Dirichletův princip neboli princip holubníku, invarianty a obarvení

Jan Vaňhara

Kurz vznikl v rámci projektu "Rozvoj systému vzdělávacích příležitostí pro nadané žáky a studenty v přírodních vědách a matematice s využitím online prostředí", Operační program Praha – Adaptabilita, registrační číslo CZ.2.17/3.1.00/31165.

Projekt A-NET je financován Evropským sociálním fondem, rozpočtem ČR a MHMP.

"Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti.

Dirichletův princip neboli princip holubníku, invarianty a obarvení

Jan Vaňhara

23. března 2011

V následujícím textu se budeme z velké části věnovat Dirichletově principu a poté uděláme základní náhled na invarianty a obarvení. Dirichletův princip je jednoduchý princip, který se využívá při řešení specifických typů úloh. Umožňuje získat základní abstraktní myšlení, které se pak dá využít právě při řešení invariantních či obarvovacích úloh. Invarianty neboli neměnky se objevují v řešeních založených na hledání neměnných součtů, rozdílů, parity či dalších vlastností za proměnlivé situace. Obarvování je jen případ invariantního způsobu řešení, kdy jistou neměnnou situaci nacházíme (či zdůrazňujeme) pomocí správného nabarvení objektu.

1 Dirichletův Princip

Následující tvrzení je základem pojmu důkazu pomocí Dirichletova Principu (Dále jen DP):

Tvrzení 1.1: *(základní DP)* Mějme $n + 1$ předmětů a n přihrádek. Pokud těchto $n + 1$ předmětů umístíme do daných přihrádek, pak aspoň v jedné budou nejméně dva předměty.

Důkaz: Předpokládejme, že v každé přihrádce bude nejvýše jeden předmět. Pak ve všech přihrádkách dohromady bude nejvýše n předmětů, což je spor, protože rozmísťovaných předmětů bylo $n + 1$.

Toto tvrzení má několik zobecnění, která se dají dobře uplatnit:

Tvrzení 1.2: *(obecný DP)* Mějme $kn + 1$ věcí a n přihrádek. Pokud těchto $kn + 1$ věcí umístíme do daných přihrádek, pak aspoň v jedné bude nejméně $k + 1$ předmětů.

Tvrzení 1.3: *(nekonečný DP)* Mějme nekonečnou množinu. Pokud tuto množinu rozdělíme na konečně mnoho částí, pak bude aspoň jedna z těchto částí nekonečná.

Nakonec přidám ještě jednu variantu DP zvanou jako Fubiniho princip. Je to tvrzení zřejmější než DP, ale také se občas hodí jej znát.

Tvrzení 1.4: *(Fubiniho věta)* Mějme n přihrádek, ve kterých je průměrně a předmětů. Pak existuje přihrádka, ve které je nejvýše a předmětů, a existuje přihrádka, ve které je nejméně a předmětů.

Jak jste si všimli, jsou toto velice jednoduchá až banální tvrzení. O to těžší je ve většině příkladů zjistit, co jsou přihrádky a co jsou věci, které do nich chcete umístit. Dokonce je i někdy velice těžké určit, že se jedná o problém řešitelný pomocí DP. Zkuste se podívat na příklady na dalších stranách – ač to tak mnohdy na první pohled nevypadá, všechny se týkají DP. Někdy je problém velmi obtížný, když je řešený jinými metodami, ale za pomoci DP se jedná o lehký příklad. Pan Dirichlet jej využíval v teorii čísel, ukázal pomocí něj například, že se ke každému reálnému číslu dá libovolně přiblížit zlomkem, a odhadl i jak přesně. Ale to není vše. Nejhlubší problémy kombinatoriky se týkají tzv. Ramseyových čísel. Ve zkratce se jedná o čísla vyjadřující minimální počet vrcholů grafu, ve kterém se dá najít úplný podgraf nebo naopak prázdný graf dané velikosti. Výzkum Ramseyových čísel je nyní značně pomalý, ale spousta důkazů je postavená na DP. Příklad **3.13** je malou ochutnávkou této problematiky. Když si tento příklad přepíšeme do řeči teorie grafů, tak hledáme v grafu velikosti šest úplný podgraf nebo prázdný podgraf velikosti tři.

1.1 Pár řešených příkladů

Příklad 1.5: *(Triviální)* a) Mějme 100 holubů a 99 holubníků. Nastane večer a všichni holubi zalezou do holubníků. Dokažte, že aspoň v jednom holubníku jsou aspoň dva holubi b) V osudí je 11 kuliček obarvených 5 barvami. Ukažte, že aspoň tři kuličky mají stejnou barvu.

Řešení: a) Vezměme si tvrzení 1.1. a za n zvolme 99. Přihrádkami zde budou holubníky a věcmi holubi. Pak podle tohoto tvrzení budou aspoň v jednom holubníku dva holubi.
b) Zde je číslo 11 viditelně větší než číslo 5, tak si pro důkaz toho příkladu vezmeme obecný DP. Za věci zvolíme kuličky, za přihrádky zvolíme barvy (pozor – abstrakce), za k zvolíme 2 a za n zvolíme 5. Pak podle tohoto tvrzení: je-li $kn+1 = 11$ věcí umístěno do $n = 5$ přihrádek, pak v jedné budou alespoň tři. A tedy aspoň tři kuličky budou mít stejnou barvu.

Příklad 1.6: Dokažte, že ať vybereme 101 libovolných přirozených čísel větších než 100, tak mezi nimi budou dvě, která mají stejné poslední dvě číslice dekadického zápisu.

Řešení: Zde je jasně vidět, který DP na řešení použijeme (základní), jen je důležité rozmyslet si, co jsou to přihrádky. Zde je ještě docela vidět, copak to bude – každá přihrádka bude vyjadřovat poslední dvě čísla dekadického zápisu. Tedy budeme mít přihrádky $00, 01, 02, 03, \ldots, 55, 56, 57, \ldots, 97, 98, 99$. Jak si všimnete, je těchto přihrádek právě 100. Předměty, které do nich budeme umisťovat, jsou přirozená čísla větší než 100. Těch máme k dispozici 101, a tedy dle DP budou alespoň v jedné přihrádce dvě čísla. A díky správné volbě přihrádkového systému budou obě tato čísla končit na stejné číslice.

