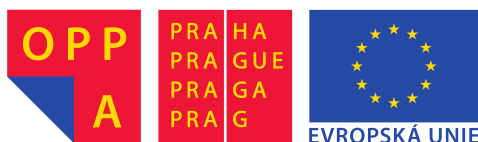

Kombinatorika

RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.



Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti."

Kombinatorika

Antonín Slavík, MFF UK, 2009–10

Tento učební text vznikl jako pomůcka pro středoškolské studenty, kteří v zimním semestru navštěvovali kurz pro řešitele matematické olympiády na MFF UK. Kromě klasických úloh z kombinatoriky obsahuje velké množství příkladů vybraných ze soutěží pro středoškolské studenty v České republice i v zahraničí; u těchto příkladů je buď uveden název soutěže, nebo jedna z následujících zkratk:

MO = Matematická olympiáda

IMO = Mezinárodní matematická olympiáda

MKS = Matematický korespondenční seminář

AHSME = American High School Mathematics Examination

AMC12 = American Mathematics Contest 12

AIME = American Invitational Mathematics Examination

AUO = Allunion Mathematical Olympiad

Některé další úlohy jsou převzaty z těchto knih:

Arthur Engel, *Problem-solving strategies*, Springer, 1998.

Titu Andreescu and Zuming Feng, *102 combinatorial problems from the training of the USA IMO team*.

Titu Andreescu, *Contests Around the World 1999–2000*.

Titu Andreescu, *Mathematical Olympiads 2000–2001, Problems and Solutions From Around the World*. The Mathematical Association of America.

Jiří Herman, Radan Kučera, Jaromír Šimša, *Metody řešení matematických úloh II*, MU Brno, 2004.

1. Základní kombinatorická pravidla

1.1 Pravidlo součinu. Počet možností, jak sestavit uspořádanou n -tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, přičemž prvek x_1 můžeme volit k_1 způsoby, prvek x_2 můžeme volit k_2 způsoby, ..., prvek x_n můžeme volit k_n způsoby, je roven $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$.

1.2 Příklad. Kolik přirozených dělitelů má číslo 2880?

Řešení. Najdeme prvočíselný rozklad zadaného čísla: $2880 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$. Každý dělitel má tvar $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, kde $i \in \{0, \dots, 6\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, $k \in \{0, 1\}$. Počet všech takových trojic (i, j, k) je $7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$.

1.3 Příklad. Kolik přirozených čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže a) cifry se mohou opakovat, b) cifry se nesmí opakovat?

Řešení. a) Cifru na první pozici lze volit pěti způsoby (musí být nenulová), cifry na každé další pozici šesti způsoby, což dává celkem $5 \cdot 6^3$ možností. b) Cifru na první pozici lze volit pěti způsoby (musí být nenulová), cifru na další pozici pěti způsoby (musí být různá od první cifry), další cifru čtyřmi způsoby (musí být různá od prvních dvou) a poslední cifru třemi způsoby (musí být různá od prvních tří cifer); to je celkem $5^2 \cdot 4 \cdot 3$ možností.

1.4 Příklad. [MO Česká republika 1991/92] Najděte nejmenší přirozené číslo n tak, aby existovalo právě 45 uspořádaných dvojic (u, v) přirozených čísel, jejichž nejmenší společný násobek je n ?

Řešení. Nechť $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ je prvočíselný rozklad hledaného čísla (kde $n_1, \dots, n_k$ jsou přirozená čísla). Toto číslo je nejmenším společným násobkem nějaké dvojice (u, v) , právě když platí

$$u = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}, \quad v = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k},$$

$$n_1 = \max(i_1, j_1), \quad n_2 = \max(i_2, j_2), \quad \dots, \quad n_k = \max(i_k, j_k).$$

Kolik existuje takovýchto dvojic (u, v) ? Musí platit

$$(i_1, j_1) \in \{(0, n_1), (1, n_1), \dots, (n_1, n_1), (n_1, n_1 - 1), \dots, (n_1, 1), (n_1, 0)\},$$

...

$$(i_k, j_k) \in \{(0, n_k), (1, n_k), \dots, (n_k, n_k), (n_k, n_k - 1), \dots, (n_k, 1), (n_k, 0)\}.$$

Dvojici exponentů (i_1, j_1) lze tedy vybrat $2n_1 + 1$ způsoby, ..., dvojici (i_k, j_k) lze tedy vybrat $2n_k + 1$ způsoby. Podle pravidla součinu tedy existuje celkem $(2n_1 + 1) \cdots (2n_k + 1)$ dvojic čísel (u, v) , jejichž nejmenším společným násobkem je n . Podle zadání má platit $(2n_1 + 1) \cdots (2n_k + 1) = 45$. Protože $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, musí jít o jeden ze součinů $5 \cdot 3 \cdot 3$, $9 \cdot 5$, $15 \cdot 3$, 45 . To znamená, že číslo n má jeden z tvarů

$$p_1^2 \cdot p_2 \cdot p_3, \quad p_1^4 \cdot p_2^2, \quad p_1^7 \cdot p_2, \quad p_1^{22}.$$

Nejmenší představitel těchto čtyř typů čísel jsou $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $2^4 \cdot 3^2$, $2^7 \cdot 3$, 2^{22} . Nejmenší z těchto čísel je první z nich, tj. $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

1.5 Pravidlo součtu. Jsou-li $A_1, \dots, A_n$ disjunktní množiny, pak platí $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$ (kde symbolem $|X|$ značíme počet prvků množiny X).

1.6 Příklad. Kolik sudých přirozených čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se cifry nesmí opakovat?

Řešení. Nechť A je množina všech hledaných čísel. Rozložme ji do tvaru $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, kde A_1 obsahuje pouze čísla končící nulou, A_2 čísla končící dvojkou a A_3 čísla končící čtyřkou. Tyto množiny jsou disjunktní a jejich velikosti snadno spočteme pomocí pravidla součinu: $|A_1| = 5 \cdot 4 \cdot 3$, $|A_2| = 4 \cdot 4 \cdot 3$, $|A_3| = 4 \cdot 4 \cdot 3$. Platí tedy $|A| = 156$.

1.7 Princip inkluze a exkluze. Zobecníme nyní pravidlo součtu pro množiny, které nemusejí být disjunktní. Jestliže A_1, A_2 jsou libovolné konečné množiny, pak platí

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Sečteme-li totiž $|A_1|$ a $|A_2|$, znamená to, že jsme některé prvky množiny $A_1 \cup A_2$ započítali dvakrát; jsou to právě ty prvky, které leží v $A_1 \cap A_2$. Odečtením $|A_1 \cap A_2|$ pak dostaneme správný výsledek.

V případě trojice množin A_1, A_2, A_3 dostaneme podobnou úvahou vzorec

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Obecná formulace principu inkluze a exkluze má tento tvar:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n |A_k| - \left(\sum_{k=2}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

1.8 Příklad. [AHSME 1998] Řekneme, že sedmimístné číslo $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7$ (kde každá z cifer c_i může nabývat hodnot 0 až 9) je snadno zapamatovatelné, jestliže platí $c_1 c_2 c_3 = c_4 c_5 c_6$ nebo $c_1 c_2 c_3 = c_5 c_6 c_7$. Kolik takových snadno zapamatovatelných čísel existuje?

Řešení. Nechť A_1 je množina všech snadno zapamatovatelných čísel splňujících $c_1 c_2 c_3 = c_4 c_5 c_6$ a A_2 je množina všech snadno zapamatovatelných čísel splňujících $c_1 c_2 c_3 = c_5 c_6 c_7$. Potřebujeme zjistit $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Platí $|A_1| = 10^4$ (pro každou z cifer c_1, c_2, c_3, c_7 máme 10 možností, ostatní cifry jsou touto volbou jednoznačně určeny), $|A_2| = 10^4$ (podobné zdůvodnění). Čísla z $A_1 \cap A_2$ splňují $c_1 c_2 c_3 = c_4 c_5 c_6 = c_5 c_6 c_7$, tj. $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7$; takových čísel je 10. Platí tedy $|A_1 \cup A_2| = 2 \cdot 10^4 - 10 = 19990$.

1.9 Příklad. Kolik existuje čísel menších než 100, které jsou násobky tří nebo čtyř?

Řešení. Nechť A_1 je množina všech násobků trojky menších než 100 a A_2 je množina všech násobků čtyřky menších než 100. Platí $|A_1| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$ a $|A_2| = \lfloor 100/4 \rfloor = 25$. V množině $A_1 \cap A_2$ jsou

násobky trojky a čtyřky zároveň, tj. násobky dvanácti; je jich $|A_1 \cap A_2| = \lfloor 100/12 \rfloor = 8$. Výsledkem je tedy $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 33 + 25 - 8 = 50$.

1.10 Cvičení. [AMC12 2001] Kolik existuje čísel menších než 2001, které jsou násobky tří nebo čtyř, ale nejsou násobky pěti?

