Syntetická geometrie

Josef Tkadlec

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Syntetická geometrie

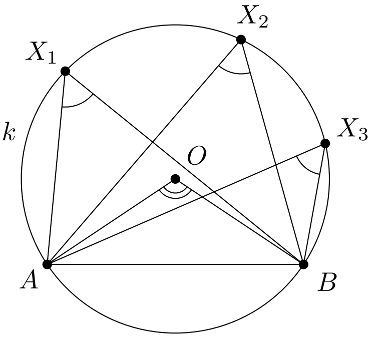
Josef Tkadlec, MFF UK

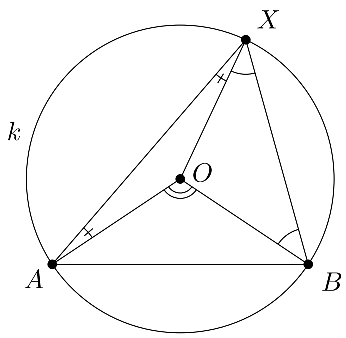
Tento kurz poskytuje ucelený úvod do elementární syntetické planimetrie. V několika oddílech jsou vysvětlena a dokázána nejdůležitější tvrzení, se kterými si člověk vystačí při řešení naprosté většiny geometrických úloh matematické olympiády, látka je ilustrována na řešených příkladech a čtenáři jsou předložena cvičení, k nimž jsou na konci uvedeny návody. Text nepředpokládá žádné předchozí znalosti.

Obvodové úhly a tětivové čtyřúhelníky

Začněme hned tím bezesporu nejdůležitějším tvrzením syntetické geometrie. Je jím věta o obvodovém a středovém úhlu.

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu) *Dána je kružnice k se středem O a její tětiva AB. Probíhá-li bod X jeden z oblouků kružnice k určených body A, B, zůstává $|\sphericalangle AXB|$ konstantní. Navíc platí $|\sphericalangle AXB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB|$, tedy obvodový úhel příslušný danému oblouku je roven polovině úhlu středového.*





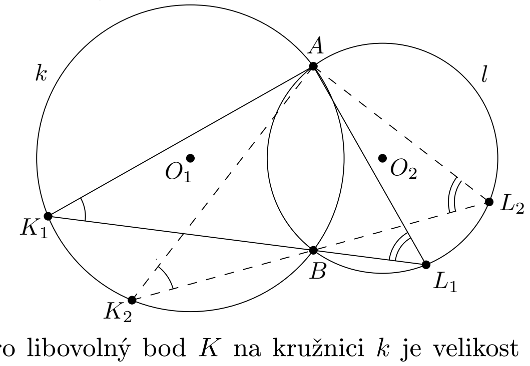
Důkaz. Pro jednoduchost předpokládejme, že O je vnitřním bodem trojúhelníka ABX; ostatní případy se dokáží analogicky. Trojúhelníky AOX a BOX jsou rovnoramenné, takže můžeme psát

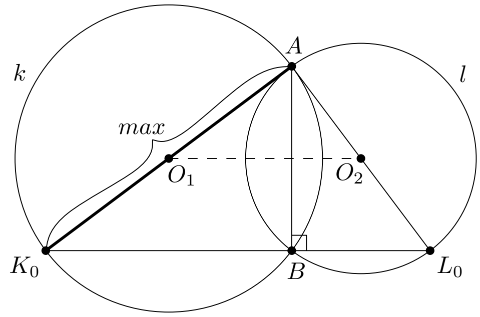
$$\begin{aligned}2\cdot|\sphericalangle AXB| &= 2\cdot(|\sphericalangle AXO|+|\sphericalangle OXB|) = |\sphericalangle OAX|+|\sphericalangle AXB|+|\sphericalangle XBO| = \\ &= 180^\circ - |\sphericalangle OBA| - |\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle AOB|,\end{aligned}$$

kde v posledních dvou rovnostech jsme využili toho, že součet vnitřních úhlů v trojúhelnících ABX a ABO je roven 180°. Věta je dokázána. □

Příklad. Kružnice k, l se středy O_1, O_2 se protínají v bodech A, B. Bodem B vedeme přímku p která protne kružnice k, l podruhé v bodech K, L. Pro kterou volbu přímky p je délka úsečky KL největší možná?

Řešení. Spojme body K, L s bodem A.





Pro libovolný bod K na kružnici k je velikost úhlu AKB díky předchozí větě konstantní. Podobně je konstantní velikost úhlu ALB. Všechny možné trojúhelníky AKL jsou si tak podobné. Délka úsečky KL je proto největší právě tehdy, když jsou největší zbylé dvě strany trojúhelníka AKL. To se stane, budou-li úsečky AK_0, AL_0 průměry kružnic k, l. Zbývá si rozmyslet, zda je tato situace přípustná (tj. zda body K_0, B, L_0 leží v přímce). Z Thaletovy věty máme okamžitě $|\sphericalangle K_0BL_0| = |\sphericalangle K_0BA| + |\sphericalangle ABL_0| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, takže tato situace opravdu přípustná je.

Jaké volbě přímky p odpovídá možnost K_0, L_0? Jelikož K_0L_0 i O_1O_2 jsou kolmé na AB, je délka úsečky KL maximální, pokud je p rovnoběžná s O_1O_2. □

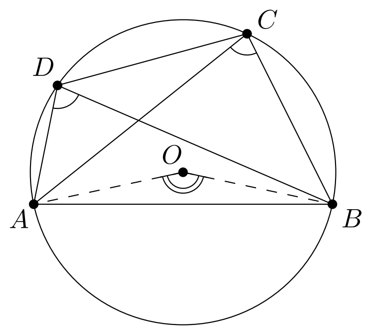
Pro zjednodušení formulací si teď zaveďme určitou terminologii. Řekneme, že čtyřúhelník je *tětivový*, jestliže mu lze opsat kružnici. Podobně řekneme, že čtyřúhelník je *tečnový*, jestliže mu lze kružnici vepsat. Díky předchozí větě můžeme velice jednoduše charakterizovat tětivové čtyřúhelníky.

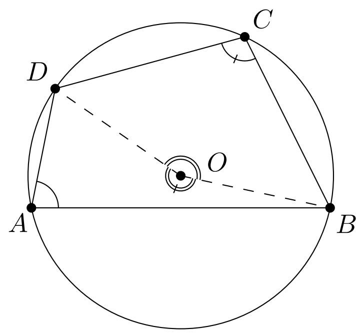
Tvrzení. (Charakterizace tětivových čtyřúhelníků)

(i) *Jestliže je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový, pak každá jeho strana je vidět ze zbylých dvou vrcholů pod stejnými úhly a každá jeho úhlopříčka je vidět ze zbylých dvou vrcholů pod úhly, jejichž součet je 180°.*

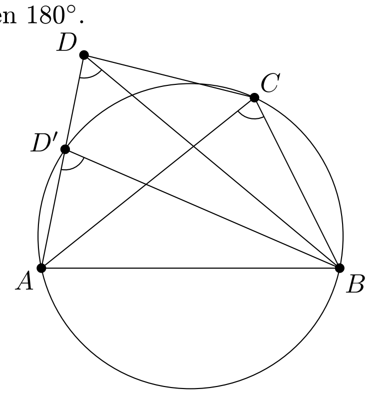
(ii) *Jestliže je některá strana čtyřúhelníka $ABCD$ vidět ze zbylých dvou vrcholů pod stejným úhlem, je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.*

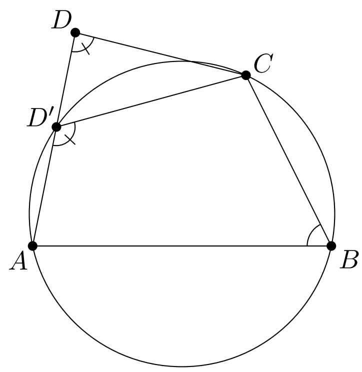
(iii) *Jestliže je některá úhlopříčka čtyřúhelníka $ABCD$ vidět ze zbylých dvou vrcholů pod úhly, jejichž součet je 180°, je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.*





Důkaz. Pro důkaz bodu (i) označme O střed kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$. Podle věty o obvodových úhlech platí $|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle ADB|$ a podobně dokážeme ostatní tři rovnosti. Dále jelikož součet úhlů sevřených úsečkami OB, OD je roven 360°, je součet příslušných obvodových úhlů poloviční, tj. roven 180°.