Jak si všimnete, pokud dvě čísla končí na stejné dvě cifry, pak je jejich rozdíl dělitelný 100. Takže když budete mít za úkol dokázat, zda mezi $k+1$ čísly umíme najít dvě, jejichž rozdíl je dělitelný k, pak není jiné volby než DP. Nyní se podíváme na jeden příklad, který je zadáním velice podobný, ale přitom řešením úplně jiný.

Příklad 1.7: Mějme 11 čísel, jež mají neukončený dekadický zápis. Pak mezi nimi vždy najdeme dvě čísla a, b, pro něž platí, že $|a - b|$ má ukončený desetinný zápis nebo obsahuje nekonečně nul. Dokažte.

Poznámka: Ukončený, resp. neukončený desetinný zápis je vyjádření, že je desetinný rozvoj konečný, resp. nekonečný.

Řešení: Zde se použije DP na dvakrát. V jednom případě to bude základní DP a poté ještě aplikujeme nekonečný DP. Jak tedy na to? Nejprve si rozmysleme, co znamená, že má číslo ukončený desetinný zápis. To znamená, že číslo má v desetinném zápisu nějaké číslice a poté následují už jen nuly až do nekonečna. Tedy také obsahuje nekonečně nul. A tedy stačí dokázat, že dvě čísla z jedenácti budou mít na nekonečně pozicích v desetinném zápisu stejné číslice. Zde nejprve vezmeme základní DP s 10 přihrádkami a každá nám bude udávat, zda na určitém k-tém místě desetinného zápisu je $0, 1, 2, \ldots 8, 9$. Čísel je ale 11, takže dle DP budou pro každé k existovat dvě čísla a a b taková, že na k-tém místě desetinného rozvoje budou mít stejnou číslici. Nyní bychom měli ukázat, že nějaká dvě čísla mají stejné číslice na nekonečně mnoha místech desetinného rozvoje. Zde se bude hodit nekonečný „Dirichlet". Podívejme se nyní, kolik máme celkem dvojic čísel – je to $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$. Umisťujeme tedy nekonečně čísel k do 55 přihrádek. k nám zastupuje nějaké desetinné místo a řadíme jej do takové přihrádky označené a,b, která nám říká, že na místech, které jsou v přihrádce, je u čísla a i u čísla b stejná cifra (bez ohledu na to jaká). No a dle nekonečného DP umisťujeme nekonečně věcí do konečně přihrádek, a tak aspoň v jedné jich bude nekonečně. Rozdíl těchto dvou čísel bude tedy obsahovat nekonečně nul nebo bude konečný.

Příklad 1.8: (IMO 1972) Mějme 10 po dvou různých dvojciferných celých čísel. Dokažte, že potom umíme najít její dvě disjunktní neprázdné podmnožiny takové, že součet v obou podmnožinách je stejný.

Řešení: Vidíme, že máme spoustu možností výběru, kolik podmnožin z dané desetiprvkové množiny čísel vytvořit. Je jich $2^{10} - 1$. To by mohly být dobré přihrádky. Jenže já vás zklamu. Budou to věci umísťované do nějakých přihrádek. Zde se nám totiž jedná o nalezení dvou množin se stejným součtem a budeme tedy podmnožiny umísťovat do přihrádek nadepsaných součtem. Teď, ale nastává důležitá otázka, zda budeme mít dostatečně málo přihrádek. Jelikož je to 10 dvojciferných čísel, pak bude součet nejvýše $99 \times 10 = 990$, tedy bude 990 přihrádek nadepsaných součtem dané podmnožiny. Dle základního DP budou v aspoň jedné přihrádce dvě množiny, tedy jistojistě dvě podmnožiny dané desetiprvkové množiny budou mít stejný součet. Pokud jsou disjunktní, tak máme vyhráno. Pokud nejsou, tak nám stačí odebrat stejná čísla z jedné i z druhé a tím z nich disjunktní podmnožiny udělat. Tady je ještě nutné vypíchnout, že nikdy odebráním těchto čísel nedostaneme prázdnou množinu, protože prvky množin jsou kladná celá čísla, a tedy nemůžeme množinu a její podmnožinu dostat ve stejné přihrádce. Ale to bylo jediné úskalí, takže nyní máme požadované disjunktní podmnožiny o stejném součtu.

1.2 Několik hintově řešených příkladů

Příklad 2.1: Mějme n ne nutně různých přirozených čísel. Dokažte, že potom součet nějaké jejich podmnožiny je dělitelný n.

Řešení: Tento příklad je podobný příkladu 1.7., avšak zde požadujeme jinou podmínku na závěr a podle ní se také změní přihrádkový systém. Úloha je docela široká, takže může existovat více výběrů pro DP. My použijeme tento: Vezměme si těchto n čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ a vytvořme z nich n součtů takto: $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Když vám nyní prozradím, že si vezmeme tyto součty modulo n, tak na řešení už snadno přijdete.

Příklad 2.2: Mějme množinu přirozených čísel od 1 do $2n$. Dokažte, že libovolná její podmnožina o alespoň $n+1$ prvcích obsahuje dvě čísla, z nichž jedno dělí druhé.

Řešení: Zde máme předměty už napevno určené – jedná se o oněch (alespoň) $n+1$ předmětů. Nyní chceme nějak přijít na vhodný přihrádkový systém tak, aby nám nějaká dvě čísla skončila v jedné přihrádce, pokud jedno dělí druhé. Nápovědou vám budiž to, že každé číslo m se dá jednoznačně napsat ve tvaru $m = 2^c k$, kde c je nějaké nezáporné celé číslo a k je liché přirozené. No a lichých čísel od 1 do $2n$ je právě n.

Příklad 2.3: Hrací plán „Člověče nezlob se" je tvořen 36 políčky. Kolik nejméně políček musíme obsadit figurkami, abychom mohli nějakou figurkou vykopnout jinou při libovolném hodu kostkou a libovolném rozmístění figurek.

