnoho mincí (nemusí být na každém schodu, na jednom schodu jich může být více). V každém tahu si hráč vybere jeden schod a z něj přesune libovolný počet mincí (nejméně jednu, nejvýše všechny) o schod níže. S mincemi, které se po přesunu z prvního schodu ocitnou na podlaze, už se dál nehraje. Anča začíná, oba se pravidelně střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 38 (Northcott)**.** Northcottova hra se hraje na šachovnici, na jejímž každém řádku je umístěný právě jeden bílý kámen a právě jeden černý kámen. Dva kameny nikdy nesmějí ležet na stejném poli. Jedna z možných pozic je na následujícím obrázku.

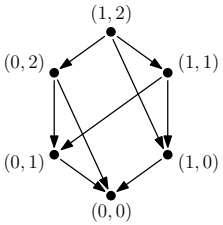


Dva hráči – Bílý a Černý – se pravidelně střídají v tazích. Hráč, který je na tahu, pohne jedním svým kamenem o libovolný počet polí doprava nebo doleva, přičemž nesmí opustit šachovnici ani přeskočit soupeřův kámen. Kdo nemůže hrát, prohrál. ([2], strana I – 12)

Hra 39 (Nim_k)**.** Mějme pevně dané číslo k. Hra je podobná jako Nim – na stole je n hromádek sirek, dva hráči z nich střídavě odebírají. Tentokrát smí ale hráč ve svém tahu odebrat sirky až z k různých hromádek. Z každé hromádky může vzít libovolné množství, celkem však musí odebrat alespoň jednu sirku. ([2], strana I – 13)

Sprague–Grundyho funkce

Pozice a tahy v konečné kombinatorické hře si můžeme nakreslit jako „puntíky“ a odpovídající „šipky“ mezi nimi. Například pro Nim $(1, 2)$ dostaneme následující schéma.



Takovému rozkreslení říkáme *graf hry*, ony „puntíky“ nazýváme *vrcholy*, „šipky“ určující možné tahy nazýváme *orientované hrany*. *Následníky* vrcholu p rozumíme všechny vrcholy, do kterých vede z p hrana (čili všechny pozice, do kterých se lze z pozice p dostat jedním tahem). Množinu následníků vrcholu (pozice) p budeme značit $N(p)$. Pro koncové pozice je $N(\cdot)$ prázdná množina.

Na konečnou kombinatorickou hru se tedy můžeme dívat i jako na dvojici (X, N), kde X je množina všech pozic a N je funkce přiřazující pozici její následníky (přesně podle pravidel hry).

Definice. *Sprague–Grundyho funkce* hry (X, N) je funkce g přiřazující pozici $p \in X$ nejmenší celé nezáporné číslo, které není Sprague–Grundyho hodnotou žádného z jejích následníků, neboli

$$g(p) = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0, n \neq g(x) \text{ pro } x \in N(p)\}.$$

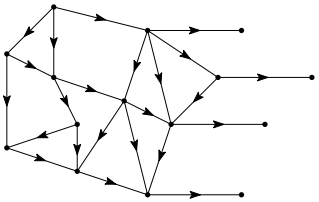
Namísto celého názvu Sprague–Grundy budeme pro zkrácení psát často jen SG.

Cvičení 10. Nalezněte SG funkci pro Nim s počáteční pozicí $(1, 2)$.

Cvičení 11. Nalezněte SG funkci pro Nim o jedné hromádce velikosti n.

Cvičení 12. Nalezněte SG funkci pro Hru 2.

Cvičení 13. Nalezněte SG funkci pro hru s následujícím grafem.



([2], strana I – 18)

Sčítání her

Definice. Hrám, ve kterých prohrává hráč nemající tah (neboli všechny koncové pozice jsou prohrávající) říkáme *normální* (anglicky *under the normal play rule*). Pokud naopak hráč nemající tah vyhrává (koncové pozice jsou vyhrávající) nazýváme hru *bídnou* (anglicky *under the misère play rule*).

Pozorování. Pro normální hru platí, že prohrávající pozice přesně odpovídají pozicím, ve kterých je SG funkce nulová.

Až do konce přednášky budeme hrou vždy rozumět normální kombinatorickou hru, aniž bychom to explicitně vypisovali.

Definice (Součet her)**.** Mějme n her H_1 až H_n ve formě grafu, tedy $H_1 = (X_1, N_1)$, $H_2 = (X_2, N_2)$, ... , $H_n = (X_n, N_n)$. *Součtem her* H_1 až H_n je taková hra $H = (X, N)$, pro kterou

(A) množina všech jejích vrcholů je kartézský součin $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, čili množina všech uspořádaných n-tic $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ... , $x_n \in X_n$,

(B) následníci vrcholu $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ jsou prvky množiny

$$\begin{aligned} N(x) = N(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & N_1(x_1) \times \{x_2\} \times \cdots \times \{x_n\} \\ & \cup \{x_1\} \times N_2(x_2) \times \cdots \times \{x_n\} \\ & \cup \cdots \\ & \cup \{x_1\} \times \{x_2\} \times \cdots \times N_n(x_n). \end{aligned}$$

Součet her značíme také $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$.