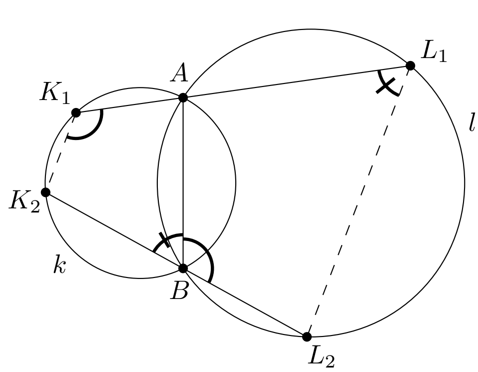
Část (ii) dokažme sporem s využitím již dokázané části (i). Předpokládejme, že ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$ a označme D' druhý průsečík přímky AD a kružnice opsané trojúhelníku ABC. Pak díky (i) máme $|\sphericalangle AD'B| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, takže přímky DB a $D'B$ jsou rovnoběžné, tedy totožné, bod D' splývá s bodem D a čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

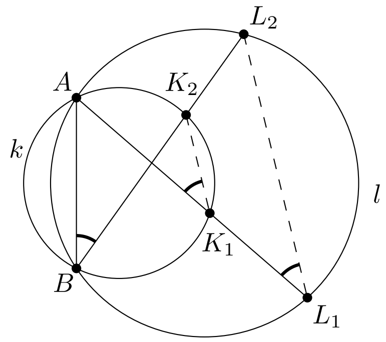
Třetí část se dokáže obdobně jako část druhá (viz obrázek). □

Toto jednoduché tvrzení má nesmírně široké uplatnění v úlohách. Následující tři příklady nevyžadují nic jiného než dovedné manipulování s velikostmi různých úhlů.

Příklad. (O „svázaných“ kružnicích) Kružnice k, l se protínají v bodech A, B. Přímka vedená bodem A protne kružnice k, l po řadě v bodech K_1, L_1. Přímka vedená bodem B protne kružnice k, l po řadě v bodech K_2, L_2. Ukažte, že $K_1K_2 \parallel L_1L_2$.

Řešení. Rozlišíme dva případy odpovídající následujícím obrázkům.



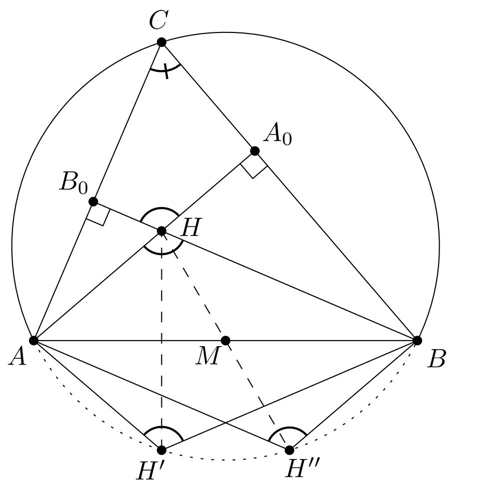


V prvním z nich máme $|\sphericalangle AK_1K_2| = 180° - |\sphericalangle K_2BA| = |\sphericalangle ABL_2| = 180° - |\sphericalangle L_2L_1A|$, takže skutečně $K_1K_2 \parallel L_1L_2$.

Ve druhém případě máme $|\sphericalangle AK_1K_2| = |\sphericalangle ABK_2| = |\sphericalangle ABL_2| = |\sphericalangle AL_1L_2|$ a jsme hotovi také. $\square$

Příklad. (obrazy ortocentra) Je dán trojúhelník ABC s ortocentrem[1] H. Ukažte, že obrazy bodu H v osových souměrnostech podle stran padnou na kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Zároveň ukažte, že obrazy bodu H ve středové souměrnosti podle středů stran trojúhelníka ABC padnou na jeho kružnici opsanou rovněž.

Řešení.



Tvrzení zřejmě stačí dokázat pro obrazy přes jednu ze stran trojúhelníka ABC.

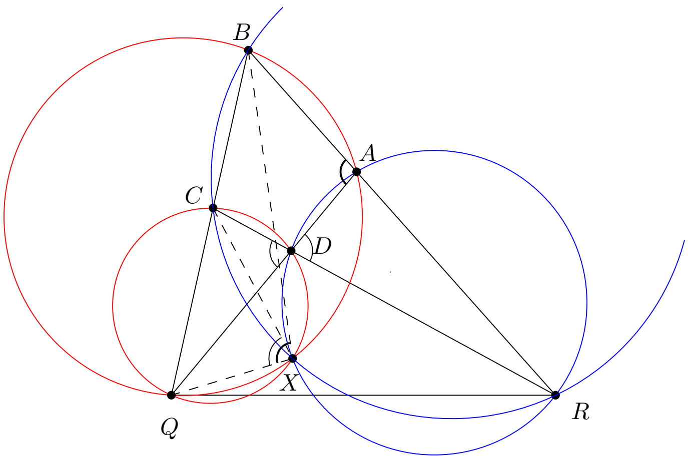
Označíme-li obrazy ortocentra podle strany AB, resp. jejího středu postupně H', H'', stačí dokázat, že čtyřúhelníky $AH'BC$ a $AH''BC$ jsou tětivové. Jelikož trojúhelníky $AH'B$, resp. $BH''A$ jsou díky symetrii (osové, resp. středové) shodné s trojúhelníkem AHB, stačí dokázat, že $|\sphericalangle AHB| + |\sphericalangle ACB| = 180°$.

To je však zřejmé z pohledu na čtyřúhelník CB_0HA_0, kde A_0, B_0 značí po řadě paty kolmic z vrcholů A, B na strany trojúhelníka ABC. Tento čtyřúhelník má totiž dva úhly pravé. $\square$

Příklad. (Miquelův bod čtyřúhelníka) Je dán čtyřúhelník $ABCD$, jehož žádné dvě protější strany nejsou rovnoběžné. Označme Q průsečík polopřímek AD a BC a R průsečík polopřímek BA a CD. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABQ, CDQ, ADR a BCR procházejí všechny jedním bodem.

Tento bod se nazývá *Miquelův bod* čtyřúhelníka $ABCD$.

[1] Ortocentrum je průsečík výšek.