Řešení: Tato úloha bude spočívat v tom, že najdeme vhodný počet a rozmístění figurek tak, aby to ještě nešlo, a poté ukážeme, že pro o jednu figurku víc už to vždy půjde. Rozmístění najdete snadno a počet také (je to 18). Jak ale ukázat, že pro 19 to již nepůjde? Jednoduše – představme si, že na kostce hodíme nějaké k. Nyní máme na 19 políčcích figurky. Kdybychom všemi pohnuli o k políček, pak by nám těchto 19 figurek zabíralo dalších 19 políček. Tímto jsme téměř u konce. Teď si stačí rozmyslet, co budou přihrádky, co všechno budou předměty a proč to všechno funguje.

Příklad 2.4: *(vandalský)* Do mřížky 4x4 chceme vysadit několik stromů. Víme, že přijdou vandalové a stromy ve dvou sloupcích a ve dvou řádcích pokácí. Kolik nejméně stromů musíme vysadit, abychom jistě věděli, že po útoku vandalů zůstane alespoň jeden strom stát?

Řešení: Zde je postup z jistého pohledu opačný. V předchozím příkladu jsme ukazovali, že pro 18 něco nelze a pro 19 vždy lze. Zde pro nějaké k dokážeme pomocí trochu komplikovanějšího DP, že nelze najít vhodné rozmístění a pak pro $k+1$ dokážeme nalezením vhodného tvaru, že to vandalům nepomůže.

Nyní si ještě vyzkoušíme DP aplikovaný na geometrii:

Příklad 2.5: (MO A 2010) Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.

Řešení: Geometrické příklady na dirichletův princip se poznají snadno – jedná se v nich sice o geometrické útvary, ale zní „tak trochu kombinatoricky". Většinou také víme, co budou předměty umísťované do přihrádek – zde jsou to střely v terči. Možná vám intuice dokonce napovídá, že přihrádky vzniknou rozdělením daného geometrického objektu – zde kruhu, což je také pravda. Největším problémem bývá v tomto případě nalezení toho pokrytí či rozdělení. K tomuto příkladu poznamenám, že by mohlo pomoci rozdělit kruh na menší kruh a mezikruží a tyto útvary pak vhodně rozdělit.

Příklad 2.6: Dovnitř čtverce o obsahu 5 umístíme 9 koberců. Každý z nich má obsah 1. Dokažte, že potom nutně existují dva koberce, které se překrývají alespoň $\frac{1}{9}$ obsahu.

Řešení: Zde se nebude používat přímo DP, ale úvahy zde budou podobné. Koberce budeme umisťovat postupně a nově přidaný vždy překryjeme s již umístěnými koberci největší možnou plochou a obsahy, které koberce při přidání nově zaberou, sečteme. A to už by mohlo stačit k vyřešení úlohy.

1.3 Příklady

1.3.1 Jednoduché

Příklad 3.1: Mezi jakýmikoliv třemi osobami jsou vždy dvě stejného pohlaví

Příklad 3.2: V Praze žije aspoň 5 osob se stejným počtem vlasů na hlavě. (Člověk má na hlavě až 300000 vlasů a obyvatelů Prahy je přes 1210000.)

Příklad 3.3: a) Mějme terč tvaru rovnostranného trojúhelníku a trefme jej 5 zásahy. Dokažte, že existují dva zásahy, kterou jsou si blíž než polovina délky strany daného trojúhelníka.
b) Pokud bychom stříleli 17-krát, ukažte, že by jejich vzdálenost byla nejvýše $\frac{1}{4}$ délky strany trojúhelníka.

1.3.2 Mírná obtížnost

Příklad 3.4: Po čtvercovém stole 1×1 m leze 51 much. Dokažte, že když na stůl položíme dnem vzhůru hrnec o poloměru $1/7$ m, chytíme alespoň 3 mouchy.

Příklad 3.5: Z každých 12 různých dvouciferných čísel umíme vždy vybrat dvě tak, že se jejich rozdíl dá napsat ve formě dvouciferného čísla s oběma ciframi stejnými.

Příklad 3.6: Mějme n lidí v místnosti. Dokažte, že zde dva lidé mají stejný počet známých.

Příklad 3.7: Těchto n lidí si navzájem začne třást rukama. Ukažte, že jsou v každou chvíli v místnosti dva, kteří si potřásli rukama se stejným počtem osob.

Příklad 3.8: Berme Fibonacciho posloupnost $\bmod 10$. Ukažte, že tato posloupnost je periodická bez předperiody.

Příklad 3.9: Najděte co nejdelší aritmetickou posloupnost prvočísel s diferencí 60.

Příklad 3.10: a) Uvažme v rovině 5 mřížových bodů (tj. bodů s celočíselnými souřadnicemi) a mezi každými dvěma udělejme spojnici. Ukažte, že alespoň jedna ze spojnic prochází jiným mřížovým bodem než svými krajními.
b) Kolik bodů potřebujeme, aby tvrzení platilo, pokud bychom měli prostorovou mřížku?

Příklad 3.11: Opět si vezměme Fibonacciho posloupnost. Ukažte, že pro každé přirozené n existuje číslo v této posloupnosti dělitelné 10^n.

Příklad 3.12: Na šachovnici je 33 věží. Ukažte, že z nich umíme vždy vybrat 5 tak, že se navzájem neohrožují.

Příklad 3.13: Ukažte, že mezi jakýmikoliv 6 osobami umíme najít tři, z nichž žádné dvě se neznají, anebo tři, které se navzájem znají.

Příklad 3.14: Mějme šachovou soutěž, kde každý hraje s každým. Ukažte, že po každém kole, budou vždy existovat dva hráči se stejným počtem odehraných zápasů.

Příklad 3.15: Ukažte, že když vezmeme 20 přirozených čísel menších než 70 a každým dvěma uděláme rozdíl, pak v každém případě dostaneme aspoň 4 stejné rozdíly.

Příklad 3.16: V jednotkovém čtverci leží 101 bodů. Zjistěte, zda musí existovat kruh o poloměru $\frac{1}{7}$, v němž leží aspoň 5 daných bodů.

Příklad 3.17: Mějme krychli $7 \times 7 \times 7$ a v ní umístěných 342 bodů. Můžeme do ní umístit krychličku o hraně jedna tak, že v ní leží aspoň 2 body?

Příklad 3.18: Z každých 52 celých čísel umíme vybrat dvě taková, že jejich rozdíl či součet je dělitelný 100. Dokažte.