1.11 Cvičení. [AIME 1991] Každé racionální číslo x z intervalu $(0, 1)$ můžeme jednoznačně zapsat v základním tvaru, tj. jako $x = p/q$, kde p, q jsou kladná nesoudělná čísla. Zjistěte, kolik racionálních čísel má tu vlastnost, že $p \cdot q = 20!$ (kde symbol $20!$ značí součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 20$; viz další text).

1.12 Cvičení. [AIME 1995] Nechť $n = p^r q^s$, kde p, q jsou navzájem různá prvočísla. Kolik existuje dělitelů čísla n^2 menších než n , které nejsou děliteli čísla n ?

1.13 Cvičení. [AIME 1993] Nechť n je přirozené číslo a $S = \{1, \dots, n\}$. Kolika způsoby lze vybrat dvě podmnožiny $A, B \subseteq S$ takové, že $A \cup B = S$? (A, B nemusejí být disjunktní.)

1.14 Cvičení. [MO Česká republika 2001/02] Určete počet všech dvojic přirozených čísel (a, b) , kde $1 \leq a < b \leq 86$ a součin ab je dělitelný třemi.

2. Variace, permutace a kombinace

2.1 Variace. Nechť je dána n -prvková množina X . Pak počet všech uspořádaných k -tic (kde $k \in \{1, \dots, n\}$), které lze sestavit z prvků této množiny, přičemž každý prvek z X se v k -tici vyskytuje nejvýše jednou, je roven

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

(plyne to z pravidla součinu).

2.2 Příklad. V jedné řadě je 9 míst připravených pro 3 profesory a 6 studentů. Kolika způsoby můžeme rozesadit profesory tak, aby každý seděl mezi dvěma studenty? (Na pořadí studentů nebereme ohled.)

Řešení. Předpokládejme, že studenti se postavili vedle sebe v tom pořadí, ve kterém budou sedět. Mezi studenty je 5 mezer, každý z profesorů si zvolí jednu z nich (každý jinou). Počet možností je $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

2.3 Permutace. Nechť je dána n -prvková množina X . Pak počet všech možností, jak seřadit prvky této množiny do uspořádané n -tice (každý prvek z X se v n -tici vyskytuje právě jednou), je roven

$$n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

(plyne to z pravidla součinu). Toto číslo zkráceně značíme symbolem $n!$ a čteme „ n faktoriál“.

2.4 Příklad. Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ rozmístit n věží, které se navzájem neohrožují (tj. každé dvě leží v různých řádcích i různých sloupcích)?

Řešení. V každém řádku musí být právě jedna věž. Pro každý z n řádků stačí určit číslo sloupce, ve kterém bude věž stát; čísla sloupců musejí být navzájem různá. Každé přípustné rozestavení je tedy popsáno permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ a počet všech možností je $n!$.

2.5 Kombinace. Nechť je dána n -prvková množina X . Pak počet všech možností, jak z této množiny vybrat k různých prvků (kde $k \in \{1, \dots, n\}$), přičemž nezáleží na pořadí výběru (tj. jde o neuspořádané k -tice), je roven

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1) \cdot k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Toto číslo zkráceně značíme symbolem $\binom{n}{k}$, nazýváme jej kombinačním číslem a čteme „ n nad k “. Proč platí uvedený vzorec? Je zřejmé, že

$$\text{počet uspořádaných } k\text{-tic z } n \text{ prvků} = (\text{počet neuspořádaných } k\text{-tic}) \cdot (\text{počet permutací z } k \text{ prvků}).$$

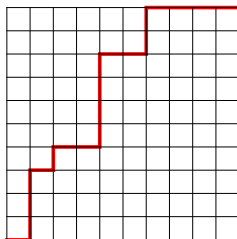
Víme už, že počet uspořádaných k -tic z n prvků je $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ a počet permutací z k prvků je $k!$; z toho plyne, že počet neuspořádaných k -tic je $\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$.

2.6 Poznámka. Definujeme $0! = 1$. Je-li n přirozené číslo, definujeme $\binom{n}{0} = 1$. Tato definice je vhodná ze dvou důvodů:

1) Počet možností jak z n -prvkové množiny vybrat 0 prvků, je 1 (nevyberu žádný prvek).

2) Je-li $k = 0$, pak $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{n!} = 1$, tj. vzorec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ platí pro každé $k \in \{0, \dots, n\}$.

2.7 Příklad. Uvažujme čtvercovou síť složenou z $n \times n$ jednotkových čtverečků. Kolika způsoby můžeme po hranách této sítě dojít z levého dolního do pravého horního rohu, jestliže jsou povoleny pouze jednotkové kroky vpravo nebo nahoru? (Příklad přípustné cesty je na obrázku.)



Řešení. Každá přípustná cesta obsahuje celkem n kroků vpravo a n kroků nahoru. Stačí tedy rozhodnout, které z $2n$ kroků povedou vpravo; počet všech možností je $\binom{2n}{n}$.

2.8 Příklad. Kolika způsoby lze vybrat k čísel z množiny $\{1, \dots, n\}$ tak, že každá dvě vybraná čísla se liší aspoň o 2? Na pořadí výběru nebereme ohled, tj. uvažujeme neuspořádané k -tice. (Nazývají se kombinacemi s nesousedními členy.)

Řešení. Každou přípustnou k -tici můžeme znázornit pomocí $n-k$ koleček a k přepážek, přičemž přepážky odpovídají vybraným číslům. Je-li např. $n = 7$ a $k = 3$, pak zápis $\bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \bigcirc$ znamená, že jsme vybrali čísla 2, 4, 7. Přípustné schémata poznáme tak, že mezi každými dvěma přepážkami je aspoň jedno kolečko. Uvažujeme-li $n-k$ koleček zapsaných vedle sebe, existuje celkem $n-k+1$ pozic, na které můžeme umístit přepážky tak, aby vzniklo přípustné schéma. Tedy počet způsobů, jak rozmístit přepážky, je $\binom{n-k+1}{k}$, a to je také hledaný počet kombinací s nesousedními členy.

2.9 Příklad. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy leží ve vrcholech pravidelného n -úhelníku a jejichž každá strana je úhlopříčkou tohoto n -úhelníku.

Řešení. Nechť X je libovolný vrchol n -úhelníku. Kolik existuje trojúhelníků, jejichž strany jsou úhlopříčkami a jeden z jejich vrcholů je X ? Každý takový trojúhelník je určen dalšími dvěma vrcholy, které nesousedí s X (je jich $n-3$) ani spolu navzájem. Počet možností, jak vybrat dvojici nesousedních vrcholů z $n-3$ vrcholů, je podle výsledku předchozí úlohy roven $\binom{n-4}{2}$. Provedeme-li tuto úvahu pro každý vrchol X , dostaneme postupně všechny přípustné trojúhelníky, avšak každý třikrát. Výsledkem je tedy $\frac{n}{3} \binom{n-4}{2}$.

2.10 Variace s opakováním. Nechť je dána n -prvková množina X . Pak počet všech uspořádaných k -tic (kde $k \in \{1, \dots, n\}$), které lze sestavit z prvků této množiny, přičemž prvky se mohou opakovat, je roven n^k (plyne to z pravidla součinu).

2.11 Permutace s opakováním. Mějme k dispozici n_1 předmětů jednoho druhu, n_2 předmětů druhého druhu, ..., n_k předmětů k -tého druhu; předpokládáme, že předměty jednoho druhu jsou navzájem nerozlišitelné. Označme $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ (všechna n_i jsou nezáporná celá čísla). Pak počet všech uspořádaných n -tic sestavených z těchto předmětů je roven

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Proč platí tento vzorec? Uvažujme libovolnou uspořádanou n -tici sestavenou z předepsaných předmětů. Označme předměty každého druhu tak, aby staly rozlišitelnými – můžeme např. na předměty i -tého druhu nalepit štítky s čísly $1, \dots, n_i$. Toto můžeme učinit celkem $n_1! n_2! \dots n_k!$ způsoby a pokaždé dostaneme jinou uspořádanou n -tici navzájem rozlišitelných předmětů. Zřejmě tedy platí

$$\text{počet uspořádaných } n\text{-tic se štítky} = (\text{počet uspořádaných } n\text{-tic bez štítků}) \cdot (n_1! n_2! \dots n_k!).$$

Víme, že počet uspořádaných n -tic se štítky je $n!$, a proto počet uspořádaných n -tic bez štítků je $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

2.12 Kombinace s opakováním. Mějme k dispozici k druhů předmětů (předměty jednoho druhu jsou navzájem nerozlišitelné, od každého druhu máme neomezený počet předmětů). Počet způsobů, jak vybrat

celkem n předmětů (předměty z každé třídy se mohou libovolněkrát opakovat, případně nemusí být zastoupeny vůbec) je roven

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Toto tvrzení snadno dokážeme, jestliže si kombinace s opakováním znázorníme pomocí koleček a přepážek. Jestliže např. $n = 6$ a $k = 4$, pak zápis $\bigcirc \bigcirc | \bigcirc || \bigcirc \bigcirc \bigcirc$ znamená, že vybíráme dva předměty prvního druhu, jeden předmět druhého druhu, žádný předmět třetího druhu a tři předměty čtvrtého druhu. Obecně máme n koleček pro předměty a $k-1$ přepážek oddělujících jednotlivé druhy předmětů. Počet způsobů, jak seřadit těchto $n+k-1$ symbolů je (permutace s opakováním) $\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$.