Příklad. Na Nim s n hromádkami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ můžeme nahlížet jako na součet n Nimů s jednou hromádkou postupně o velikosti x_1 až x_n. Z toho je patrné, že ačkoliv jednotlivé hry mohou být triviální (nad tím, jak vyhrát jednohromádkový Nim, není třeba se nějak zvlášť zamýšlet), jejich součet může být výrazně komplikovanější.

Věta (Sprague–Grundy)**.** *Buď g_i SG funkce hry H_i pro $i = 1, \ldots, n$. Potom součet her $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ má SG funkci*

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n).$$

Důsledek. Každá normální hra je ekvivalentní nějaké nimové hromádce.

Nalezněte *SG* funkce (a tím pádem i vyhrávající strategie) v následujících hrách – pokud ne pro celou hru, tak alespoň pro malá n. Všechny hry jsou normální, neboli kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 40. Na stole je hromádka n sirek, dva hráči se střídají v tazích. V jednom tahu lze z hromádky odebrat buď libovolný sudý počet sirek, ne však celou hromádku, nebo všechny sirky, pokud jich je lichý počet. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

Hra 41. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze odebrat libovolný sudý počet sirek z jedné hromádky, nebo libovolnou hromádku, na které už je jen jedna sirka.

Hra 42. Na stole je několik hromádek sirek. V jednom tahu lze buď odebrat libovolné množství sirek z jedné hromádky, nebo jednu hromádku rozdělit na dvě neprázdné hromádky (v takovém případě hráč žádné sirky nebere).

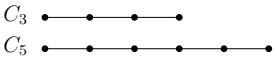
Hra 43. Na stole je hromádka sirek, dva hráči se postupně střídají v tazích, kdo nemůže táhnout, prohrál. Ve svém tahu musí hráč odebrat alespoň jednu sirku a zároveň smí z hromádky o n sirkách odebrat c sirek pouze tehdy, je-li c dělitelem n (včetně 1 a n).

Hra 44 (Vločka)**.** Hra začíná s vločkou V_n o n ramenech – na obrázku je vločka se sedmi rameny.

Jedná se vlastně o graf na $n + 1$ vrcholech. V jednom tahu hráč smaže jeden vrchol a všechny hrany s ním spojené. V každém tahu musí být smazána alespoň jedna hrana, čili nelze smazat vrchol, který již není „spojený“ s žádným jiným.

([2], strana I – 27)

Hra 45 (Cesta)**.** Hra je stejná jako ta předchozí, ale počátečním grafem není vločka, nýbrž cesta C_n, což je $n + 1$ vrcholů pospojovaných „za sebou“ n hranami. Na obrázku je příklad cest C_3 a C_5.



([2], strana I – 27)

Obdobně lze hrát další hry – vymýšlení nových a kombinování starých se meze nekladou!

Literatura a zdroje

Celá přednáška je založena na mé diplomové práci *Teorie her pro nadané žáky středních škol*, která je – na rozdíl od tohoto textu sloužícího „pouze“ jako podklad k přednášce – uzpůsobena k samostudiu, v důsledku čehož obsahuje jednak nezkrácené výkladové pasáže, jednak řešení drtivé většiny zde zadaných úloh. V současné době[7] ji lze nalézt na adrese `http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~alcas/TH.pdf`.

Pro posluchače bažící po původních zdrojích uveďme dva nejdůležitější – jsou jimi ruská sbírka

[1] Šeň A.: *Igry i strategii s točki zrenija matematiki*, Izdatelstvo MCNMO, Moskva, druhé vydání, 2008,
`http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-games.pdf`

a anglicky psaná skripta

[2] Ferguson T. S.: *Game Theory*, University of California,
`http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html`

V neposlední řadě nesmí mezi zdroji chybět *Matematický korespondenční seminář MFF UK* určený pro studenty středních škol (viz `http://mks.mff.cuni.cz`).

Obsah

Základní pojmy . . . 2
Metody řešení . . . 4
Zpětný rozbor . . . 4
Kradení strategií . . . 5
Symetrie . . . 6
Párování a obarvování . . . 6
Směs příkladů . . . 7
Binární vsuvka . . . 10
Hra Nim . . . 11
Jak vyhrát Nim . . . 11
Nim v převleku . . . 12
Sprague–Grundyho funkce . . . 13
Sčítání her . . . 14
Literatura a zdroje . . . 16

[7] Veškeré elektronické odkazy jsou aktuální k 16. dubnu 2014.