Řešení. Označme X druhý průsečík (červených) kružnic opsaných trojúhelníkům ABQ a CDQ. Stačí ukázat, že X leží i na zbývajících dvou (modrých) kružnicích, čili že čtyřúhelníky $BCXR$ a $ADXR$ jsou tětivové. Pišme

$$|\sphericalangle CXB| = |\sphericalangle QXB| - |\sphericalangle QXC| = |\sphericalangle QAB| - |\sphericalangle QDC| =$$
$$= (180^\circ - |\sphericalangle RAD|) - |\sphericalangle ADR| = |\sphericalangle CRB|,$$

takže čtyřúhelník $BCXR$ je skutečně tětivový (jeho strana BC je ze zbývajících dvou vrcholů vidět pod stejným úhlem). Podobně ukážeme i

$$|\sphericalangle AXD| = |\sphericalangle AXQ| - |\sphericalangle DXQ| = (180^\circ - |\sphericalangle QBA|) - (180^\circ - |\sphericalangle QCD|) =$$
$$= |\sphericalangle QCR| - |\sphericalangle QBR| = |\sphericalangle BRC| = |\sphericalangle ARD|$$

a jsme hotovi. □

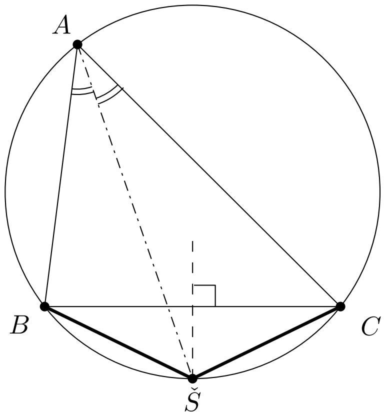
Cvičení 1. Je dán trojúhelník ABC a na jeho stranách AB, BC, CA postupně body M, K, L. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům LAM, KBM a KCL procházejí jedním bodem.

Cvičení 2. Dokažte, že v obrázku z posledního příkladu leží bod X na přímce QR právě tehdy, je-li $ABCD$ tětivový.

Švrčkův bod

Jelikož stejně dlouhým tětivám odpovídají stejně velké středové úhly, musejí jim díky větě o obvodovém úhlu odpovídat i stejně velké úhly obvodové. Důsledkem tohoto pozorování je následující tvrzení.

Tvrzení. (Švrčkův[2] bod) *Dán je trojúhelník ABC. Označme $Š$ střed toho oblouku BC kružnice mu opsané, který neobsahuje bod A. Pak $Š$ leží na ose strany BC i na ose vnitřního úhlu u vrcholu A.*



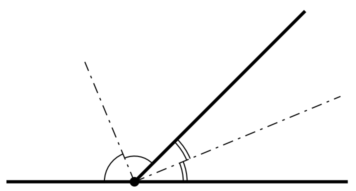
[2]Jaroslav Švrček je dlouholetý organizátor české MO a velký propagátor tohoto bodu.

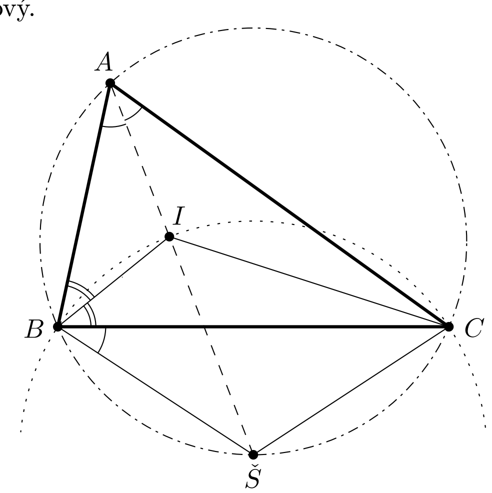
Důkaz. Jelikož $\check{S}$ je střed oblouku BC, je $|\check{S}B| = |\check{S}C|$, tedy $\check{S}$ skutečně leží na ose strany BC. Jelikož $|\check{S}B| = |\check{S}C|$, musejí obloukům $\check{S}B$ a $\check{S}C$ odpovídat stejně velké obvodové úhly. Tedy $\check{S}$ leží na ose vnitřního úhlu u vrcholu A. □

Švrčkův bod má řadu zajímavých vlastností, z nichž jednu si uvedeme v rámci následujícího příkladu.

Příklad. V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice vepsané a E střed kružnice připsané vzhledem k vrcholu A. Ukažte, že čtyřúhelník $BECI$ je tětivový a bod $\check{S}$ z výše zmíněného tvrzení je středem jeho kružnice opsané.

Řešení. Osy vnitřního a vnějšího úhlu jsou na sebe kolmé, takže ve čtyřúhelníku $BECI$ je $|\sphericalangle IBE| = |\sphericalangle ICE| = 90°$. Čtyřúhelník je proto skutečně tětivový.



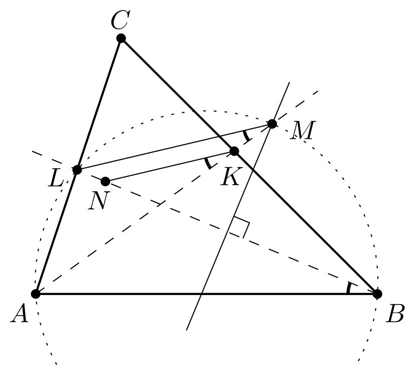


Stačí ukázat, že bod $\check{S}$ je středem kružnice opsané trojúhelníku BIC. Již víme, že $|\check{S}B| = |\check{S}C|$, takže ukážeme-li např. $|\check{S}B| = |\check{S}I|$, budeme hotovi. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka $BI\check{S}$ umíme vyjádřit pomocí velikostí vnitřních úhlů trojúhelníka ABC. Skutečně,

$$|\sphericalangle \check{S}BI| = |\sphericalangle \check{S}BC| + |\sphericalangle CBI| = |\sphericalangle \check{S}AC| + |\sphericalangle CBI| = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta,$$
$$|\sphericalangle BI\check{S}| = 180° - |\sphericalangle AIB| = |\sphericalangle BAI| + |\sphericalangle IBA| = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta.$$

□

Příklad. (JBMO 2010) Osy vnitřních úhlů u vrcholů A, B trojúhelníka ABC protnou protější strany po řadě v bodech K, L. Osa úsečky BL protíná přímku AK v bodě M. Bod N leží na přímce BL tak, že $KN \parallel ML$. Dokažte, že $|KN| = |NA|$.



Řešení. Bod M leží na ose vnitřního úhlu u vrcholu A a zároveň na ose strany BL, takže je to Švrčkův bod trojúhelníka ABL a čtyřúhelník $ABML$ je tak tětivový. Podobně jako v příkladu o svázaných kružnicích můžeme přenést úhly

$$|\sphericalangle NKA| = |\sphericalangle LMA| = |\sphericalangle LBA| = |\sphericalangle NBA|$$

a usoudit, že čtyřúhelník $ABKN$ je rovněž tětivový. Jelikož bod N leží na ose vnitřního úhlu u vrcholu B v trojúhelníku ABK a zároveň na kružnici trojúhelníku ABK opsané, je to střed oblouku AK (tj. Švrčkův bod), pročež leží i na ose strany AK a my máme kýžené $|KN| = |NA|$. □

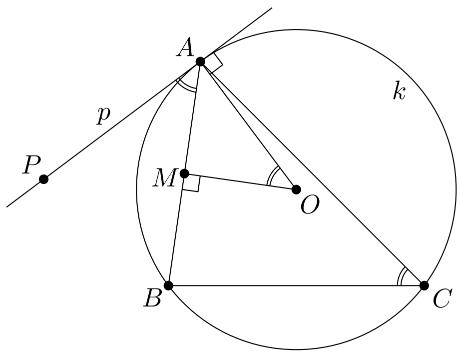
Cvičení 3. Osy vnitřních úhlu u vrcholů A, B, C trojúhelníka ABC protnou jeho kružnici opsanou k podruhé v bodech $\check{S}_a$, $\check{S}_b$, $\check{S}_c$. Označme I střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané. Ukažte, že I je ortocentrem trojúhelníka $\check{S}_a\check{S}_b\check{S}_c$.