2.13 Příklad. Kolik řešení v oboru nezáporných celých čísel má rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$? Řešením rozumíme uspořádanou k -tici $(x_1, \dots, x_n)$, tj. záleží na pořadí.

Řešení. Jde pouze o jinou formulaci kombinací s opakováním. Představme si, že máme k dispozici k druhů předmětů. Každé řešení rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ pak můžeme chápat jako výběr n předmětů, přičemž z i -té třídy bereme x_i předmětů (pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$). Počet řešení rovnice je tedy stejný jako počet kombinací s opakováním, tj. $\binom{n+k-1}{k-1}$.

2.14 Cvičení. Kolika způsoby lze na šachovnici o rozměrech $n \times n$ rozmístit k věží (kde $k < n$), které se navzájem neohrožují (tj. každé dvě leží v různých řádcích i různých sloupcích)?

2.15 Cvičení. Kolika způsoby lze vybrat k čísel z množiny $\{1, \dots, n\}$ tak, že každá dvě vybraná čísla se liší aspoň o 3? Na pořadí výběru nebereme ohled, tj. uvažujeme neuspořádané k -tice.

2.16 Cvičení. [AIME 1998] Najděte počet řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$ takových, že $x_1, \dots, x_4$ jsou kladná lichá čísla.

2.17 Příklad. [MO Česká republika 1997] Kuličky sedmi různých barev jsou rozděleny do sedmi pytlíků tak, že v každých dvou pytlících najdeme po kuličce téže barvy. Dokažte:

- Kuličky některé barvy jsou zastoupeny v aspoň třech pytlících.
- Pokud byly od každé barvy rozděleny jen tři kuličky, pak v žádném pytlíku nenajdeme dvě kuličky téže barvy. Rozhodněte, zda je takové rozdělení kuliček vůbec možné.

Řešení. Očíslujme pytlíky i barvy čísly $1, \dots, 7$. Pro $i, j \in \{1, \dots, 7\}$, $i < j$, označme symbolem b_{ij} tu barvu, která se nachází v pytlících i a j (je-li takových více, vybereme libovolnou z nich). Čísel b_{ij} je celkem $\binom{7}{2} = 21$, z toho nejvýše 7 různých.

a) Kdyby kuličky libovolné barvy byly zastoupeny nejvýše ve dvou pytlících, musely by být všechny hodnoty b_{ij} navzájem různé, a to je spor. Poznamenejme, že tvrzení by platilo, i kdybychom počet pytlíků snížili na pět (neboť $\binom{5}{2} = 10$), nebo kdybychom počet barev zvýšili na 20.

b) Předpokládejme, že od každé barvy byly rozděleny jen tři kuličky. Pak je každá barva zastoupena nejvýše ve třech pytlících, takže se každé barvě rovnají nejvýše $\binom{3}{2} = 3$ hodnoty b_{ij} . Protože hodnot b_{ij} je celkem 21, znamená to, že každá barva je mezi nimi právě třikrát. Z toho plyne, že kuličky každé barvy jsou v právě třech pytlících. Příklad přípustného rozdělení je $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{3, 5, 6\}$ (každá množina představuje jeden pytlík).

2.18 Příklad. [MO Česká republika 2000/01] V urně jsou bílé a černé kuličky; počet všech kuliček zaočkrouhlený na stovky je 1000. Pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček je o $\frac{17}{43}$ větší než pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček. Kolik bílých a kolik černých kuliček je v urně? (Pravděpodobnost vytažení kterékoli kuličky je stejná.)

Řešení. Nechť je v urně n kuliček, z toho b bílých (a $n-b$ černých). Potom pravděpodobnost vytažení dvou bílých kuliček je

$$\frac{\binom{b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)},$$

zatímco pravděpodobnost vytažení dvou černých kuliček je

$$\frac{\binom{n-b}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)}.$$

Podle zadání úlohy platí rovnost

$$\frac{(n-b)(n-b-1)}{n(n-1)} = \frac{b(b-1)}{n(n-1)} + \frac{17}{43},$$

kterou lze zjednodušit do tvaru $43b = 13n$. Odtud vzhledem k nesoudělnosti čísel 13 a 43 plyne, že čísla n a b jsou tvaru $n = 43k$ a $b = 13k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Podle zadání pro číslo n platí $950 \leq n < 1050$, z nichž zjistíme, že $k \in \{23, 24\}$. Úloha má tedy dvě řešení: Pro $k = 23$ vychází $n = 989$, $b = 299$, $n - b = 690$, zatímco hodnotě $k = 24$ odpovídá $n = 1032$, $b = 312$, $n - b = 720$.

3. Kombinatorické identity

Kombinatorickými identitami budeme rozumět vztahy, v nichž vystupují kombinační čísla nebo faktoriály. Připomeňme, že kombinační čísla jsou definována vztahem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

kde n je kladné a k nezáporné celé číslo. Z tohoto vyjádření ihned plyne, že

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Kombinatorický význam je zřejmý: Počet způsobů, jak vybrat k prvků z n -prvkové množiny, je stejný jako počet možností, jak vybrat $n - k$ prvků.

Další velmi známou identitou je vztah

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Můžeme jej dokázat výpočtem:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Nebo kombinatorickou úvahou: Číslo $\binom{n+1}{k+1}$ vyjadřuje počet možností, jak z množiny $\{1, \dots, n+1\}$ vybrat $k+1$ čísel. Všechny takové $(k+1)$ -prvkové podmnožiny lze rozdělit na dvě skupiny – podmnožiny neobsahující číslo $n+1$ (těch je $\binom{n}{k+1}$) a podmnožiny obsahující číslo $n+1$ (těch je $\binom{n}{k}$, protože kromě čísla $n+1$ zbývá vybrat ještě k dalších). Platí tedy $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Další zajímavé identity lze snadno dokázat pomocí binomické věty:

3.1 Binomická věta. Jsou-li a, b reálná čísla a n je přirozené číslo, pak platí

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Důkaz je jednoduchý: Představíme si, že roznásobujeme součin $(a+b)^n = (a+b) \cdots (a+b)$. Výsledkem je součet obsahující členy tvaru $a^{n-i} b^i$, kde $i \in \{0, \dots, n\}$. Tento člen dostaneme po roznásobení tolikrát, kolik je možností, jak vybrat z $n-i$ závorek číslo a a ze zbývajících i závorek číslo b ; to jde udělat $\binom{n}{i}$ způsoby.

Dosadíme-li do binomické věty $a = b = 1$, dostaneme identitu

$$2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

I tato identita má kombinatorický význam: Na pravé straně sčítáme počty 0-prvkových, 1-prvkových, ..., n -prvkových podmnožin množiny o velikosti n a identita nám říká, že počet všech podmnožin n -prvkové

množiny je 2^n . To je snadno vidět i bez binomické věty: Libovolnou podmnožinu n -prvkové množiny získáme tak, že se u každého prvku rozhodneme, zda jej do podmnožiny zařadíme; máme tedy celkem 2^n možností.

Jinou známou identitu dostaneme z binomické věty dosazením $a = 1$, $b = -1$:

$$0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Můžeme ji přepsat do tvaru

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots,$$

ze kterého plyne kombinatorický význam: Počet podmnožin n -prvkové množiny se sudým počtem prvků je stejný jako počet podmnožin s lichým počtem prvků.

3.2 Cvičení. Dokažte poslední identitu kombinatoricky, tj. bez použití binomické věty.

3.3 Příklad. [MKS 1995/96] Nechť X je n -prvková množina. Zjistěte, jaký je součet všech čísel $|A \cap B|$, pokud za (A, B) dosazujeme postupně všechny dvojice podmnožin množiny X .

Řešení. Nechť $\overline{M}$ značí doplněk množiny M v X , tj. $\overline{M} = X - M$. Existuje 2^n různých podmnožin množiny X , a tedy existuje $(2^n)^2 = 4^n$ uspořádaných dvojic podmnožin množiny X . Rozdělme všechny tyto páry (A, B) na 4^{n-1} čtveřic obsahujících dvojice (A, B) , $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, \overline{B})$. Dostaneme tak rozdělení všech uspořádaných dvojic podmnožin množiny X na disjunktní čtveřice (čtveřice odvozená od libovolného z párů $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, \overline{B})$ je totožná s čtveřicí odvozenou od páru (A, B)). Každý prvek patří buď do A , nebo do $\overline{A}$ (resp. do B , nebo do $\overline{B}$), a tak tedy patří do právě jedné z množin (A, B) , $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, \overline{B})$. Platí tedy $|A \cap B| + |\overline{A} \cap B| + |A \cap \overline{B}| + |\overline{A} \cap \overline{B}| = n$ a po sečtení přes všechny čtveřice dostaneme výsledek $n \cdot 4^{n-1}$.