Příklad 3.19: Mějme celá čísla a, b, c, d. Ukažte, že součin čísel $a-b, b-c, c-d, d-a, a-c, b-d$ je dělitelný 12.

Příklad 3.20: Nechť a je kladné reálné číslo a n je přirozené číslo. Dokažte, že alespoň jedno z čísel $a, 2a, \ldots, (n-1)a$ má od nějakého celého čísla vzdálenost menší než $\frac{1}{n}$.

1.3.3 Obtížné

Příklad 3.21: Mezi libovolnými osmi složenými čísly menšími než 360 existují vždy dvě soudělná. Dokažte.

Příklad 3.22: Město New York je tvořeno 151 severojižními a 151 východozápadními ulicemi, které mají každá délku 100 metrů. V ulicích města je umístěno 11401 telefonních budek. Ukažte, že vždy existují dvě, které jsou od sebe vzdáleny méně než 200 metrů chůze po ulici.

Příklad 3.23: Ukažte, že pokud je n nesoudělné s 5 a 2, pak nějaká mocnina n končí na k nul a jednu jedničku na konci.

Příklad 3.24: Nechť n je nesoudělné s 2 a 5. Ukažte, že potom existuje násobek n, jehož desítkový zápis se skládá jen z jedniček.

Příklad 3.25: Mějme posloupnost délky $n \geq 5$. Ukažte, že z ní můžeme vybrat podposloupnost a ke každému číslu přiřadit znaménko $+$ nebo $-$ tak, aby byl výsledek dělitelný n^2.

Příklad 3.26: (a) Ukažte, že mezi libovolnými 6 body obdélníka 3×4 můžeme vždy najít dva, jejichž vzdálenost je menší než $\sqrt{5}$.
(b) Ukažte, že vezmeme-li místo obdélníka plášť válce o obvodu 3 a výšce 4, bude předchozí tvrzení platit i pro libovolných 5 bodů.

Příklad 3.27: Obarvěme několik částí intervalu $(0, 10)$ tak, že rozdíl mezi libovolnými dvěma obarvenými body není 1. Ukažte, že potom součet délek obarvených intervalů je maximálně 5.

Příklad 3.28: Mějme konvexní čtyřúhelník, jehož každá strana má délku menší než 24. Ukažte, že pak pro libovolný bod P uvnitř čtyřúhelníka je jeho vzdálenost k jednomu z vrcholů méně než 17.

Příklad 3.29: Mějme šachovnici 9×9 a umístěme do ní čísla 1 až 81. Ukažte, že pak existují dvě sousední políčka taková, že rozdíl čísel v nich umístěných je aspoň 6. Ukažte, že dokonce existují dvě dvojice takových sousedů.

1.3.4 Velice těžké

Příklad 3.30: Šachista se připravuje na turnaj, který se má odehrát za 77 dní. Během těchto 77 dní plánuje odehrát alespoň jednu partii denně, ale ne více než 132 her. Dokažte, že existuje řada po sobě jdoucích dnů, během kterých odehraje přesně 21 partií.

Příklad 3.31: Na konferenci přijelo 1978 vědců z 6 různých zemí. Byl vytvořen abecední seznam těchto vědců a podle něj dostal každý svoje pořadové číslo. Ukažte, že existují tři vědci ze stejné země takoví, že součet čísel dvou z nich dává číslo třetího.

Příklad 3.32: Mějme čísla od 1 do 9 a rozdělme je do dvou množin. Ukažte, že v jedné z nich jsou tři čísla tak, že jedno z nich je aritmetický průměr zbylých dvou.

Příklad 3.33: Dokažte, že mezi libovolnými 7 reálnými čísly existují dvě čísla a, b tak, že

$$0 \leq \frac{a-b}{1+ab} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Příklad 3.34: Mějme n přirozených čísel menších nebo rovných $2n$ takových, že nejmenší společný násobek libovolných dvou z nich je větší než $2n$. Dokažte, že nejmenší z nich je větší nebo rovno $\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor$.

Příklad 3.35: Mějme 70 kladných celých čísel menších než 201. Ukažte, že rozdíl nějakých dvou z nich bude 4,5 anebo 9.

Příklad 3.36: Na stole tvaru čtverce 1×1 metr je umístěno několik koláčků, které rozhodně nepřesahují přes stůl. Jejich celkový obvod je 10 metrů. Ukažte, že potom můžeme udělat přímý řez nožem a při tom protnout aspoň 4 koláčky.

Příklad 3.37: Během přednášky, na kterou se dostavilo pouze pět studentů, každý z těchto studentů dvakrát usnul. Pro každou dvojici těchto studentů existoval okamžik, kdy spali oba dva současně. Dokažte, že existoval okamžik, kdy spali alespoň tři studenti současně.

Příklad 3.38: Rozhodněte, pro která přirozená čísla n lze z rostoucí posloupnosti všech prvočísel vybrat několik bezprostředně po sobě následujících členů tak, že tyto napsané za sebou v desítkové soustavě (například 35711, 7111317 apod.) tvoří číslo, které je dělitelné n.

Příklad 3.39: Na seminář chodí 38 lidí. Každí dva lidé, kteří se neznají, mají společného známého. Ukažte, že potom existuje člověk, který má aspoň 7 známých.

Příklad 3.40: *(hardcore)* Dokažte, že existuje nekonečně mnoho mocnin čísla 3, jejichž desítkový zápis začíná na 11122000.
Pro náročnější: Rozhodněte, zda existuje nekonečně mnoho mocnin čísla 3, jejichž desítkový zápis začíná na 11122000 a končí na 009.

2 Invarianty

Jednou ze základních metod řešení úloh je hledání invariantů, neboli neměnných jevů. Typicky se tato metoda nabízí u úloh, kde v každém kroku provádíme nějakou transformaci, změnu nebo výpočet a ptáme se, jak může tento postup či třeba hra dopadnout. Hlavní strategie tedy zní: **Tam kde se něco opakuje, hledej to, co zůstává stejné**. Velmi často bývá invariantem parita součtu, ale může to být součet modulo dané n, vzdálenost nějakých bodů, počet jevů atd. Ne vždy ale musíme najít něco neměnného, často to může být jev, jenž se sice mění, zato však kontrolovaným způsobem, příkladem budiž posloupnost, jež má limitu. V naší přednášce se podíváme na úplný základ, a jelikož se jedná o důkazovou metodu, není lepší cesty než si na příkladech ukázat její fungování. Jak ale uvidíte na příkladech, leckdy je nalezení invariantu velice obtížné.