Úsekové úhly

Již jsme viděli, že pomocí velikostí úhlů umíme charakterizovat leckteré geometrické konfigurace (rovnoběžné přímky, 4 body na kružnici, …). Další konfigurací, která je úhly snadno postižitelná, je kružnice s tečnou. Následující tvrzení podává tuto charakterizaci v ucelené podobě.

Tvrzení. (O úsekovém úhlu) *Je dán trojúhelník ABC a přímka p procházející vrcholem A. Na přímce p zvolme bod P tak, aby přímka AB oddělovala body P, C. Pak p je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ABC právě tehdy, když $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle BCA|$.*

Důkaz.



Jelikož tečna ke kružnici opsané trojúhelníku ABC v bodě A je jediná, stačí dokázat, že je u ní úhel o velikosti $|\sphericalangle BCA|$. K tomu stačí postupně počítat

$$|\sphericalangle BAP| = 90^\circ - |\sphericalangle OAB| = |\sphericalangle MOA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BOA| = |\sphericalangle BCA|$$

a jsme hotovi. □

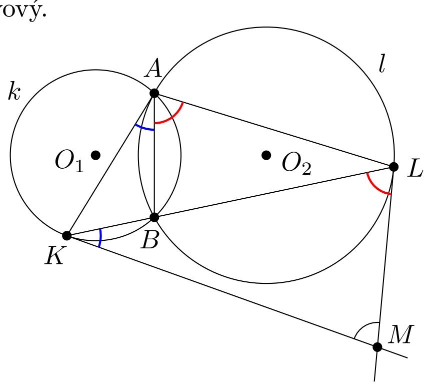
I toto tvrzení má široké uplatnění, vyřešme pomocí něj proto dva příklady.

Příklad. Kružnice k, l se středy O_1, O_2 se protínají v bodech A, B. Bodem B vedeme přímku p, která protne kružnice k, l podruhé v bodech K, L. Tečny ke kružnicím k, l vedené body K, L se protnou v bodě M. Ukažte, že body K, M, L, A leží na jedné kružnici.

Řešení. Dvojím použitím tvrzení o úsekovém úhlu dostáváme

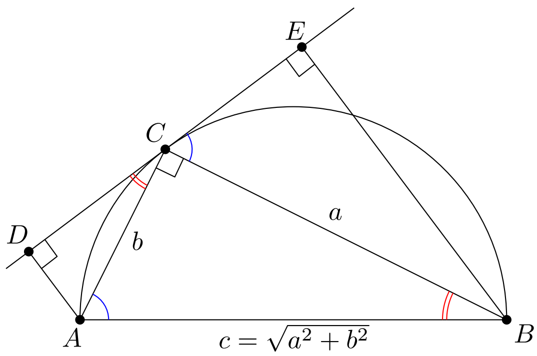
$$|\sphericalangle KML| = 180^\circ - |\sphericalangle MLK| - |\sphericalangle LKM| = 180^\circ - |\sphericalangle LAB| - |\sphericalangle BAK| = 180^\circ - |\sphericalangle LAK|,$$

takže čtyřúhelník $KMLA$ je tětivový. □



Příklad. (MO 58–C–I–2) Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC.

Řešení.



Z úsekových úhlů máme $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD|$ a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCE|$. Jelikož trojúhelníky ACD, ABC, CBE se dále shodují v pravém úhlu, jsou všechny podobné. Zbývá vyjádřit délky DC a CE. Označíme-li si a, b, c délky úseček BC, CA, AB, můžeme psát

$$|DC| = a \cdot \frac{b}{c}, \qquad |CE| = b \cdot \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad |DE| = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

Cvičení 4. (Brocardův bod trojúhelníka) Je dán trojúhelník ABC. Kružnice k_a se dotýká jeho strany AB v bodě A a prochází vrcholem C. Kružnice k_b, k_c jsou definovány obdobně. Ukažte, že kružnice k_a, k_b, k_c procházejí jedním bodem.

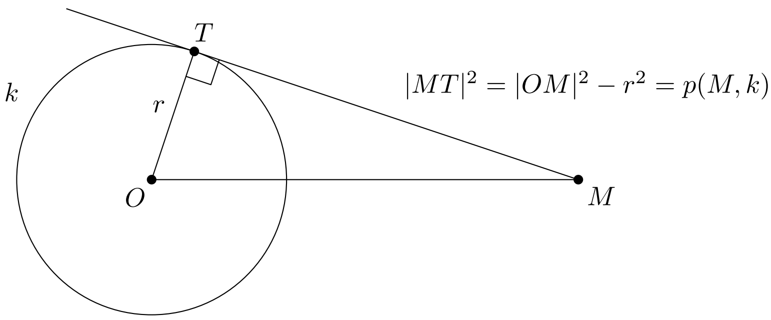
Tento bod se nazývá *1. Brocardův bod* trojúhelníka ABC.

Náš dosavadní arzenál nám dovoluje mnoha způsoby nakládat s úhly. V následujícím oddílu ho rozšíříme o techniku, která nám umožní zapojit do našich postupů i netriviální úvahy o délkách úseček.

Mocnost bodu ke kružnici

Definice. (Mocnost) *Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r. Mocností*[3] *bodu M ke kružnici k rozumíme číslo $p(M, k) = |OM|^2 - r^2$.*

Předchozí definice je velmi neprůhledná – není ani trochu zřetelné, proč by se kružnici a bodu mělo přiřadit číslo podle právě výše popsaného pravidla. Jistou geometrickou interpretaci může nabídnout to, že pro bod M vně kružnice k vyjadřuje číslo $p(M, k)$ druhou mocninu vzdálenosti bodu M od bodu T, což je bod, v němž se kružnice k dotýká tečna k ní vedená bodem M. Uveďme však vlastnosti mocnosti popořádku.



[3]Značení písmenem p pochází z anglického termínu *power of a point*.

Základní vlastnosti

Nechť M je bod a $k(O;r)$ kružnice.

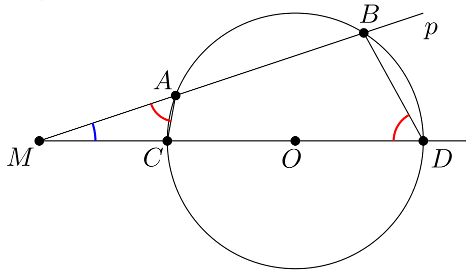
(i) Číslo $p(M,k)$ je nulové právě tehdy, když bod M leží na kružnici k. Číslo $p(M,k)$ je kladné/záporné právě tehdy, když M leží vně/uvnitř kružnice k.