3.4 Cvičení. Nechť $n > 1$ je liché číslo. Dokažte, že mezi kombinačními čísly

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

je lichý počet lichých čísel.

Z definice kombinačního čísla snadno plyne, že

$$k \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = n \cdot \frac{(n-1) \cdots (n-k+1)}{(k-1)!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Tento vzorec, který platí pro $n \geq 1$ a $k \geq 1$, se často hodí při odvozování jiných identit.

3.5 Příklad. Sečtěte $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

Řešení.

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

3.6 Cvičení. Sečtěte $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

3.7 Příklad. Dokažte identitu

$$\sum_{i=0}^k \binom{p}{i} \binom{q}{k-i} = \binom{p+q}{k},$$

kde p, q, k jsou přirozená čísla.

Řešení. Uvažujme skupinu $p+q$ osob, mezi nimiž je p mužů a q žen. Pravá strana udává, kolika způsoby lze z této skupiny vybrat k osob (bez ohledu na pohlaví). Označíme-li symbolem A_i množinu všech k -tic osob, mezi nimiž je i mužů, platí $|A_i| = \binom{p}{i} \binom{q}{k-i}$, a tedy

$$\binom{p+q}{k} = \sum_{i=0}^k |A_i| = \sum_{i=0}^k \binom{p}{i} \binom{q}{k-i}.$$

3.8 Cvičení. [MKS 1995/96] Dokažte identitu $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

3.9 Cvičení. [MKS 1995/96] Dokažte identitu $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n}{i+1} = \binom{2n}{n-1}$.

4. Přihrádkový princip

Přihrádkový (někdy též Dirichletův) princip je velmi jednoduché tvrzení, které se často používá při řešení kombinatorických úloh (zejména u existenčních důkazů):

Rozmístíme-li $n + 1$ předmětů do n přihrádek, pak v aspoň jedné přihrádce je více než jeden předmět.

Následující verze je o něco obecnější:

Rozmístíme-li $kn + 1$ předmětů do n přihrádek, pak v aspoň jedné přihrádce je více než k předmětů.

4.1 Příklad. V místnosti je n osob. Dokažte, že mezi nimi existují dvě osoby, které mají v místnosti stejný počet přátel.

Řešení. Pro $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ označme symbolem A_i množinu všech osob, které mají i přátel. Nemůže nastat situace, že by množiny A_0 a A_{n-1} byly obě zároveň neprázdné. Rozdělili jsme tedy n osob do nejvýše $n-1$ množin, a v některé proto musejí být aspoň dvě osoby.

4.2 Příklad. Nechtě $a_1, \dots, a_n$ jsou libovolná celá čísla. Dokažte, že z nich lze vybrat skupinu čísel, jejichž součet je dělitelný číslem n .

Řešení. Označme

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad s_n = a_1 + \dots + a_n.$$

Pokud je některé s_i dělitelné číslem n , je tvrzení zřejmé; předpokládejme tedy, že to není pravda. Potom zbytky čísel s_i při dělení n leží v množině $\{1, \dots, n-1\}$. Existuje tedy dvojice čísel $k < l$ tak, že s_k a s_l mají stejné zbytky. To znamená, že číslo $s_l - s_k = a_{k+1} + \dots + a_l$ je dělitelné číslem n .

4.3 Cvičení. Dokažte, že libovolná množina deseti čísel vybraných z $\{1, 2, \dots, 100\}$ má dvě neprázdné disjunktní podmnožiny takové, že součty jejich prvků jsou stejné.

4.4 Cvičení. [MO Česká republika 1995/96] Dokažte, že zvolíme-li libovolně 11 různých dvojciferných čísel, vždy z nich lze vybrat dvě skupiny čísel, které mají stejný počet prvků, neobsahují žádný společný prvek a dávají stejný součet.

4.5 Příklad. [MKS 1994/95] Dokažte, že mezi libovolnými osmi složenými čísly vybranými z množiny $\{1, 2, \dots, 360\}$ jsou aspoň dvě soudělná čísla.

Řešení. Protože $19^2 = 361$, je každé číslo z dané množiny dělitelné nějakým prvočíslem menším než 19. Rozdělme složená čísla z dané množiny do podmnožin $A_2, A_3, A_5, A_7, A_{11}, A_{13}, A_{17}$ podle toho, jaký je jejich nejmenší prvočíselný dělitel. Jde o sedm množin, takže mezi osmi vybranými čísly jsou dvě se stejným prvočíselným dělitelem, tj. jsou to soudělná čísla.

4.6 Příklad. [MO Velká Británie, 2000] a) Najděte desetiprvkovou množinu přirozených čísel takovou, že součet žádných šesti čísel z této množiny není dělitelný šesti. b) Je možné najít jedenáctiprvkovou množinu se stejnou vlastností?

Řešení. a) Příkladem takové množiny je $A = \{6j + k; 1 \leq j \leq 5, 0 \leq k \leq 1\}$. Skutečně, prvky této množiny dávají při dělení šesti zbytek 0 nebo 1, přičemž od každého druhu máme 5 prvků. Vybereme-li z A šestiprvkovou podmnožinu, bude v ní aspoň jedno a nejvýše pět čísel se zbytkem 1, takže součet všech šesti vybraných čísel nemůže být dělitelný šesti.

b) Ukážeme, že v libovolné jedenáctiprvkové množině A existuje šest čísel, jejichž součet je dělitelný šesti. Z každé aspoň tříprvkové množiny přirozených čísel lze vybrat dvě čísla, jejichž součet je sudý. Z naší jedenáctiprvkové množiny A tedy můžeme postupně vybrat celkem 5 takových dvojic. Součet čísel v každé dvojici dává při dělení šesti zbytek 0, 2, nebo 4. Pokud nastanou všechny tři případy, vezmeme od každého typu jednu dvojici a dostaneme šestici čísel, jejichž součet je dělitelný šesti. Pokud naopak dostaneme nejvýše dva zbytky z množiny $\{0, 2, 4\}$, znamená to, že existují aspoň tři dvojice se stejným zbytkem; součet těchto šesti čísel je opět dělitelný šesti.

4.7 Příklad. [MO Česká republika 1998] Dokažte, že z libovolných čtrnácti různých přirozených čísel lze pro některé číslo k ($1 \leq k \leq 7$) vybrat dvě disjunktní k -prvkové podmnožiny $\{a_1, \dots, a_k\}$ a $\{b_1, \dots, b_k\}$

tak, aby se součty

$$A = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_k}$$

navzájem lišily o méně než 0,001, tj. aby platilo $|A - B| < 0,001$.

Řešení. Uvažujme všech $\binom{14}{7} = 3432$ součtů

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_7},$$

kde $x_1 < x_2 < \cdots < x_7$ je libovolná sedmice vybraná z daných čtrnácti přirozených čísel. Pro každý z těchto součtů S platí odhady

$$0 < S \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} < 3,$$

takže se jedná o 3432 (ne nutně různých) čísel z intervalu $(0, 3)$. Proto se některé dva z uvažovaných součtů liší o méně než 0,001; vyloučíme-li z obou příslušných sedmic případné společné prvky, zmenší se oba součty o tutéž hodnotu (takže jejich rozdíl se nezmění) a v obou skupinách bude stejný (nenulový, neboť šlo o dvě různé sedmice) počet prvků.

4.8 Příklad. [MO Česká republika 1995/96] Děti se v táboře dělily do družin následujícím způsobem: Vedoucí určil mezi dětmi několik náčelníků. Každý náčelník si pak vzal do skupiny všechny své kamarády z tábora (kamarádství je vzájemné). Kupodivu to vyšlo *dobře*, tedy tak, že se náčelníci nemuseli o žádné dítě hádat, žádné dítě nezbylo a žádní dva náčelníci nebyli kamarádi. Podruhé určil vedoucí jiný počet náčelníků. Mohlo rozdělení dětí popsáním způsobem opět dopadnout dobře?

Řešení. Odpověď je ne. Označme počet náčelníků v prvním výběru k a v druhém l . Postupujme sporem. Předpokládejme, že $k \neq l$, a přitom obě rozdělení dopadla *dobře*. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $l > k$ (jinak výběry vyměníme, na jejich pořadí nezáleží). Protože podruhé bylo družin více, musí v tomto výběru existovat dva náčelníci, kteří byli v prvním výběru ve stejné družině (označme ji M). Ani jeden z nich nemohl být náčelníkem M , jinak by museli být kamarádi a druhé rozdělení by pak nemohlo vyjít *dobře*. Potom ale mají společného kamaráda – náčelníka družiny M , proto druhé rozdělení nemohlo vyjít *dobře* ani v tomto případě. To je spor s předpokladem $k \neq l$.