Ještě si uvedeme několik invariantů, které jsou často užitečné.

- součet čísel, případně součet modulo n (pro vhodné n).
- součet druhých mocnin (geometricky vzdálenost od počátku).
- další aritmetické operace: součin, podíl, součet čtverců rozdílů, ...
- počet nějakých jevů, případně modulo n.

2.1 Pár řešených příkladů

Příklad 4.1: Dva týmy hrají frisbee. Vždy když jeden tým získá bod, prohodí si strany. Hráči si za stavu 3:5 skočili na oběd a když se vrátili, nikdo nevěděl, na které straně má kdo stát. Jenom si pamatovali, kde stáli na počátku. Pomůžete jim?

Řešení: Všimneme si, že vždy když tým skončí na stejné straně, tak se skórovaly dva body. Tedy když je součet skóre sudý, tak jsou týmy na stejných stranách jako na začátku.

Příklad 4.2: Buď $d(n)$ ciferný součet čísla n. Najděte všechna řešení rovnice

$$n + d(n) + d(d(n)) = 2008.$$

Řešení: Po krátkém nezdaru při hledání vyhovujících n se pokusíme dokázat, že rovnice nemá řešení. A hle, využijeme invariant. Při ciferném součtu se zachovává zbytek po dělení třemi, proto je levá strana rovnice vždy dělitelná třemi a nemůže být rovna 2008.

Příklad 4.3: Každé z čísel $a_1, \ldots, a_n$ se rovná $+1$ nebo -1 a platí $a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \ldots + a_na_1a_2a_3 = 0$. Dokažte, že n je dělitelné čtyřmi.

Náhled řešení: Všimněme si, že každé číslo se zde vyskytuje čtyřikrát. Pokud tedy změníme znaménko u čísla a_i, tak rozborem případů zjistíme, že se $S \mod 4$ nezmění. Nyní změníme všechna znaménka na kladná, a tedy $S = n$. Ovšem na počátku bylo $S \equiv 0 \pmod 4$, a když se S v modulu 4 nemění, je pak $n \equiv 0 \pmod 4$, což znamená, že $4|n$.

Příklad 4.4: Mějme množinu $\{3, 4, 12\}$. Jsou-li a, b různé prvky naší množiny, můžeme je nahradit čísly $0.6a - 0.8b$ a $0.8a + 0.6b$. Můžeme někdy dostat množinu (a) $\{4, 6, 12\}$ nebo (b) $\{x, y, z\}$ kde $|x - 4|$, $|y - 6|$, $|z - 12| < \frac{1}{\sqrt{3}}$?

Řešení: (a) V tomto příkladu je potřeba geometrický náhled. Představte si danou množinu jako bod v prostoru a danou operaci jako jeho transformaci. Platí, že $(0.6a-0.8b)^2+(0.8a+0.6b)^2 = a^2+b^2$. Daná operace tedy nezmění vzdálenost od počátku, která je $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Jenže $\sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13$, zatímco $\sqrt{4^2+6^2+12^2} = 14$. (b) Zde už stačí udělat náhled, že $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-12)^2 < 1$. Tedy vnitřek koule o poloměru 1 se středem v bodě $\{4, 6, 12\}$ by musel protínat kouli o poloměru 13 se středem v počátku, což nenastane (ověříme jednoduchou nerovností).

Příklad 4.5: Máme modré, červené a zelené korálky. V jednom tahu smíme provést výhodnou výměnu: zahodíme dva korálky, každý jiné barvy, a dostaneme za ně korálek barvy třetí. Kdy můžeme tímto postupem skončit s jediným korálkem? Závisí barva zbylého korálku na zvoleném postupu?

Řešení: Zde je překvapivě také rozhodujícím faktorem parita – v každém kroku všechna tři čísla změní paritu. Tedy pokud na konci zbyde jen jeden korálek, tak byly na začátku dvě hromádky se sudým a jedna s lichým počtem korálků nebo naopak. Korálek bude bez ohledu na postup té barvy, jakou měla hromádka s jedinečnou paritou.

Příklad 4.6: Je možné transformovat funkci $f(x) = x^2+4x+3$ na funkci $g(x) = x^2+10x+9$ za pomoci následujících operací?

$$f(x) \mapsto (x+1)^2 f\Big(\frac{1}{x+1}\Big), \quad f(x) \mapsto (x-1)^2 f\Big(\frac{1}{x-1}\Big)$$

Řešení: Tento příklad je velice neobvyklý. Málokdy se setkáme s takovýmto invariantem, ale právě proto je důležité si pamatovat, že se může skrývat v čemkoliv. Nejprve se podíváme na dané operace. První z polynomu ax^2+bx+c vytvoří polynom $cx^2+(b+2c)x+(a+b+c)$. Druhá z toho samého polynomu vyrobí $cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c)$. Na první pohled není skoro nic vidět, jen taková drobnost, že nově vytvořené polynomy se liší znaménkem u b. Teď nastává velký trik, a to uvědomit si, že mají stejný diskriminant, který je dokonce stejný jako diskriminant původního polynomu, z něhož vznikly. Tedy obě operace jsou invariantní vůči diskriminantu. Jenže diskriminant $f(x)$ je 4, a diskriminant $g(x)$ je 64.

Příklad 4.7: Na zájezdu má každý turista nejvýše tři nepřátele. Dokažte, že je možno turisty rozdělit do dvou autobusů tak, že nikdo nejede v autobuse s více než jedním svým nepřítelem. Zobecněte. (Nepřátelství je vzájemné.)

Řešení: Zde použijeme jednu ne příliš častou variantu invariantu. Princip tohoto invariantu je zavedení funkce, která s každou operací klesne. Ukážeme si to na tomto příkladu. Nejprve turisty rozházíme do autobusu libovolně. Na všech možných rozděleních zavedeme funkci H, která každému rozdělení přiřadí celkový součet nepřátelských párů v obou autobusech. Pokud je turista A v autobuse s alespoň dvěma nepřáteli, pak má v druhém autobuse nejvýše jednoho. Tak jej přesadíme do druhého autobusu. Tím nám funkce H klesne. Jenže nemůže klesat do nekonečna, takže jednou dosáhne svého požadovaného minima a tomu odpovídá naše rozdělení.