(ii) Buď N další bod. Je-li $p(M,k) = p(N,k)$, pak $|OM| = |ON|$.

(iii) Pokud M leží vně k, označme T ten bod kružnice k, pro který je přímka MT ke kružnici k tečnou. Pak platí $p(M,k) = |MT|^2$.

(iv) (zásadní!) Nechť přímka p vedená bodem M protne k v bodech A, B. Pak $MA \cdot MB = p(M,k)$, kde úsečky MA, MB nahlížíme jako orientované.

Poslední z uvedených vlastností je pro mocnost klíčová, a proto načrtněme její zdůvodnění.



Označme C, D průsečíky přímky MO a kružnice k. Našim cílem je ukázat, že $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$, neboť pravá strana je rovna $(|MO|+r)(|MO|-r) = |MO|^2 - r^2 = p(M,k)$.

Zaměřme se na trojúhelníky MAC a MDB. Ty jsou díky tětivovosti $ABCD$ podobné podle věty *uu*. Z této podobnosti již plyne

$$\frac{|MA|}{|MC|} = \frac{|MD|}{|MB|}$$

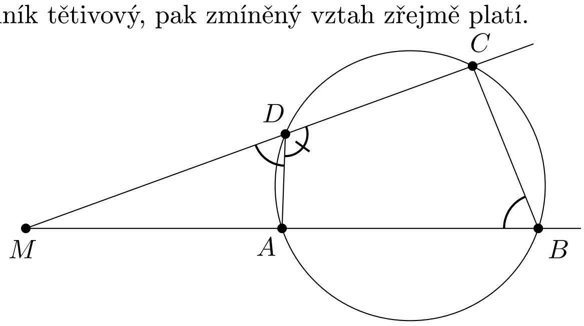
a zbývá roznásobit. □

Než pokročíme k samotným příkladům na mocnost, povšimněme si ještě, že tato zásadní vlastnost mocnosti nám skýtá další kritérium pro tětivovost čtyřúhelníka. Skutečně, jejím přímým použitím získáme následující

Tvrzení. *Buď $ABCD$ čtyřúhelník a předpokládejme, že polopřímky BA a CD se protnou v bodě M. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když*

$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|.$$

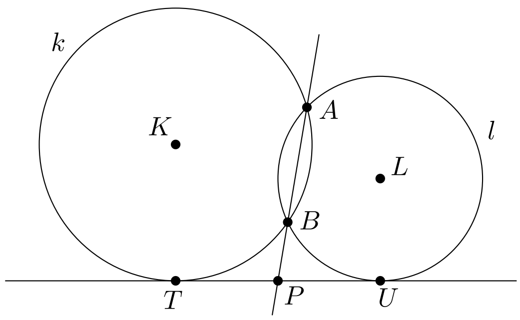
Důkaz. Pokud je čtyřúhelník tětivový, pak zmíněný vztah zřejmě platí.



Naopak, platí-li $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$, pak jsou trojúhelníky MDA a MBC podobné podle věty *sus*, takže $|\sphericalangle MDA| = |\sphericalangle MBC|$ a čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, jelikož součet jeho dvou protějších úhlů je 180°. □

A nyní již konečně ke slibovaným příkladům. Ve druhém z nich si vzpomeneme i na úsekové úhly.

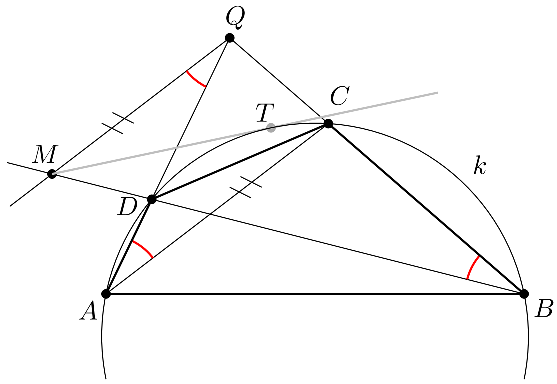
Příklad. Kružnice k, l se středy K, L se protínají v bodech A, B. Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l, která se jich dotýká v bodech T, U, v bodě P. Ukažte, že $|PT| = |PU|$.



Řešení. Z mocnosti bodu P ke kružnici k máme $|PT|^2 = |PB| \cdot |PA|$. Podobně z mocnosti bodu P ke kružnici l máme $|PB| \cdot |PA| = |PU|^2$. Porovnáním a odmocněním dostáváme výsledek. □

Příklad. (PraSe 2005) Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q. Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedené bodem Q. Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k. Dokažte, že $|MT| = |MQ|$.

Řešení. Z mocnosti bodu M ke kružnici opsané čtyřúhelníku $ABCD$ plyne $|MT|^2 = |MD| \cdot |MB|$. Úloha po nás tedy vlastně chce dokázat $|MQ|^2 = |MD| \cdot |MB|$ (všimněte si, že jsme se tím kompletně zbavili „umělého“ bodu T).



Teď si uvědomíme, že vztah $|MQ|^2 = |MD| \cdot |MB|$ je ekvivalentní tomu, že MQ je tečna kružnice opsané trojúhelníku DBQ (opět díky mocnosti). Pro vyřešení úlohy by tedy stačilo dokázat rovnost (potenciálního obvodového) úhlu DBQ a (potenciálního úsekového) úhlu DQM.

To je však snadné, protože díky tětivovosti $ABCD$ a rovnoběžnosti přímek AC a MQ můžeme psát

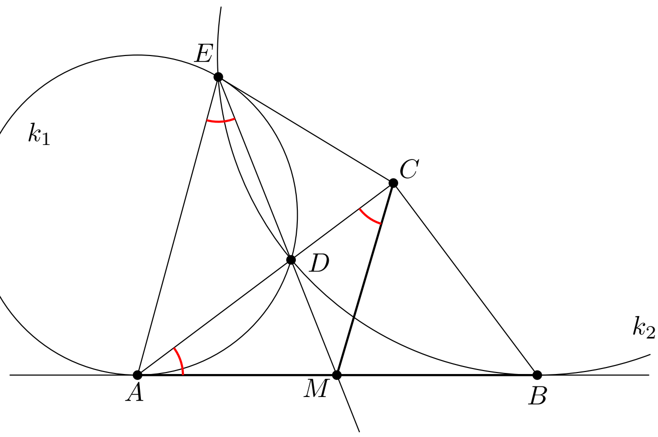
$$|\sphericalangle DBQ| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DQM|,$$

přesně jak bylo požadováno. □

Následující příklad shrnuje všechny dosud zmíněné techniky.

Příklad. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Na jeho odvěsně AC zvolme bod D. Nyní sestrojme kružnici k_1, která se dotýká AB v bodě A a prochází bodem D. Dále též kružnici k_2, která se dotýká AB v bodě B a též prochází bodem D. Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2. Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné.

Řešení. Označme M průsečík přímky ED a strany AB.



Podobně jako v prvním příkladě užitím mocnosti bodu M ke kružnicím k_1, k_2 dostáváme

$$|MA|^2 = p(M, k_1) = |MD| \cdot |ME| = p(M, k_2) = |MB|^2,$$

takže M je středem přepony AB pravoúhlého trojúhelníka ABC, a tedy také středem jeho kružnice opsané. Speciálně je trojúhelník AMC rovnoramenný a my máme $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACM|$.