4.9 Příklad. [MKS 1995/96] Každé políčko nekonečného čtverečkovaného papíru je obarveno jednou ze sedmi barev. Dokažte, že lze vybrat 1948 řádků a 1989 sloupců tak, aby všechny jejich průsečíky měly stejnou barvu.

Řešení. Uvažujme nekonečně široký pás o výšce $7 \cdot 1947 + 1$. V každém z jeho sloupců existuje barva, která se vyskytuje nejméně 1948-krát. Počet způsobů, jak obarvit jeden sloupec, je $P = 7^{7 \cdot 1947 + 1}$. Vezmeme-li libovolných $1988P + 1$ sloupců, najdeme mezi nimi 1989 stejně obarvených. Provedeme-li pak v nich výše uvedenou úvahu, dostaneme hledaných 1948 řádků.

4.10 Příklad. V místnosti o rozměrech $7 \times 7 \text{ m}^2$ stojí 50 osob. Ukažte, že existují aspoň dvě, jejichž vzájemná vzdálenost je menší než 1,5 m.

Řešení. Rozdělíme-li místnost na 49 čtverců 1×1 , budou v jistém čtverci aspoň dvě osoby. Jejich maximální vzdálenost je rovna délce úhlopříčky čtverce, tj. $\sqrt{2} < 1,5 \text{ m}$.

4.11 Příklad. Uvažujme všechny body v rovině, které mají obě souřadnice celočíselné. Vyberme z nich libovolných pět bodů. Dokažte, že mezi nimi existuje dvojice bodů takových, že úsečka, která je spojuje, prochází aspoň jedním dalším bodem s celočíselnými souřadnicemi.

Řešení. Rozdělme body podle toho, zda jejich souřadnice jsou sudé, nebo liché. Každý bod patří do jedné ze čtyř skupin: (s, s) , (l, s) , (s, l) , (l, l) . Aspoň dva z pěti vybraných bodů proto patří do stejné skupiny. Jsou-li jejich souřadnice (a, b) a (c, d) , pak střed jejich spojnice má souřadnice $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$, což jsou celá čísla.

4.12 Cvičení. Na území ve tvaru čtverce o straně délky 1 km se nachází 51 osob. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $1/7 \text{ km}$, uvnitř kterého se nacházejí aspoň 3 osoby.

5. Úlohy vedoucí na rekurentní rovnice

5.1 Příklad. Ve hře známé pod názvem „Hanojské věže“ máme k dispozici 3 kolíky a 8 kotoučů různých velikostí. Na začátku hry jsou všechny kotouče na levém kolíku, úkolem hráče je přenést kotouče na

pravý kolík. V každém kroku je povoleno přemístit jeden kotouč z jednoho kolíku na jiný, a to tak, že větší kotouč nikdy nesmí ležet na menším. Jaký je nejmenší potřebný počet kroků k dosažení cíle?



Řešení. Nechť a_n je minimální počet kroků potřebný k přenesení n kotoučů z jednoho kolíku na jiný; zřejmě platí $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Ukážeme, že pro každé $n \geq 2$ je splněna rekurentní rovnice $a_n = 2a_{n-1} + 1$. K tomu, abychom se dostali k největšímu kotouči a mohli jej přenést z levého kolíku na pravý, musíme nejprve přemístit zbývajících $n - 1$ kotoučů na prostřední kolík (k tomu je potřeba a_{n-1} kroků). Poté přeneseme největší kotouč z levého kolíku na pravý (1 krok) a zbývá přemístit $n - 1$ kotoučů z prostředního kolíku na pravý (opět a_{n-1} kroků); platí tedy $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$. Pomocí této rekurentní rovnice snadno spočteme, že $a_8 = 255$.

5.2 Poznámka. Spočteme-li hodnoty a_n pro malá přirozená čísla n , snadno uhadneme, že platí obecný vzorec $a_n = 2^n - 1$; dokažte jej indukcí!

5.3 Cvičení. Uvažujme následující variantu hlavolamu „Hanojské věže“: Jsou dány 3 kolíky; na prvním z nich je postavena věž z n kotoučů seřazených podle velikostí (největší je vespod), ostatní jsou prázdné. V každém kroku lze přenést jeden kotouč mezi prvním a druhým kolíkem, nebo mezi druhým a třetím kolíkem, a to tak, že větší kotouč nikdy nesmí ležet na menším. Jaký je nejmenší počet kroků potřebný k přenesení věže z prvního na třetí kolík?

5.4 Příklad. n zajatců čekajícím na popravu bylo nařízeno, aby se rozestavili do kruhu. Postupně bude popraven každý druhý zajatec tak dlouho, dokud nezůstane naživu jen jeden z nich; tomu bude udělena milost. (Např. pro $n = 4$ bude postupně popraven druhý, čtvrtý a třetí zajatec, první přežije). Zjistěte, který zajatec zůstane naživu.

Řešení. Nechť a_n je číslo zajatce, který zůstane naživu (předpokládáme, že zajatci jsou očíslováni čísly $1, \dots, n$ v tom pořadí, ve kterém stojí v kruhu vedle sebe). Zřejmě platí $a_1 = a_2 = 1$. Pro a_n , kde $n \geq 3$, odvodíme rekurentní rovnici. Je-li $n = 2k$ sudé, pak po provedení k poprav zbývá k zajatců s čísly $1, 3, \dots, 2k - 1$. Naživu zůstane a_k -tý z nich; jeho číslo je $2a_k - 1$. Platí tedy

$$a_{2k} = 2a_k - 1.$$

Je-li $n = 2k + 1$ liché, pak po provedení $k + 1$ poprav zbývá k zajatců s čísly $3, \dots, 2k - 1, 2k + 1$. Naživu zůstane a_k -tý z nich; jeho číslo je $2a_k + 1$. Platí tedy

$$a_{2k+1} = 2a_k + 1.$$

Pomocí těchto rekurentních rovnic lze spočítat a_n pro každé přirozené n .

5.5 Poznámka. Sestavíme-li si tabulku hodnot a_n pro malá čísla n , můžeme uhadnout, že pro $n = 2^k$ je $a_n = 1$ a s každým zvýšením n o 1 roste a_n o 2 tak dlouho, dokud nenarazíme na další mocninu dvojky. Formálně zapsáno: Je-li $n = 2^k + l$, kde $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$, pak $a_n = 2l + 1$. Dokažte to matematickou indukcí! (Použijte obě nalezené rekurentní rovnice.)

5.6 Cvičení. [AIME 1996] Ve školní šatně je v řadě vedle sebe celkem 1024 uzavřených skříněk očíslovaných $1, 2, \dots, 1024$. Nudící se student prochází kolem skříněk zleva doprava, otevře první a následně každou druhou skříňku (tj. skřínky $1, 3, \dots, 1023$). Poté se vrací zpět zprava doleva, všimá si pouze zbývajících uzavřených skříněk, a opět otvírá první a pak každou druhou (tj. skřínky $1024, 1020, \dots$). Takto postupuje do té doby, než otevře všechny skřínky. Zjistěte, jaké číslo měla poslední otevřená skříňka.

5.7 Příklad. [MO Česká republika 1997/98] V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena, A a B . Pro slova tohoto jazyka platí:

1) Jediné slovo délky 1 je A .

2) Libovolná skupina písmen $X_1X_2 \dots X_nX_{n+1}$, kde $X_i \in \{A, B\}$ pro každý index i , tvoří slovo délky $n+1$, právě když obsahuje aspoň jedno písmeno A a přitom není tvaru $X_1X_2 \dots X_nA$, kde $X_1X_2 \dots X_n$ je slovo délky n .

Najděte a) všechna slova délky 4, b) vzorec pro počet p_n všech slov délky n .

Řešení. a) K nalezení slov délky 4 potřebujeme znát slova délek 3 a 2. Slova délky 2 jsou AB, BA , slova délky 3 jsou AAA, AAB, ABB, BAB, BBA , slova délky 4 jsou $AAAB, AABB, ABAA, ABAB, ABBA, BAAA, BAAB, BABB, BBAB, BBBB$.

b) Už víme, že $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 5, p_4 = 10$. Z pravidel pro tvoření slov snadno zjistíme, že počet slov délky $n+1$ končících na A je $2^n - p_n$ a počet slov délky $n+1$ končících na B je $2^n - 1$. Úloha tedy vede na rekurentní rovnici

$$p_{n+1} = (2^n - p_n) + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1 - p_n.$$

Použijeme-li tuto rovnici dvakrát po sobě, dostaneme

$$p_{n+2} = 2^{n+2} - 1 - p_{n+1} = 2^{n+2} - 1 - (2^{n+1} - 1 - p_n) = p_n + 2^{n+1}.$$

Počet slov délky n , kde $n = 2k$ je sudé číslo, je roven

$$p_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \dots + 2^3 + p_2 = 2 \cdot \frac{4^k - 1}{3}.$$

Počet slov délky n , kde $n = 2k - 1$ je liché číslo, je roven

$$p_{2k-1} = 2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \dots + 2^2 + p_1 = \frac{4^k - 1}{3}.$$

5.8 Cvičení. [MO Česká republika 1997/98] V jistém jazyce jsou pouze dvě písmena, A a B . Přípustná jsou v něm pouze taková slova, v nichž nestojí vedle sebe více než dva stejné znaky. Dokažte, že pro počet p_n všech přípustných slov délky n platí $p_1 = 2, p_2 = 4$ a $p_{k+2} = p_{k+1} + p_k$ pro každé přirozené číslo k .