Příklad 4.8: Každé z čísel od jedné do milionu nahradíme jeho ciferným součtem. Opakujeme, dokud nedostaneme milion jednociferných čísel. Bude víc jedniček, nebo dvojek?

Náhled řešení: Děláme zde ciferný součet. Ten je stejný nejen modulo 3, ale taktéž modulo 9. Náš invariant bude tedy modulo 9.

2.2 Příklady

Příklad 4.9: Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \ldots, 2n$ (n je liché přirozené). Můžeme smazat libovolná dvě čísla a, b a místo nich napsat $|a - b|$. Toto opakujeme. Dokažte, že poslední zbylé číslo je liché.

Příklad 4.10: Mějme celá čísla a, b, c a d, ne všechna stejná. Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(a-b, b-c, c-d, d-a)$. Ukažte, že alespoň jedna souřadnice bude jednou v absolutní hodnotě větší než milion.

Příklad 4.11: Nechť $0 < x_0 < y_0$. Vyjádřete vzorcem x_n, y_n definované rekurentními vztahy

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n}.$$

Příklad 4.12: Ke kulatému stolu má usednout $2n$ poslanců, každý z nich má nanejvýš $n-1$ nepřátel. Ukažte, že je možno je rozsadit tak, aby nikdo neseděl vedle svého nepřítele.

Příklad 4.13: Ke každému vrcholu pětiúhelníku napíšeme celé číslo, součet všech pěti čísel je kladný. Pokud jsou na obvodu pětiúhelníku x, y a z (v tomto pořadí) a $y < 0$, můžeme tuto trojici nahradit trojicí $x + y, -y, y + z$. Může tento proces probíhat nekonečně dlouho? (Řešte i pro reálná čísla.)

Příklad 4.14: Začněme s nějakou čtveřicí celých čísel (varianta: reálných čísel) (a, b, c, d). Opakovaně budeme nahrazovat čtveřici (a, b, c, d) čtveřicí $(|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|)$. Dostaneme se vždy ke čtveřici $(0, 0, 0, 0)$?

Příklad 4.15: Začněme s čísly $1, 2, ..., 4n - 1$. V jednom tahu nahradíme dvě čísla jejich rozdílem. Dokažte, že po $4n - 2$ tazích zbyde sudé číslo.

Příklad 4.16: Vezmeme šachovnici s obvyklým obarvením políček. V jednom tahu můžeme převrátit barvy v (celé) jedné řadě, (celém) jednom sloupci, či v (celém) čtverečku 2×2. Můžeme získat obarvení s jediným černým políčkem?

Příklad 4.17: Mějme kladná celá čísla a, b. Dokud je $a > 0$ opakujeme následující operaci: pokud je $a < b$, dosadíme za (a, b) dvojici $(2a, b - a)$, jinak za (a, b) dosadíme $(a - b, 2b)$. Pro které výchozí dvojice postup skončí? Po kolika krocích? Co můžete říci o periodách v nekonečném procesu? Řešte i pro kladná reálná a, b.

Příklad 4.18: Opět máme modré, červené a zelené korálky, tentokrát za zahození dvou korálků různých barev dostaneme dva korálky barvy třetí. Kdy je možno docílit toho, že všechny korálky budou mít tutéž barvu?

Příklad 4.19: V každém políčku obdélníkové tabulky je napsáno celé kladné číslo. V každém tahu je možno zmenšit všechna čísla v jednom sloupci o jedna nebo zdvojnásobit všechna čísla v jedné řadě. Dokažte, že je možno dosáhnout tabulky se samými nulami.

Příklad 4.20: Vrcholy mnohoúhelníku jsou označeny reálnými čísly. Pokud nějaká čtveřice po sobě jdoucích čísel a, b, c, d splňuje vztah $(a-d)(b-c) < 0$, smíme prohodit b a c. Můžeme toto prohození provést nekonečněkrát?

Příklad 4.21: Na políčku b1 šachovnice je napsáno číslo -1, na ostatních $+1$. Máme možnost změnit znaménko čísel v jednom sloupci, jedné řadě nebo na libovolné diagonále (včetně jednopolíčkových diagonál, tj. rohových políček). Dokažte, že nám vždy zbyde nějaká -1.

Příklad 4.22: Mějme řadu 2000 čísel. Do druhé řady pod každé číslo napíšeme počet jeho opakování v řadě první. Stejně vytvoříme z druhé řady řadu třetí atd. Dokažte, že jednou budou dvě po sobě jdoucí řady stejné.

Příklad 4.23: Na každém políčku šachovnice je celé číslo. Smíme přičíst jedničku ke všem číslům nějakého čtverce 4×4 nebo 3×3 políčka. Můžeme opakováním této operace docílit toho, aby byla všechna čísla na šachovnici dělitelná (a) dvěma, (b) třemi?

Příklad 4.24: Z čísla 112000 vyškrtneme první číslici a přičteme ji ke zbylému číslu. Tuto operaci opakujeme, dokud nezískáme deseticiferné číslo. Ukažte, že dvě z jeho cifer budou stejné.

Příklad 4.25: Na políčku $(1, 1)$ stojí věž. Jedním tahem smíme buď zdvojnásobit jednu souřadnici, nebo odečíst menší souřadnici od větší. Na která políčka se věž může dostat?

Příklad 4.26: Mějme posloupnost začínající $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, jejíž další členy získáme jako součet předchozích šesti modulo 10. Vyskytne se někde v této posloupnosti šestice $\ldots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$?

Příklad 4.27: Vezmeme 35 celých čísel. Můžeme vybrat nějakých 13 z nich a zvětšit každé z těchto 13 o 1. Ukažte, že můžeme docílit toho, že všech 35 čísel bude stejných. Prozkoumejte i zobecnění pro n čísel, z nichž je možno volit m.

Příklad 4.28: Čísla $1, 2, \ldots, 2n$ jsou seřazena v libovolném pořadí. Ke každému číslu přičteme jeho pořadové číslo. Dokažte, že dostaneme dvě čísla se stejným zbytkem modulo $2n$.