Také ovšem díky úsekovému úhlu ke kružnici k_1 máme $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AEM|$, takže z bodů C a E je úsečka AM vidět pod stejným úhlem a čtyřúhelník $AMCE$ je tětivový. Proto je i $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle MEC| = |\sphericalangle MAC| = |\sphericalangle BAC|$. □

Cvičení 5. (MO 56–A–I–5) V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k.

Pokročme nyní dále ve studiu konceptu mocnosti bodu ke kružnici zadefinováním dalšího termínu.

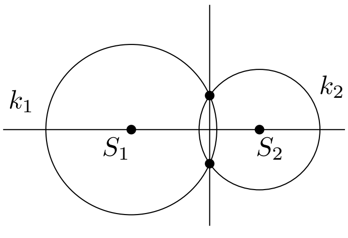
Chordály

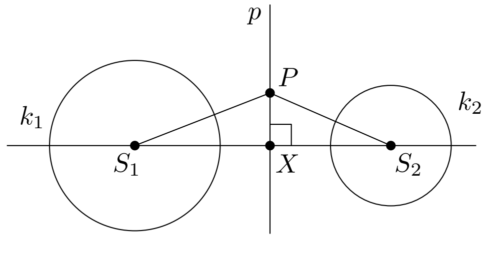
Definice. *Nechť k, l jsou kružnice. Množinu těch bodů X, pro které platí $p(X, k) = p(X, l)$, nazýváme chordálou kružnic k, l.*

Následující překvapivé tvrzení je široce uplatnitelné v mnoha úlohách. Jeho důkaz je bohužel poměrně technický. Pro používání samotného tvrzení však jeho znalost naštěstí není nezbytná.

Tvrzení. *Chordálou dvou nesoustředných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ je přímka kolmá na spojnici jejich středů. Pokud se navíc kružnice protínají, je to právě spojnice jejich průsečíků.*

Důkaz. Předpokládejme, že jsme našli nějaký bod P, který má stejnou mocnost k oběma kružnicím. Označme p kolmici vedenou bodem P na přímku S_1S_2 a X její průsečík s S_1S_2. Ukážeme nejdříve, že potom už každý bod přímky p má stejnou mocnost ke kružnicím k_1, k_2.





Skutečně, hodnota

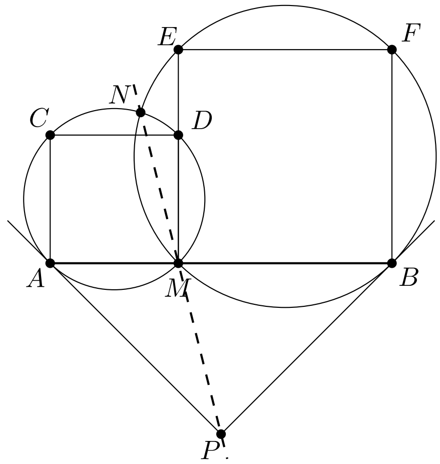
$$\begin{aligned} p(P, k_1) - p(P, k_2) &= (|PS_1|^2 - r_1^2) - (|PS_2|^2 - r_2^2) = (|PS_1|^2 - |PS_2|^2) - (r_1^2 - r_2^2) = \\ &= (|PX|^2 + |XS_1|^2 - |PX|^2 - |XS_2|^2) - (r_1^2 - r_2^2) = (|XS_1|^2 - |XS_2|^2) - (r_1^2 - r_2^2) \end{aligned}$$

nezávisí na poloze bodu P na přímce p. Je-li tedy pro jeden bod přímky p tato hodnota nula, je rovna nule pro všechny body. Stačí tedy dokázat, že na přímce S_1S_2 existuje právě jeden bod X, pro nějž je $p(X, k_1) = p(X, k_2)$, tj. pro nějž je $|XS_1|^2 - |XS_2|^2 = r_1^2 - r_2^2$. To je však snadné, neboť probíhá-li bod X přímku S_1S_2 „zleva doprava“, levá strana roste. Hodnoty $r_1^2 - r_2^2$ tak nabyde přesně jednou.

Pokud se kružnice protínají, mají oba jejich průsečíky k oběma kružnicím mocnost 0, takže oba na chordále leží. Jelikož výše jsme dokázali, že chordála je přímka, je to právě přímka spojující tyto dva průsečíky. □

Příklad. Na úsečce AB je dán bod M. Ve stejné polorovině určené přímkou AB zkonstruujme čtverce $ACDM$ a $MEFB$. Jejich opsané kružnice se podruhé protnou v bodě N. Ukažte, že přímka MN prochází pevným bodem nezávislým na volbě bodu M.

Řešení. Přímka MN je chordála kružnic opsaných čtvercům $ACDM$ a $MEFB$. Chceme tedy najít bod, který má k oběma kružnicím vždy stejnou mocnost.

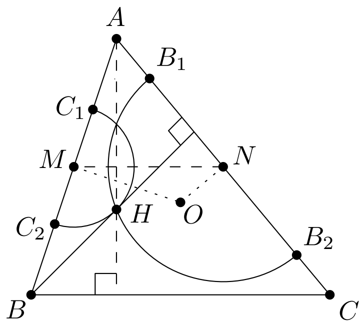


Zkonstruujme bod P tak, aby trojúhelník ABP byl rovnoramenný pravoúhlý se základnou AB a přímka AB oddělovala bod P a dva zadané čtverce.

Nezávisle na volbě bodu M je AP je tečna ke kružnici opsané čtverci $ACDM$ a podobně BP je tečna ke kružnici opsané čtverci $MEFB$ (úsekový úhel). Mocnost bodu P k oběma kružnicím je tedy rovna $|PA|^2 = |PB|^2$ a my jsme hotovi. □

Příklad. (IMO 2008, P1) Označme H ortocentrum ostroúhlého trojúhelníka ABC. Kružnice k_a se středem ve středu strany BC procházející bodem H protíná stranu BC v bodech A_1, A_2. Body B_1, B_2, C_1, C_2 definujeme podobně. Ukažte, že body A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici.

Řešení. Označme středy stran AB, AC postupně M, N. Ukážeme nejdříve, že body B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici.



Spojnice středů kružnic k_b, k_c je střední příčka v trojúhelníku ABC, což je přímka rovnoběžná se stranou BC. Spojnice průsečíků těchto dvou kružnic tedy bude na BC kolmá. Jelikož obě kružnice k_b, k_c procházejí bodem H, leží jejich druhý průsečík na výšce z vrcholu A. Bod A proto leží na chordále kružnic k_b, k_c, takže má k oběma stejnou mocnost.

Z $|AC_1| \cdot |AC_2| = p(A, k_c) = p(A, k_b) = |AB_1| \cdot |AB_2|$ ovšem vyplývá, že body B_1, B_2, C_1, C_2 leží na jedné kružnici. Střed této kružnice najdeme jako průsečík os úseček B_1B_2, C_1C_2 – je jím tedy střed kružnice opsané trojúhelníku ABC (označme ho O).

Podobně ukážeme, že na jedné kružnici leží i body A_1, A_2, C_1, C_2. Tyto dvě kružnice mají totožný střed O i poloměr OC_1, takže jde o jednu jedinou kružnici a tvrzení úlohy je dokázáno. □

Cvičení 6. Je dán čtverec $ABCD$ a jeho střed S. Zkonstruujme kružnice k, l tak, že k prochází body

A, C, kružnice l prochází body B a D a navíc se k, l protínají v bodech P, Q. Ukažte, že body P, Q, S leží v přímce.