5.9 Příklad. [MO Česká republika 2003/04] Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani čtveřici $AAAA$ po sobě jdoucích písmen A , ani trojici BBB po sobě jdoucích písmen B . Určete hodnotu výrazu

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}}.$$

Řešení. Počet vyhovujících slov délky n , která končí písmenem A , resp. B , označme a_n , resp. b_n . Platí $p_n = a_n + b_n$. Nechť $n = 4$. Vyhovující slovo končící písmenem A má jednu z koncovek BA, BAA , nebo $BAAA$. Počet slov prvního typu je b_{n-1} , druhého typu b_{n-2} , třetího typu b_{n-3} . Proto

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}.$$

Podobně pro $n = 3$ má vyhovující slovo končící písmenem B jednu z koncovek AB, ABB , tudíž

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Z předchozích dvou vztahů pro každé $n \geq 6$ plyne

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} = (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) + (a_{n-4} + a_{n-5}) = \\ &= a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5} \end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + a_{n-2} = (b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}) + (b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5}) = \\ &= b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5}. \end{aligned}$$

Sečtením posledních dvou rovností dostaneme

$$p_n = a_n + b_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}.$$

Proto pro libovolné $n \geq 6$ (a speciálně pro $n = 2004$) platí

$$\frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2.$$

5.10 Cvičení. [MO Česká republika 2003/04] Pro libovolné přirozené číslo n sestavme z písmen A a B všechna možná „slova“ délky n a označme p_n počet těch z nich, která neobsahují ani trojici AAA po sobě jdoucích písmen A , ani dvojici BB po sobě jdoucích písmen B . Určete, pro která přirozená čísla n platí, že obě čísla p_n a p_{n+1} jsou sudá.

6. Úlohy o obarvení a pokrytí

6.1 Příklad. Každý bod v rovině je buď červený, nebo modrý. Dokažte, že pro aspoň jednu z těchto barev platí, že pro každé $d > 0$ existují dva body dané barvy, jejichž vzdálenost je d .

Řešení. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Pak existují kladná čísla a, b taková, že žádné dva červené body nemají vzdálenost a a žádné dva modré body nemají vzdálenost b . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \leq b$ (jinak stačí zaměnit červenou a modrou barvu). Vezměme libovolný modrý bod C a sestrojme trojúhelník ABC tak, že $|AC| = |BC| = b$ a $|AB| = a$. Body A, B nemohou být modré (jejich vzdálenost od modrého bodu je b), takže jsou červené; to je spor s tím, že žádné dva červené body nemají vzdálenost a .

6.2 Cvičení. Každý bod v rovině je obarven jednou ze tří barev. Dokažte, že existují dva stejně obarvené body o vzdálenosti 1.

6.3 Příklad. Každý bod v rovině je buď červený, nebo modrý. Dokažte, že existuje obdélník, jehož vrcholy jsou též barvy.

Řešení. Uvažujme pouze body se souřadnicemi (x, y) , kde $x \in \{1, 2, 3\}$ a $y \in \{1, \dots, 9\}$. Počet možností, jak obarvit jeden řádek tvořený třemi body je 8. Protože řádků je 9, existují mezi nimi dva stejně obarvené; předpokládejme, že jde o k -tý a m -tý řádek. Pro každé $x \in \{1, 2, 3\}$ mají body (x, k) a (x, m) stejnou barvu. Protože jde o tři dvojice, existují dvě dvojice stejné barvy a nalezené čtyři vrcholy tvoří hledaný obdélník.

6.4 Cvičení. Každý bod v rovině je obarven jednou z n barev. Dokažte, že existuje obdélník, jehož vrcholy jsou též barvy.

6.5 Cvičení. Každý bod v rovině je buď červený, nebo modrý. Dokažte, že existuje rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy jsou též barvy.

6.6 Cvičení. [MO Česká republika 1994/95] Každý bod obvodu čtverce o straně 10 cm je obarven jednou ze dvou barev. Dokažte, že při libovolném obarvení můžeme na obvodu čtverce vždy najít tři body stejné barvy tak, aby trojúhelník s těmito vrcholy měl obsah aspoň 25 cm^2 .

6.7 Příklad. [IMO Shortlist 1996] Uvažujme čtvercovou síť složenou z $(n-1) \times (n-1)$ jednotkových čtverečků. Kolika způsoby lze obarvit vrcholy těchto čtverečků (tj. celkem n^2 vrcholů) červenou a modrou barvou tak, aby každý jednotkový čtvereček měl dva vrcholy červené a dva modré?

Řešení. Vrcholy ve spodním řádku můžeme obarvit libovolně. Rozlišíme dva případy:

a) Barvy vrcholů ve spodním řádku se střídají; existují právě dvě obarvení spodního řádku, která mají tuto vlastnost. Snadno si rozmyslíme, že to znamená, že i barvy ve všech dalších řádcích se musejí střídát a v každém řádku můžeme libovolně zvolit jedno ze dvou „střídavých“ obarvení. Existuje tedy celkem 2^n takovýchto obarvení.

b) Ve spodním řádku existují dva sousední vrcholy stejné barvy; existuje celkem $2^n - 2$ obarvení spodního řádku, které mají tuto vlastnost. Pak existuje pouze jedno přípustné obarvení všech zbývajících vrcholů.

Celkový počet všech přípustných obarvení je tedy $2^{n+1} - 2$.

6.8 Příklad. [MO Česká republika 1996/97] Každá z úhlopříček pravidelného n -úhelníku ($n \geq 5$) je obarvena modře nebo červeně. Je povoleno postupně přebarvovat úhlopříčky tak, že v každém kroku vybereme jeden vrchol a změním barvy všech úhlopříček, které z něj vycházejí (z modré na červenou a naopak). Rozhodněte, zda lze vždy úhlopříčky přebarvit tak, aby existovala

- a) lomená čára
- b) uzavřená lomená čára

složená vesměs z modrých úhlopříček a procházející každým vrcholem n -úhelníku právě jednou.

Řešení. a) Odpověď je ano. Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou (v tomto pořadí) vrcholy n -úhelníku. Položme

$$\begin{aligned} X_1 X_2 \dots X_n &= A_1 A_3 A_5 \dots A_{n-1} A_2 A_4 \dots A_n \quad \text{je-li } n \text{ sudé,} \\ X_1 X_2 \dots X_n &= A_1 A_3 A_5 \dots A_n A_2 A_4 \dots A_{n-1} \quad \text{je-li } n \text{ liché.} \end{aligned}$$

Ukážeme, že úhlopříčky lze přebarvit tak, že všechny úsečky lomené čáry $X_1 X_2 \dots X_n$ jsou modré. K tomu stačí volit za i postupně hodnoty $1, \dots, n-1$ a pokaždé zkontrolovat, zda je úsečka $X_i X_{i+1}$ modrá. Pokud ne, přebarvíme všechny úhlopříčky vycházející z vrcholu X_{i+1} . Zřejmě platí, že po provedení i -tého kroku je úsek $X_1 X_2 \dots X_i X_{i+1}$ celý modrý.

b) Odpověď je ne. Jednoduchý protipříklad představuje pětiúhelník se všemi úhlopříčkami obarvenými červeně. Z každého vrcholu vycházejí 2 úhlopříčky, při každém přebarvení se tedy počet modrých úhlopříček změní o sudé číslo. Nelze proto dosáhnout toho, aby všech pět úseček nějaké uzavřené lomené čáry bylo modrých.

6.9 Cvičení. [MO Česká republika 1996/97] Nechť M je množina úhlopříček pravidelného n -úhelníku, která neobsahuje žádnou uzavřenou lomenou čáru. Ukažte, že každé výchozí obarvení úhlopříček lze podle pravidel předchozí úlohy tak, že všechny úhlopříčky z M budou modré. (Využijte toho, že pokud M neobsahuje uzavřenou lomenou čáru, pak existuje vrchol n -úhelníku náležející právě jedné úhlopříčce z M .)

6.10 Cvičení. [MO Česká republika 1996/97] V rovině je dáno n bodů, některé jsou pospojovány úsečkami tak, že z každého bodu vycházejí právě 3 úsečky. Dokažte, že tyto body lze obarvit modrou a červenou barvou tak, že žádný bod nemá dva sousedy stejné barvy, jakou má on sám.

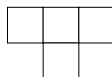
6.11 Cvičení. [Austrian-Polish Mathematics Competition 2000] Pro která přirozená čísla $n \geq 5$ platí, že vrcholy pravidelného n -úhelníku lze obarvit nejvýše šesti barvami tak, že každých pět po sobě jdoucích vrcholů má různé barvy?