Příklad 4.29: V kruhu je rozmístěno n důlků, v každém je jedna kulička. V jednom tahu smíme posunout jednu kuličku po směru hodinových ručiček, jinou proti směru. Můžeme shromáždit všechny kuličky v jednom důlku?

Příklad 4.30: Na každý mřížový bod (x, y) pro $y \geq 0$ můžeme položit dámový kámen. Pak s těmito kameny zacházíme jako při solitéru: vybereme dva kameny sousedící vodorovně nebo svisle, jedním přeskočíme druhý, jež zahodíme, a dopadneme na volné políčko. Tímto postupem chceme dostat nějaký kámen na políčko $(0, n)$ pro co největší n.

Příklad 4.31: Čísla $1, 2, ..., n$ jsou libovolně uspořádána. V jednom kroku můžeme dvě sousední čísla (varianta: dvě libovolná čísla) prohodit. Můžeme po lichém počtu kroků dojít k výchozímu uspořádání?

Příklad 4.32: Vezměme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. V jednom kroku můžeme jeden trojúhelník rozdělit výškou (na přeponu) na dva podobné trojúhelníky. Můžeme opakovaným dělením docílit toho, že žádné dva z našich trojúhelníků nebudou shodné?

Příklad 4.33: Mějme v řadě $2n$ čtverců obarvených střídavě bíle a černě. V jednom kroku vezmeme nějakou řadu čtverců (tj. několik čtverců v řadě za sebou) a v ní invertujeme barvy. Kolik nejméně potřebujeme kroků, aby byla celá řada jednobarevná?

Příklad 4.34: *(hardcore)* Mějme čísla $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots, n, n$ a uspořádejme je tak, že mezi stejnými čísly k bude vždy $k-1$ dalších čísel (pro n=4 je třeba taková sekvence: $4, 1, 1, 3, 4, 2, 3, 2$). Ukažte, že takové uspořádání není možné pro $n \equiv 2, 3 \pmod 4$.

Příklad 4.35: *(hardcore)* Řekneme, že množina $\{1, 2, 3, \ldots 3n\}$ je rozložitelná, právě když ji můžeme rozložit na n množin, každou o třech prvcích, tak, že v každé množině je největší číslo součtem dvou zbylých. Rozhodněte, zdali je množina o 3324 nebo 3309 prvcích rozložitelná.

3 Obarvení

Jak už je v úvodu řečeno, je metoda obarvování jen jednou variantou metody invariantů. Její použití je ale tak specifické, že se jí většinou věnuje samostatné studium. V čem tedy spočívá? Mějme opět nějakou skupinu objektů a chtějme o ní něco dokázat. Najdeme-li vhodné obarvení, pak můžeme najít dobrý invariant. Na několika následujících příkladech si ukážeme, že je to opravdu silná technika. Jenom drobná vsuvka: vzpomínáte si na příklad s 33 věžemi? V jeho řešení bychom taky šachovnici mohli obarvit 8 barvami a řešení by bylo zřejmé. Nebo naopak většinu geometrických příkladů na DP bychom mohli vyřešit vhodným obarvením daného útvaru. Stejně jako u invariantů se tahle technika používá hlavně k dokazování, zda něco lze, či nikoliv.

Nyní si ukážeme několik více či méně řešených příkladů na úvod do tématu:

Příklad 5.1: *(Základní)* Mějme šachovnici 8×8. Uřízněme z ní protější rohy. Kolika způsoby tuto šachovnici můžeme pokrýt 31 dominovými kostkami velikosti dvou políček. Kostky se nesmí překrývat.

Řešení: Zde zvolíme klasické šachovnicové obarvení. A nyní finta: Ať položíme domino kamkoliv, vždy bude zabírat jedno černé a jedno bílé políčko. Ale po vybarvení zjistíme, že jsme uřízli dvě bílá políčka – na šachovnici tedy zbylo 32 černých políček a 30 bílých. Tedy ať začneme pokrývat šachovnici jakkoliv, vždy nám na konci zbydou dvě černá nepokrytá políčka a jedna dominová kostka, kterou nemůžeme umístit. Počet pokrytí je tedy 0.

Nyní si uvedeme jednu definici důležitou pro další příklady.

Definice: Objekt, který vznikne postupným spojováním stejných mnohoúhelníků tak, že přidaný mnohoúhelník má s původním objektem společnou hranu, nazveme polyformem. Objektu, jehož základním mnohoúhelníkem je čtverec, říkáme polyomino, speciálně polyomino velikosti n, kde n je počet použitých čtverců. Pro $n = 2, 3, 4, 5, 6$ používáme pojmy domino, trimino, tetramino, pentomino, hexomino. Pro kostky tetramina používáme označení I, L, O, S, T, což trochu vzdáleně připomíná všech 5 typů kostek.

3.1 Pár řešených příkladů

Příklad 5.2: Mějme obdélník vydlážděný kostkami 2×2 a 4×1. Jedna se nám rozbila a my máme k dispozici jen náhradní kostku druhého tvaru. Umíme takto znovu vydláždit původní obdélník?

Návod k řešení: Nepůjde to, ale abychom to dokázali, musíme zvolit správné obarvení dvěma barvami. Chceme nějaké obarvení, které by jedné kostičce přiřadilo vždy jiný vzor než druhé. Je to trochu složitější než předchozí šachovnice, ale je možné to nechat čtenáři jako cvičení s nápovědou, že poměr obarvení jednou barvou ku druhé je 1:3. Při správném obarvení už nebude těžké najít v tomto obarvení invariant.

Příklad 5.3: Nechť $k > 0$. Dokažte, že když obarvíme rovinu třemi barvami, vždy v ní najdeme dva body stejné barvy vzdálené od sebe přesně k.

Řešení: Pro spor předpokládejme, že to nelze. Nyní jsou dva způsoby jak tento příklad vyřešit. My si ukážeme ten jednodušší. Na libovolném místě nakresleme rovnostranný trojúhelník o hraně k. Ten bude mít vrcholy třech různých barev. Zvolme jeden z těchto vrcholů s barvou dejme tomu červenou. Nad jeho protější hranou vztyčme druhý rovnostranný trojúhelník. Třetí vrchol bude červený. Nyní z jednoho červeného vrcholu udělejme střed kružnice a kolem tohoto středu zrotujme náš útvar ze dvou trojúhelníků. Tím získáme červenou kružnici a na ní jistě budou dva červené body vzdálené o k. Není těžké si rozmyslet, že to samé by platilo, kdyby se zvolil čtverec místo dvou trojúhelníků.