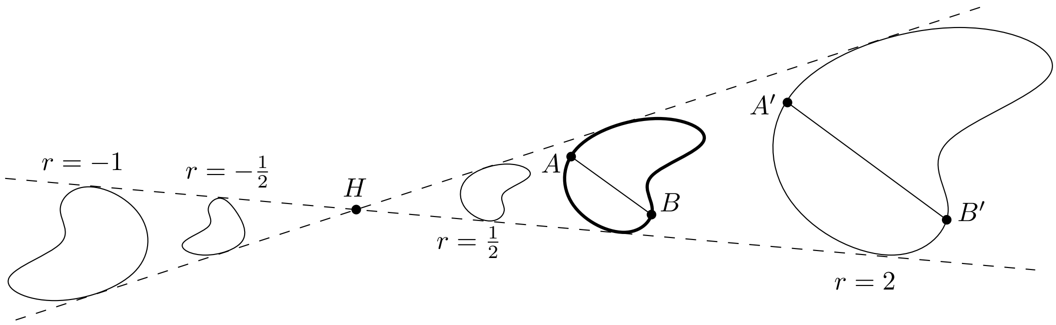
Stejnolehlost

Na konci tohoto kurzu se ještě dotkneme jednoho geometrického zobrazení, totiž stejnolehlosti.

Definice. *Stejnolehlost h je zobrazení*[4] *určené středem H a koeficientem r ($r \neq 0$, $r \neq 1$), které zobrazuje bod A na ten bod A' přímky HA, pro nějž*

$$\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = r.$$

Stejnolehlost se středem H a koeficientem r značíme $h(H, r)$.



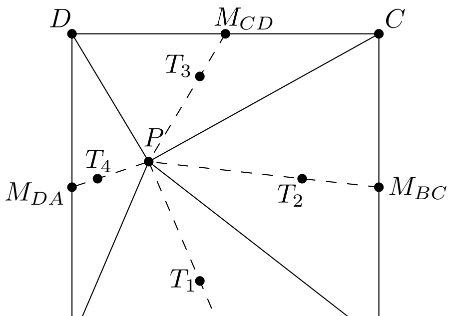
Šipek nad úsečkami se netřeba lekat – vyjadřují jen to, že je-li $r > 0$, polopřímky HA a HA' splývají, zatímco v opačném případě ($r < 0$) jsou k sobě navzájem opačné. Než se vrhneme na příklady, uveďme bez důkazu základní vlastnosti stejnolehlosti.

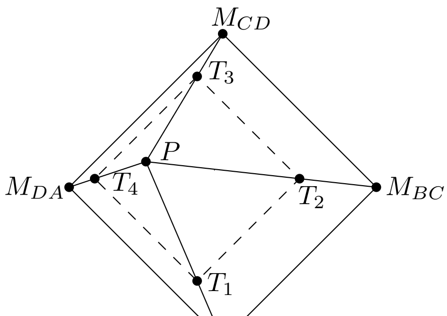
Vlastnosti stejnolehlosti

(i) Stejnolehlost s koeficientem -1 je středová souměrnost.
(ii) Stejnolehlost je podobné zobrazení (tj. pro každé dva body A, B platí $|A'B'| = r \cdot |AB|$).
(iii) Obrazem přímky ve stejnolehlosti je přímka s ní rovnoběžná.
(iv) Obrazem kružnice ve stejnolehlosti je kružnice.
(v) Pro dvě kružnice s různými poloměry existují dvě stejnolehlosti, které převádějí jednu na druhou. Jedna z nich má kladný koeficient, druhá záporný. Středy těchto stejnolehlostí lze najít jako průsečíky vnějších, resp. vnitřních společných tečen, pokud tyto existují.

Příklad. (Turnaj měst, 1984) Uvnitř čtverce $ABCD$ je dán bod P. Ukažte, že těžiště trojúhelníků APB, BPC, CPD, DPA tvoří čtverec.

Řešení.





Označme těžiště zmíněných trojúhelníků postupně T_1, T_2, T_3, T_4. Označme dále M_{AB}, M_{BC}, M_{CD}, M_{DA} středy stran AB, BC, CD, DA čtverce $ABCD$. Jelikož těžiště trojúhelníka leží vždy v jedné třetině

[4] Z anglického „homothety“.

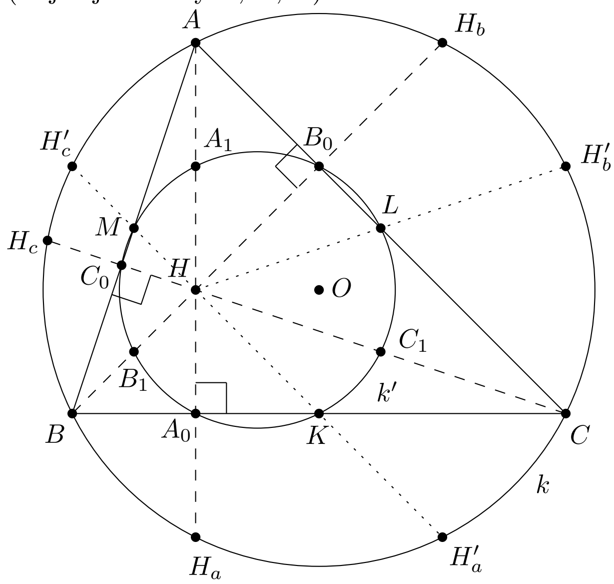
těžnice, stejnolehlost $h(P, \frac{2}{3})$ zobrazí středy stran čtverce $ABCD$ na příslušná těžiště. Středy stran čtverce $ABCD$ ale tvoří čtverec, proto i ona těžiště tvoří čtverec. $\square$

Přesvědčivou aplikací stejnolehlosti je následující slavné tvrzení z geometrie trojúhelníka.

Příklad. (Feuerbachova kružnice) Buď ABC trojúhelník a H jeho ortocentrum. Označme středy stran trojúhelníka ABC postupně K, L, M, jeho paty výšek A_0, B_0, C_0 a konečně středy úseček HA, BH, CH postupně A_1, B_1, C_1. Ukažte, že body K, L, M, A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1 leží na jedné kružnici.

Této kružnici se říká *Feuerbachova kružnice* (nebo též *kružnice devíti bodů*) trojúhelníka ABC.

Řešení. Uvažme kružnici k trojúhelníku ABC opsanou. Označme H_a, H_b, H_c obrazy ortocentra v osové souměrnosti podle příslušných stran a H'_a, H'_b, H'_c obrazy ve středové souměrnosti podle středů příslušných stran. Těchto šest obrazů (stejně jako body A, B, C) leží na kružnici k.