6.12 Příklad. [MO Česká republika 1995/96] Je dáno šest tříprvkových podmnožin konečné množiny X . Dokažte, že prvky množiny X je možné obarvit dvěma barvami tak, aby žádná ze šesti daných podmnožin nebyla jednobarevná, tj. neměla všechny tři prvky stejné barvy.

Řešení. Označme dané podmnožiny $A_1, \dots, A_6$. Tvrzení dokážeme indukcí podle počtu n prvků množiny X . Začneme s případem $n = 6$. (Pokud má množina X méně než 6 prvků, doplníme ji na šestiprvkovou přidáním nových prvků; množiny A_i se tím nezmění.) Protože $\binom{6}{3} = 20 > 2 \cdot 6$, existuje tříprvková množina $Y \subset X$, která se nerovná ani žádné z množin A_i , ani žádnému doplňku $X - A_i$. Obarvíme-li prvky Y jednou barvou a prvky $X - Y$ barvou druhou, dostaneme přípustné obarvení.

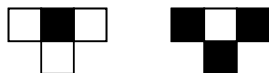
Nyní předpokládejme, že množina X má $n \geq 7$ prvků. Pak existuje dvojice různých prvků $u, v \in X$, které spolu neleží v žádné z množin A_i . (Opravdu, existuje totiž nejvýše $6 \cdot \binom{3}{2} = 18$ dvojic prvků, které patří do některé z množin A_i , zatímco všech dvojic prvků z X je $\binom{7}{2} = 21$.) Tuto dvojici prvků u, v „slepíme“ do jednoho nového prvku w , tj. kdykoliv nějaká množina A_i obsahuje u nebo v , nahradíme jej prvkem w . Máme tak šest tříprvkových podmnožin $n-1$ prvkové množiny $X' = (X - \{u, v\}) \cup \{w\}$, a podle indukčního předpokladu existuje přípustné obarvení prvků X' . Pak stačí vrátit se k původním množinám $X, A_1, \dots, A_6$ a použít nalezené obarvení, přičemž prvky u, v budou mít barvu prvku w .

6.13 Příklad. Dokažte, že čtverec o rozměrech 10×10 nelze beze zbytku pokrýt 25 dlaždicemi následujícího tvaru:



Řešení. Předpokládejme, že existuje nějaké pokrytí. Obarvíme políčka dlaždic střídavě černou a bílou

barvou (tak, jako na šachovnici). Dostaneme tak dva druhy dlaždic, s jedním černým políčkem a třemi bílými, nebo obráceně:



Protože celkový počet černých políček je roven celkovému počtu bílých políček, musíme mít od každého ze dvou druhů stejný počet dlaždic. Ale počet dlaždic je $100/4 = 25$ (liché číslo), což je spor.

6.14 Příklad. Dokažte, že čtverec o rozměrech 10×10 nelze beze zbytku pokrýt obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 4×1 .

Řešení. Očíslujme políčka čtverce podle následujícího obrázku:

0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Předpokládejme nyní, že existuje nějaké pokrytí čtverce, a umístíme nejprve všechny vodorovné dlaždice. Každá zakryje čtyři různé cifry; nezakryto zůstane $n+10$ nul, $n+10$ jedniček, n dvojek, n trojek (kde n je nějaké číslo). Každá svislá dlaždice zakryje 4 stejné cifry; to znamená, že n i $n+10$ jsou čísla dělitelná čtyřmi, ale to se pro žádné n nemůže stát.

6.15 Příklad. [MO Korea 2000] Chceme vydláždit obdélník o rozměrech $m \times n$, kde m, n jsou přirozená čísla větší než 1. K dispozici máme následující dva druhy dlaždic (každá je složena ze čtyř jednotkových čtverečků):

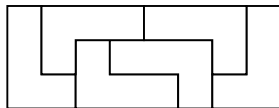


Dokažte, že obdélník je možno beze zbytku vydláždit právě tehdy, když součin mn je dělitelný osmi.

Řešení. Nechť mn je dělitelné osmi. Důkaz, že obdélník lze beze zbytku vydláždit, rozdělíme na dva případy:

a) m i n jsou sudá. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $4|m$ a $2|n$. Vezmeme-li dvě dlaždice jednoho druhu, můžeme z nich vytvořit obdélníček 2×4 . Pak stačí vzít $mn/8$ takovýchto obdélníčků a vyplnit jimi obdélník $m \times n$.

b) Jedno z čísel m, n je liché. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to m ; pak musí být n dělitelné osmi. Ze šesti dlaždic můžeme sestavit obdélníček 3×8 :



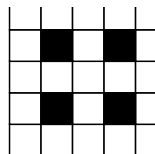
Pomocí těchto obdélníčků můžeme vyplnit obdélník $3 \times n$. Je-li $m = 3$, jsme hotovi; v opačném případě nám zbývá obdélník $(m-3) \times n$, který vydláždíme podle bodu a).

Dokažme ještě obrácenou implikaci. Jestliže lze obdélník beze zbytku vydláždit, znamená to, že $4|mn$ (každá dlaždice má obsah 4). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $2|n$. Obarvíme všech m řádků obdélníka střídavě černou a červenou barvou. Na každé dlaždici pak bude lichý počet černých (a také červených) čtverečků. Celkový počet černých čtverečků je však sudý, a to znamená, že počet dlaždic je také sudý. Z toho plyne, že $8|mn$.

6.16 Příklad. Jistý obdélník je beze zbytku vyplněn dlaždicemi o rozměrech 2×2 a 4×1 . Jedna

dlaždice se však rozbije a k dispozici už máme jen dlaždici druhého druhu. Dokažte, že ani po případném přeuspořádání dlaždic se nám už nepovede obdélník beze zbytku vyplnit.

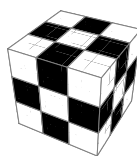
Řešení. Obarvíme všechna políčka obdélníka podle následujícího schématu:



Na každé dlaždici o rozměrech 4×1 pak bude sudý počet černých políček a na každé dlaždici o rozměrech 2×2 jich bude lichý počet. Z toho plyne, že dlaždici jednoho druhu nelze zaměnit dlaždicí druhého druhu.

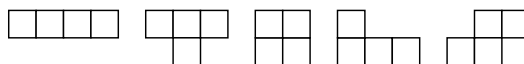
6.17 Příklad. [MKS 1995/96] Myš žere kostku sýra ve tvaru krychle o hraně 3 rozdělené na 26 krychliček – prostřední chybí. Začne s libovolnou krychličkou, pak přejde na některou sousední (se společnou stěnou). Toto stále opakuje. Může takto myška sežrat všechny sýrové krychličky?

Řešení. Obarvíme krychličky „šachovnicovým“ způsobem podle následujícího obrázku:



Bílých krychliček je 14, černých 12. Myška střídavě konzumuje bílé a černé krychličky, a proto se jí nikdy nepodaří sníst všechny.

6.18 Cvičení. Je možné následující dlaždice (od každého druhu máme použít jednu) poskládat tak, aby beze zbytku vyplnily nějaký obdélník?



6.19 Cvičení. Dokažte, že čtverec o rozměrech 8×8 nelze beze zbytku pokrýt 15 dlaždicemi ve tvaru „T“ a 1 čtvercovou dlaždicí o rozměrech 2×2 .

6.20 Cvičení. [AUO 1989] Čtverec o rozměrech 23×23 chceme pokrýt čtvercovými dlaždicemi o rozměrech 1×1 , 2×2 a 3×3 . Jaký nejmenší počet dlaždic 1×1 je k tomu zapotřebí?

7. Matematické hry

7.1 Příklad. [MO Česká republika 2008/09] Na stole je n pohárů, všechny jsou postaveny dnem vzhůru. V jednom kroku smíme otočit libovolných k pohárů naopak (k je dané, neměnné). Je možné, aby po konečném počtu kroků bylo všech n pohárů postaveno dnem dolů? Řešte nejprve pro $n = 9$ a $k = 5$, potom pro $n = 9$ a $k = 4$.

Řešení. Pro $n = 9$ a $k = 5$ to možné je, například takto:

(↑, ↑, ↑, ↑, ↑, ↑, ↑, ↑, ↑)

(↓, ↓, ↓, ↓, ↓, ↑, ↑, ↑, ↑)

(↓, ↓, ↑, ↑, ↑, ↓, ↓, ↑, ↑)

(↓, ↓, ↓, ↓, ↓, ↓, ↓, ↓, ↓)

Pro $n = 9$ a $k = 4$ to možné není, protože obecněji platí: při sudém k a libovolném n se nemění parita počtu pohárů postavených dnem vzhůru (tj. tento počet je buď neustále sudé, nebo neustále liché číslo).

7.2 Příklad. [MO Česká republika 2008/09] Na hranici kruhu stojí 2 jedničky a 48 nul v tomto pořadí: 1, 0, 1, 0, 0, ..., 0. V jednom kroku je povoleno přičíst číslo 1 ke kterémukoliv dvěma sousedním číslům. Můžeme po několika krocích dosáhnout toho, aby všech 50 čísel bylo stejných?