Příklad 5.4: Na jedno z políček čtverce 5×5 napíšeme -1 na ostatních 24 políček 1. V jednom kroku můžeme změnit znaménko u všech čísel v nějakém čtverci $a \times a$, pro libovolné $a > 1$. Chceme docílit toho, aby na všech políčkách byla 1. Kde může být na začátku -1, aby to bylo možné?

Řešení: Zde je důležité zvolit si správné obarvení. Všimněme si, že -1 je jen na jednom políčku. Je velká pravděpodobnost, že když máme jen jeden objekt, budeme hledat obarvení takové, abychom mohli využít paritu. Zde je ale problém, že můžeme volit hranu čtverce mezi 2 až 5. Všechna klasická obarvení nikam nevedou, protože čtverce liché velikosti nám v nich vždy zaberou lichý počet obarvených políček. Tak si obarvíme bílou barvou prostřední sloupeček a zbytek políček černou. Nyní nám jakýkoliv čtverec vždy zabere sudý počet černých políček, tedy máme hledanou paritu. Když bude totiž -1 na černém políčku, tak nám jakýkoliv čtverec zachová lichý počet -1 na těchto políčkách. Ovšem když nyní celé obarvení zrotujeme o $90°$ (tedy místo sloupce obarvíme řádek), je pak argument stejný, a tedy -1 může být pouze v prostředním políčku. Algoritmus na získání získání 1 na všech políčkách, když máme -1 uprostřed, již není těžké najít.

Příklad 5.5: Na šachovnici $4 \times n$ neexistuje uzavřená cesta jezdcem, která by procházela každým políčkem právě jednou. Dokažte.

Náhled řešení: Zde bude velice těžké najít obarvení, které by nám něco hezkého ukazovalo. Nápovědou k nalezení takového obarvení budiž to, že zde používáme figurku koně, která má velice specifický pohyb. Po troše zkoušení nám vznikne obarvení 4 barvami takové, že v krajních sloupcích jsou použity dvě barvy a v prostředních dvou sloupcích další dvě. Pro lepší trénink čtenáře nyní necháme nalezení tohoto obarvení na něm. Nyní už nebude důkaz, že kůň nemůže proskákat celou šachovnici, těžký, protože se jen spočítají políčka jednotlivých barev a z toho nám vzejde klasický spor.

3.2 Příklady

Příklad 5.6: Je možno z pěti tetramin – od každého druhu jednoho – vytvořit obdélník?

Příklad 5.7: Lze pokrýt šachovnici 8×8 pomocí patnácti tetramin T a jednoho tetramina O?

Příklad 5.8: Lze pokrýt obdélník 10×10 pomocí 25 tetramin I?

Příklad 5.9: Je možno vyplnit krychli $10 \times 10 \times 10$ pomocí 250 cihel $1 \times 1 \times 4$?

Příklad 5.10: Jeden z rohů čtverce $(2n + 1) \times (2n + 1)$ je vyříznut. Pro která n lze pokrýt zbývající čtverce dominy, z nichž polovina je vodorovně a polovina svisle?

Příklad 5.11: Čtverec 7×7 je pokryt šestnácti dílky 3×1 a jedním 1×1. Kde všude může být dílek 1×1?

Příklad 5.12: Na každém políčku šachovnice 9×9 sedí beruška. V jeden okamžik každá beruška přeleze na jedno z políček sousedících rohem s výchozím. Některá políčka zůstanou volná. Jaký je největší možný počet volných políček?

Příklad 5.13: Výstavní síň má půdorys tvaru (ne nutně konvexního) n-úhelníku. Najděte co nejmenší počet hlídačů, kteří (pro dané n) takovou síň ohlídají (hlídač je bod, který vidí všemi směry).

Příklad 5.14: Lze do krychle $6 \times 6 \times 6$ umístit 53 cihel velikosti $1 \times 1 \times 4$ (rovnoběžně se stěnami)?

Příklad 5.15: Čtverec 23×23 je vyplněn čtverci 1×1, 2×2 a 3×3. Kolik nejméně čtverců 1×1 potřebujeme?

Příklad 5.16: (MO A 2007) Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$ ($n \geq 2$) postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě šikmo a přímo. Šikmo znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. Přímo znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n, pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající šikmo tak, že figurka projde celou šachovnici a na každém poli se octne právě jednou.

Příklad 5.17: Čtverec 6×6 je vyplněn dominovými kostkami 1×2. Dokažte, že vždy existuje přímka, která prochází celým čtvercem, ale neprochází žádnou z kostek.

Příklad 5.18: Kolik nejméně políček ve čtverci $n \times n$ musíme obarvit, aby do něj na neobarvená políčka nešlo umístit trimino L?

Příklad 5.19: Sféra je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že na ní lze najít tři body, které dohromady vytvoří rovnostranný trojúhelník.

Příklad 5.20: Mějme body $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$. V jednom kroku vezměme dva body a jeden zobrazme v středové souměrnosti s druhým. Tímto dostaneme nový bod. Ukažte, že po konečně mnoha krocích nikdy nevygenerujeme bod $(1, 1)$.

Příklad 5.21: Ukažte, že lze kružnici obarvit dvěma barvami tak, aby každý pravoúhlý trojúhelník, jemuž je tato kružnice opsaná, obsahoval obě barvy.

Příklad 5.22: Ve vrcholech šestiúhelníku jsou napsána čísla 1, 0, 1, 0, 0, 0. V jednom kroku smíme zvýšit o jedna dvě sousední čísla. Je možné opakováním tohoto kroku získat šest stejných čísel?

Příklad 5.23: *(HardCore)* V rovině je několik přímek, žádné tři neprocházejí týmž bodem. Dokažte, že je možné obarvit všechny průsečíky daných přímek třemi barvami tak, že na žádné přímce nejsou dva sousední průsečíky stejnobarevné.