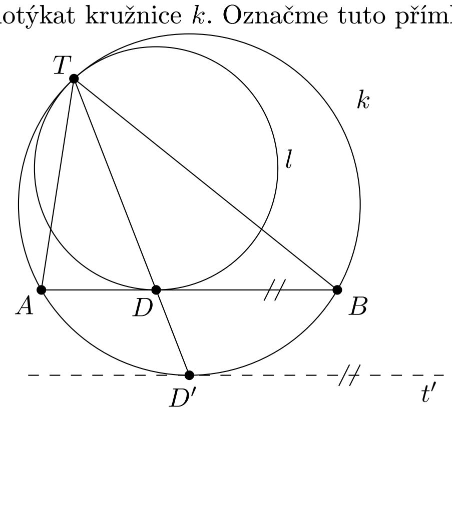


Uvažme stejnolehlost h se středem H a koeficientem $\frac{1}{2}$. V této stejnolehlosti se kružnice k zobrazí na kružnici (označme ji k') o polovičním poloměru. Body H_a, H_b, H_c se zobrazí na paty výšek trojúhelníka ABC, body H'_a, H'_b, H'_c na středy stran a konečně vrcholy ABC na středy spojnic HA, HB, HC. Všech těchto devět bodů leží na kružnici k' a my jsme hotovi. $\square$

Časté je užití stejnolehlosti v případech, kdy se v zadání vyskytují dvě dotýkající se kružnice. V takovém případě je užitečné zaměřit se na stejnolehlost se středem v příslušném bodě dotyku, která na sebe dvě dotýkající se kružnice převádí.

Příklad. (Lemma o ose úhlu) Kružnice k, l mají vnitřní dotyk v bodě T. Tětiva AB kružnice k se dotýká kružnice l v bodě D. Ukažte, že přímka TD je osa úhlu ATB.

Řešení. Uvažme stejnolehlost se středem T, která zobrazí l na k. Obrazem přímky AB bude přímka s AB rovnoběžná, která se bude dotýkat kružnice k. Označme tuto přímku t' a bod dotyku D'.



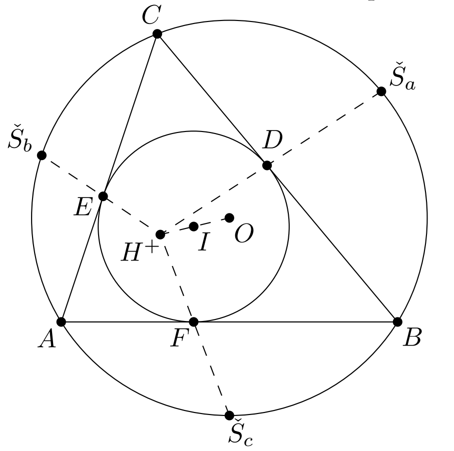
Jelikož D' je obraz bodu D ve stejnolehlosti se středem v T, leží body T, D, D' v přímce. Zbývá si povšimnout, že ze symetrie je bod D' středem oblouku AB kružnice k, takže je to Švrčkův bod trojúhelníka ABT. Jako takový leží mimo jiné na ose úhlu ATB, což jsme chtěli dokázat. □

Řešení předchozí úlohy se dá velmi dobře „vidět", pokud si bez újmy na obecnosti („búno") položíme tětivu AB vodorovně a bod T nad ni. Pak je totiž bod D na kružnici l „dole", takže i jeho obraz D' (průsečík TD a k) bude na své kružnici „dole". Jelikož jsou ale body A, B „stejně vysoko", bude D' středem oblouku AB, pročež bude přímka TDD' osou úhlu ATB.

Následující příklad využívá myšlenku bodů „dole" v nepatrně obecnější podobě.

Příklad. Označme $\check{S}_a$, $\check{S}_b$, $\check{S}_c$ středy kratších oblouků kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC a D, E, F po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB. Označme ještě O, resp. I střed kružnice opsané, resp. vepsané trojúhelníku ABC. Ukažte, že přímky $\check{S}_aD$, $\check{S}_bE$, $\check{S}_cF$ a OI procházejí jedním bodem.

Řešení. Položme stranu AB vodorovně. Pak F je bod „dole" na kružnici vepsané a bod $\check{S}_c$ je bod „dole" na kružnici opsané. Jejich spojnice proto prochází středem stejnolehlosti s kladným koeficientem, která zobrazuje kružnici vepsanou trojúhelníku ABC na kružnici mu opsanou (označme ho H^+).



Obdobně můžeme položit vodorovně kteroukoliv jinou stranu. Tím dostaneme, že přímky $\check{S}_aD$, $\check{S}_bE$, $\check{S}_cF$ všechny procházejí bodem H^+. Zbývá si uvědomit, že zmíněná stejnolehlost zobrazuje i střed kružnice vepsané na střed opsané, a tedy v přímce leží i H^+, I a O. □

Cvičení 7. (KMS 2011) Na kružnici k se středem O jsou vyznačeny dva poloměry OA, OB. Kružnice l se dotýká kružnice k v bodě Q a zmíněných poloměrů OA, OB postupně v bodech C, D. Určete velikost uhlu AQC.

Cvičení 8. (PraSe 2010) V téže polorovině určené přímkou p leží kružnice k, l, m, které se jí dotýkají v bodech K, L, M. Navíc se kružnice k, l dotýkají v bodě T a kružnice l, m v bodě U. Ukažte, že přímky KT, MU a kružnice l procházejí jedním bodem.

Literatura a zdroje

Čerpal jsem ze článku

M. Rolínek, J. Tkadlec: *The Š point*, **http://onlinemathcircle.com**

a dále z archivů různých národních i mezinárodních soutěží:

PraSe (Matematický korespondenční seminář): **mks.mff.cuni.cz**,
KMS (Korešpondenčný matematický seminár): **kms.sk**,
MO (Matematická olympiáda): **math.muni.cz/ rvmo**,
Turnaj měst (The Tournament of Towns): **http://www.math.toronto.edu/oz**,
JBMO (Junior Balkan Math Olympiad),
IMO (International Mathematical Olympiad): **http://www.artofproblemsolving.com**.

Návody ke cvičením

Cvičení 1. *Návod:* Označte průsečík kružnic opsaných např. trojúhelníkům LAM a KBM písmenem X a ukažte, že $KCLX$ je tětivový.

Cvičení 2. *Návod:* Rozdělte $|\sphericalangle PXQ|$ na součet dvou jiných úhlů a každý z nich pomocí tětivového čtyřúhelníka přeneste.

Cvičení 3. *Návod:* Ukažte, že $A\check{S}_a$ je kolmá na $\check{S}_b\check{S}_c$ (vyjádřete úhel mezi dvěma tětivami kružnice jako součet obvodových úhlů příslušných dvěma obloukům).

Cvičení 4. *Návod:* Protněte dvě kružnice a ukažte, že jejich průsečík leží na kružnici třetí. Užijte úsekové úhly.

Cvičení 5. *Návod:* Naměřte mocnost bodu S ke kružnici opsané libovolnému trojúhelníku ABC po dvou různých přímkách a vyvoďte, že všechny kružnice opsané procházejí kromě bodu A ještě jedním pevným bodem. Co to říká o jejich středech?

Cvičení 6. *Návod:* Přímka PQ je chordála kružnic k, l, stačí tedy ukázat, že S má k oběma kružnicím tutéž mocnost.

Cvičení 7. *Návod:* Použijte *Lemma o ose úhlu* nebo si uvědomte, že je-li A „vpravo“ a C na l „dole“, protne přímka QC kružnici k také „dole“ a čtvrtkružnici přísluší obvodový úhel $45°$.

Cvičení 8. *Návod:* Položte přímku p „vodorovně“ a ukažte, že přímky KT, MU obě protínají kružnici l v bodě „nahoře“.