Řešení. Označíme-li čísla po řadě $x_1, x_2, \dots, x_{50}$, pak hodnota výrazu $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{49} - x_{50}$ zůstává během hry konstantní. V počátečním stavu $1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0$ je jeho hodnota 2; ve stavu se všemi stejnými čísly by byla hodnota 0, a to není možné.

7.3 Příklad. [MO Česká republika 2008/09] V každém vrcholu čtverce leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je takto možné přemístit všechny 4 mince do jednoho vrcholu.

Řešení. Očíslujme vrcholy čtverce čísly 1, 2, 3, 4. Přiřaďme každé minci číslo vrcholu, v němž se aktuálně nachází, a označme symbolem S součet těchto čtyř čísel. Po každém tahu (tj. přesunu dvou mincí podle pravidel) hodnota S buď zůstane stejná, nebo se změní o ± 4 . Počáteční hodnota S je $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Hodnota S ve stavu, kdy jsou všechny mince v jednom vrcholu, by musela být násobkem čtyř, a to není možné.

7.4 Cvičení. [MO Česká republika 2008/09] Předchozí úlohu zobecněte pro případ n mincí, po jedné ve vrcholech pravidelného n -úhelníku. Dokažte, že přesun všech mincí na jednu hromádku je možný, právě když je n liché.

7.5 Cvičení. Je dán pravidelný 1988-úhelník. Dva hráči do něj střídavě zakreslují úhlopříčky (tj. úsečky spojující nesousední vrcholy), přičemž není dovoleno protnout žádnou dříve nakreslenou úhlopříčku. Prohrává hráč, který nemůže nakreslit žádnou další úhlopříčku. Který hráč má vyhrávající strategii?

7.6 Příklad. [MO Čína 1989] Na stole leží 2001 stejných mincí, každá mince má přední a zadní stranu. Hra pro jednoho hráče sestává z 2001 kroků, v i -tém kroku ($i \in \{1, \dots, 2001\}$) obrátí hráč libovolných i mincí na druhou stranu. Dokažte, že pro libovolnou počáteční konfiguraci mincí lze najít vhodný postup tak, že všechny mince budou na konci ležet buď přední, nebo zadní stranou vzhůru. Dokažte také, že lze dosáhnout vždy pouze jednoho z těchto stavů.

Řešení. Dokážeme indukci, že tvrzení platí obecněji pro n mincí, kde n je libovolné liché číslo. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že platí pro $n = 2k - 1$ mincí, a dokažme, že z toho plyne platnost i pro $n = 2k + 1$ mincí.

a) Všechny mince leží na začátku otočeny na stejnou stranou. Poskládejme je do kruhu a očíslujme čísla $1, \dots, 2k + 1$. V prvním kroku otočíme minci 1, ve druhém mince 2 a 3, ve třetím mince 3, 4, 5 atd. Na konci hry jsme provedli celkem $1 + 2 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)(2k + 1)$ otočení, každou minci jsme tedy otočili $(k + 1)$ -krát. To znamená, že všechny mince jsou opět otočeny na stejnou stranu.

b) Existuje mince M_1 ležící přední stranou vzhůru a mince M_2 ležící přední stranou dolů. Použijeme indukční předpoklad na zbylých $2k - 1$ mincí a v $2k - 1$ krocích dosáhneme toho, že budou otočeny na stejnou stranu; bez újmy na obecnosti předpokládejme, že leží přední stranou vzhůru. V $2k$ -tém kroku obrátíme tyto mince společně s M_1 a v posledním kroku obrátíme všechny mince; všechny jsou nyní otočeny na stejnou stranu.

Dokažme, že pro žádnou počáteční konfiguraci nelze dosáhnout obou stavů, tj. „všechny mince přední stranou vzhůru“ i „všechny mince přední stranou dolů“. Předpokládejme, že to jde, tj. prvního stavu lze dosáhnout posloupností kroků P_1 a druhého posloupností kroků P_2 . To by znamenalo, že pokud položíme všechny mince přední stranou vzhůru, aplikujeme na ni posloupnost kroků P_1 v obráceném pořadí a poté posloupnost kroků P_2 , budou všechny mince nakonec otočeny přední stranou dolů. Mincí je lichý počet, takže jsme celkem museli provést lichý počet otočení. Na druhou stranu víme, že počet otočení byl $2(k + 1)(2k + 1)$ – to je sudé číslo, a tedy dospíváme ke sporu.

7.7 Cvičení. Mějme 2^m sirek rozdělených do několika hromádek. V každém kroku vybereme libovolné dvě hromádky; předpokládejme, že na jedné leží p sirek a na druhé je q sirek, přičemž $p \geq q$. Z hromádky s p sirkami jich q odebereme a přemístíme je na druhou hromádku. Dokažte, že při libovolné počáteční konfiguraci můžeme pomocí vhodně volených kroků přemístit všechny sirky na jednu hromádku.

7.8 Cvičení. [MO Čína 1994] Na stole leží $n \geq 4$ krabiček, ve kterých je rozmístěno celkem $m \geq 4$ sirek. V každém kroku hry vybereme dvě neprázdné krabičky, z každé odebereme jednu sirku a obě sirky pak vložíme do třetí krabičky (libovolné, avšak odlišné od prvních dvou). Rozhodněte, zda pro libovolné počáteční rozmístění sirek můžeme pomocí vhodně volených kroků vždy přemístit všechny sirky do jedné krabičky.

7.9 Příklad. [MO Česká republika 2004/05] Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \dots, k$ kamenech, kde $k \geq 3$. V každém kroku vybereme tři libovolné hromádky na stole, sloučíme je do jedné a přidáme k ní jeden kámen, který na stole dosud neležel. Jestliže po několika krocích vznikne jediná hromádka, není výsledný počet kamenů dělitelný třemi. Dokažte.

Řešení. V každém kroku se počet hromádek zmenší o dvě. Aby vznikla jedna hromádka, musí být na začátku lichý počet hromádek, tedy $k = 2m + 1$. Na zmenšení počtu hromádek o $2m$ je třeba m kroků. Při každém přibude jeden kámen, a proto je výsledný počet kamenů

$$p = 1 + 2 + 3 + \dots + (2m + 1) + m = \frac{(2m + 1)(2m + 2)}{2} + m = 2m^2 + 4m + 1.$$

Číslo m má jeden ze tvarů $m = 3n$, $m = 3n + 1$, $m = 3n + 2$. V prvním případě je $p = 18n^2 + 12n + 1 = 3(6n^2 + 2n) + 1$, ve druhém $18n^2 + 24n + 7 = 3(6n^2 + 8n + 2) + 1$ a ve třetím $p = 18n^2 + 36n + 17 = 3(6n^2 + 12n + 5) + 2$. Žádné z těchto čísel není dělitelné třemi.

7.10 Cvičení. [MO Česká republika 2004/05] Na stole leží 54 hromádky o $1, 2, 3, \dots, 54$ kamenech. V každém kroku vybereme libovolnou hromádku, řekněme o k kamenech, a odebereme ji celou ze stolu spolu s k kameny z každé té hromádky, ve které je aspoň k kamenů. Například po prvním kroku, při kterém vybereme hromádku o 52 kamenech, zůstanou na stole hromádky o $1, 2, 3, \dots, 51, 1$ a 2 kamenech. Předpokládejme, že po určitém počtu kroků zůstane na stole jediná hromádka. Kolik kamenů v ní může být?

7.11 Cvičení. [MO Česká republika 2004/05] Na stole leží k hromádek o $1, 2, 3, \dots, k$ kamenech, $k \geq 5$. V každém kroku vybereme 4 libovolné hromádky, sloučíme je do jedné a ještě k ní přidáme jeden kámen z jakékoliv další hromádky. Určete všechna k , pro která po konečném počtu kroků může vzniknout jediná hromádka.

7.12 Příklad. [MO Česká republika 2002/03] Hráči A a B hrají na desce složené ze šesti polí očíslovaných $1, 2, \dots, 6$ následující hru. Na začátku je umístěna na pole s číslem 2 figurka a pak se hází běžnou hrací kostkou. Padne-li číslo dělitelné třemi, posune se figurka na pole s číslem o 1 menším, jinak na pole s číslem o 1 větším. Hra končí vítězstvím hráče A resp. B , dostane-li se figurka na pole s číslem 1 resp. 6. S jakou pravděpodobností zvítězí hráč A ?

Řešení. Označme p_i pravděpodobnost, že hráč A vyhraje v situaci, kdy figurka stojí na i -tém políčku. Snadno sestavíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p_3, \\ p_3 &= \frac{1}{3}p_2 + \frac{2}{3}p_4, \\ p_4 &= \frac{1}{3}p_3 + \frac{2}{3}p_5, \\ p_5 &= \frac{1}{3}p_4. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme výsledek $p_2 = 15/31$.